الفصل الأول : المنطق الرياضي

من مهام المنطق الرياضي هو معرفة ما اذا كانت الجملة الخبرية صائبة أو خاطئة . ولقد عرفت أن الجملة الخبرية تسمى عبارة منطقية وهي إما صائبة أو خاطئة ولا يمكن أن تكون صائبة وخاطئة في وقت واحد.

ولقد علمت انه إذا رمزنا لعبارة منطقية بالرمز P فان نفي P تكون صائبة (True) (T)

اذا كانت P خاطئه(False) (F)

ويكون نفيP خاطئة إذا كانت P صائبة

وعبرنا عن ذلك كما في الشكل

$\sim P$	P
F	T
T	F

امثلة :-

$4 = 1+3$ \ هذه عبارة صائبة T

$5 = 2+2$ \ هذه عبارة خاطئة F

مجموع زوايا المثلث = 180° \ هذه عباره صائبة T

مجموع زوايا المربع = 180° \ هذه عباره خاطئة F

أدوات الربط

أداة الربط : (و) ورمزها $\wedge$

يفهم ثم يحفظ الجدول

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

الحقل الأول (P) والحقل الثاني (Q) ثابت في جميع الأدوات

أداة الربط (و)
تكون صائبة فقط عندما يكون الحقل الأول والثاني صائب
اما باقي الحالات تكون خاطئة

مثال (تمارين 1-1): - بين أياً من العبارات التالية صائبة وأياً منها خاطئة :

١- العدد 5 يُقسم العدد 25 و العدد 7 يُقسم 25 .

T $\wedge$ F = F

2 - قطرا المربع متعامدان و قطرا متوازي الاضلاع متناصفان.

T $\wedge$ T = T

التوضيح: - العدد 5 تقسم 25 هذه عباره صحيحه (تمثل P بالجدول) عبرنا بدل حرف و بعلامة

العدد 7 يقسم 25 هذه عبارة خاطئة (تمثل Q بالجدول)

اذا كانت P صائبة و Q خاطئة فيساوي خاطئة

(لاحظ الجدول)

$\vee$ أداة الربط : (او) ورمزها

P	Q	P ∨ Q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

أداة الربط (او)
تكون خاطئة فقط عندما يكون الحقل الأول والثاني خاطئ اما باقي الحالات صائبة

يفهم ثم يحفظ الجدول

مثال (تمارين 1-1): - بين أياً من العبارات التالية صائبة وأياً منها خاطئة :

1 - العدد 5 يُقسم العدد 25 أو العدد 7 يُقسم 25 .

الحل: T $\vee$ F = T

2 - العدد 7 ليس أولياً أو العدد 4 أولياً.

الحل: F $\vee$ F = F

التوضيح: - العدد 5 تقسم 25 هذه عباره صحيحه (تمثل P بالجدول) عبرنا بدل حرف او بعلامة العدد 7 يقسم 25 هذه عبارة خاطئة (تمثل Q بالجدول) اذا كانت P صائبة و Q خاطئة فيساوي صائبة (لاحظ الجدول)

$\longrightarrow$ أداة الربط : (اذا كان ..... فأن) ورمزها $\longrightarrow$

P	Q	P ⟶ Q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

أي أن P ⟶Q تكون خاطئة إذا كانت المقدمة « صائبة » والتالية « خاطئة » فقط

يفهم ثم يحفظ الجدول

مثال :-

1 - اذا كان $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ فان $\sqrt{-2} \notin R$

T ⟵ T = T صائبة لأن المقدمة صائبة والتالية صائبة.

2- إذا كان 5+ 7 = 12 فإن 7 =6 +2

T ⟵ F = F خاطئة لأن المقدمة صائبة والتالية خاطئة.

3 - إذا كان 5+ 7 = 11 فإن 8 =6 +2

F ⟵ T = T صائبة لأن المقدمة خاطئة والتالية صائبة.

4 - إذا كان صفر = 1 فإن $\sqrt{3}$ عدد نسبي

F ⟵ F = T صائبة لأن المقدمة خاطئة والتالية خاطئة.

أداة الربط :(إذا وفقط إذا) ورمزها ⟷

⟷

أي أن P⟷Q

تكون صائبة في حالتين هما :إذا كانت كل من العبارتين المركبتين لها صائبتين معاً

P	Q	P⟷Q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

يفهم ثم يحفظ الجدول

مثال :-

1) $x^2 - 3x - 4 = 0 \longleftrightarrow x = -1 , x = 4$

2) $x = -2 \longleftrightarrow x^5 = -32$

الاقتضاء

سنوضح معنى الاقتضاء من خلال الحالتين الآتيتين:

الحالة الأولى : الاقتضاء في اتجاه واحد والذي يُرمز له $\Rightarrow$

مثال :- $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$

التوضيح: - لاحظ عزيزي الطالب العبارة الأولى تؤدي الى العبارة الثانية
لان عندما نربع عدد 3 هوه 9 ومربع x هوه x^2
اما العبارة الثانية لا تؤدي الى العبارة الأولى لان $x = \pm 3 \not\Leftarrow x^2 = 9$
لذألك الاقتضاء كان باتجاه واحد فقط

الحالة الثانية :الاقتضاء في اتجاهين متعاكسين والذي يُرمز له $\Leftrightarrow$

مثال :- $x = 3 \Leftrightarrow x^3 = 27$

التوضيح: - لاحظ عزيزي الطالب العبارة الأولى تؤدي الى العبارة الثانية
والعبارة الثانية تؤدي الى العبارة الاولى
لان مكعب عدد 3 هوه 27 ومكعب x هوه x^3
اما العبارة الثانية تؤدي الى العبارة الأولى لان $x = 3 \Leftarrow x^3 = 27$
لذألك الاقتضاء كان باتجاهين

مثال: - إختر أحد الرمزين $\Rightarrow$ ، $\Leftrightarrow$ لوضعه بين التعبيرين في الحالات الآتية لتصبح العبارة صحيحة.

1) $x = 2 , x^3 = 8$

الحل :- $x = 2 \Leftrightarrow x^3 = 8$

2) $x > 2 , x > 5$

الحل :- $x > 2 \Leftarrow x > 5$

3) $x^2 \geq 0 , x \leq 0$

الحل :- $x^2 \geq 0 \Leftarrow x \leq 0$

4) P : أ ب ج د شكل رباعي قطراه متناصفان , Q : أ ب ج د متوازي اضلاع

الحل :- $P \Leftrightarrow Q$

العبارتان المتكافئتان

يقال أن العبارة P مكافئة للعبارة Q إذا كان لها نفس جدول الصواب للعبارة ويرمز لها بالرمز $P \equiv Q$

مثال اثبت ان $P \rightarrow Q \equiv \sim P \vee Q$

الحل :- نعمل الجدول الاتي :

P	Q	~ P	$P \rightarrow Q$	$\sim P \vee Q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

≡

تمرينات (1 - 1)

س 1 بين أياّ من العبارات التالية صائبة وأياً منها خاطئة مع السبب

1) العدد 5 يُقسم العدد 25 والعدد 7 يُقسم 25 .

$T \wedge F$ = F خاطئة لأن المقدمة صائبة والتالية خاطئة.

2) العدد 5 يُقسم العدد 25 أو العدد 7 يُقسم 25 .

$T \vee F$ = T صائبة لأن المقدمة صائبة والتالية خاطئة.

3) العدد 7 ليس أولياً أو العدد 4 أولياً.

$F \vee F$ = F خاطئة لأن المقدمة خاطئة والتالية خاطئة.

4) قطرا المربع متعامدان و قطرا متوازي الاضلاع متناصفان .

$T \wedge T$ = T صائبة لأن المقدمة صائبة والتالية صائبة.

5) قطرا المربع متعامدان أو قطرا المستطيل متعامدان.

$T \vee F$ = T صائبة لأن المقدمة صائبة والتالية خاطئة.

س 2 \ استخدم ⇔ أو ⇐ للربط بين العبارتين في الجدول الآتي لكي تصبح العبارة المركبة الناتجة صائبة:

العبارة P	الرمز	العبارة Q
الشكل الرباعي مستطيل	$\Rightarrow$	قطرا الشكل الرباعي يتناصفان
الشكل الرباعي معين	$\Leftrightarrow$	أضلاع الشكل الرباعي متطابقة
الشكل الرباعي مستطيل	$\Rightarrow$	الشكل الرباعي قياس زواياه قوائم
$a.b=0\ ,\ a,b\in R$	$\Leftrightarrow$	$a=0 \vee b=0$
$X=-3$	$\Leftarrow$	$X^2=9$
الشكل الرباعي مربع	$\Rightarrow$	الشكل الرباعي قياس زواياه قوائم
$X^2=25$	$\Rightarrow$	$X=5$
$X^3=-125$	$\Leftrightarrow$	$X=-5$
أ ب جـ مثلث متساوي الاضلاع	$\Rightarrow$	أ ب جـ مثلث متساوي الساقين
$X=1 \vee X=2$	$\Leftrightarrow$	$(X-1)(X-2)=0$

س 3 برهن ان : 1) $P \rightarrow Q \equiv \sim Q \rightarrow \sim P$

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P \rightarrow Q$	$\sim Q \rightarrow \sim P$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

$\equiv$

2) $\sim(P \rightarrow Q) \equiv P \wedge \sim Q$

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\sim(P \rightarrow Q)$	$\sim Q$	$P \rightarrow \sim Q$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	F
F	F	T	F	T	F

$\equiv$

س 4 اذا كانت P صائبة ، Q صائبة ، S خاطئة فأي العبارات الآتية خاطئة وأيها صائبة ؟

1) $(P \rightarrow Q) \vee S$

الحل :- $(T \rightarrow T) \vee F$

$T \vee F$

العبارة صائبة $= T$

2) $(P \rightarrow S) \wedge P$

الحل:- $(T \rightarrow F) \wedge T$

$F \wedge T$

العبارة خاطئة $= F$

3) $(S \rightarrow Q) \wedge P$

الحل :- $(F \rightarrow T) \wedge T$

$T \wedge T$

العبارة صائبة $= T$

4) $(S \leftrightarrow S) \vee S$

الحل :- $(F \leftrightarrow F) \vee F$

$T \vee F$

العبارة صائبة $= T$

س 5 ضع دائرة حول رمز الاجابة الصحيحة فيما يلي :

P، S عبارتين اعتمدت في الاسئلة الاتية:

1) $\sim P \to P$ تكافىء

أ) $P \to P$ ب) $\sim P \to P$ ج) $\sim P$ د) $P \wedge \sim P$

الحل :- (ج)

2) $S \leftrightarrow S$ عبارة

أ) صائبة دائماً ب) صائبة مرة واحدة ج) خاطئة دائماً د) خاطئة مرة واحدة

الحل :- (أ)

3) نفي العبارة $\langle 9 > 5 + 3\rangle \vee \sim S$ هو :-

أ) $\langle 9 \geq 5 + 3\rangle \vee \sim S$ ب) $\langle 9 < 5 + 3\rangle \vee \sim S$

ج) $\langle 9 \leq 5 + 3\rangle \wedge \sim S$ د) $\langle 9 \leq 5 + 3\rangle \wedge S$

الحل :- (د)

الجمل المفتوحة

المتغير :- هو رمز يأخذ قيماً لمجموعة من الاشياء المفروضة من مجموعة التعويض لذلك المتغير .

الجملة المفتوحة :- هي جملة تحتوي على متغير أو أكثر وتتحول إلى عبارة عند إعطاء كل متغير قيمة معينة من مجموعة التعويض.

جملة مفتوحة $\longrightarrow 3x = 3$

جملة مفتوحة $\longrightarrow x + y = 8$

عرفنا العبارة المنطقية بأنها جملة خبرية إما صائبة أو خاطئة (وليس الاثنان معاً) . ولكن اذا لاحظنا الجمل الآتية :

أ) X عدد صحيح أكبر من الصفر والتي نرمز لها بالرمز P(X) .

إذا عوضنا في الجملة (أ) بالعدد 9 بدل الحرف X تصبح (9 عدد صحيح أكبر من الصفر) وهذه عبارة صائبة.

ب) Y+1=3 والتي نرمز لها بالرمز Q(Y).

اعط قيمة ل (Y) في الجملة (ب) لتجعلها عبارة خاطئة.

ج) a + b = 6 حيث a ، b أعداد صحيحة والتي نرمز لها بالرمز G(a,b).

ولو أعطيت كلاً من a ، b قيمة تساوي3 نحصل على العبارة (6 =3 +3) وهي عبارة صائبة.

د) . . . . أحدى مدن العراق.

ضع الاسم في الفراغ المناسب في الجملة (د) لتجعلها عبارة صائبة.

ملاحظات

مجموعة الاعداد الطبيعية N

$N = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\cdots\cdots\}$

مجموعة الاعداد الصحيحة Z

$Z = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\cdots\}$

مجموعة الاعداد الحقيقية هي R

تكافؤ الجمل المفتوحة

تسمى الجملتان المفتوحتان متكافئتين اذا تساوت مجموعتي الحل لكل منهما

أي ان مجموعة حل الجملة الاولى = مجموعة حل الجملة الثانية ($S_1 = S_2$)

مثال

لتكن $P(x): 2X = 4$, $Q(X) = X - 1 = 1$ ولتكن مجموعة التعويض لكل منهما هي Z

هل P(x) , Q(x) متكافئتان ؟

الحل :-

نقسم على 2

2X = 4

X = 2

$S_1 = \{ 2 \}$

X – 1 = 1

X = 1 + 1

X = 2

$S_2 = \{ 2 \}$

نلاحظ أن مجموعة الحل للجملة المفتوحة P(X) هي { 2 } وإن مجموعة الحل للجملة المفتوحة Q(X) هي {2 }

فان المجموعتان متكافئتان $S_1 \equiv S_2$

مثال

اذا كانت P(X): X=2 , Q(X) : $X^2 = 4$ ومجموعة التعويض لكل منها هي مجموعة الأعداد الصحيحة Zهل P(X) , Q(X) متكافئتان ؟

الحل :-

$X = 2$

$S_1 = \{2\}$

بالجذر

$X^2 = 4$

$X = \pm 2$

$S_2 = \{2, -2\}$

$S_1 \neq S_2$

الجملتان غير متكافئتان

نفي الجملة المفتوحة

إن نفي الجملة المفتوحة P(X) هي الجملة المفتوحة « ليس صحيحاً P(X) » أو أي جملة مفتوحة تكافئ ذلك وسوف نستعمل الرمز $\sim P(X)$ للتعبير عن نفي الجملة المفتوحة P(X).

النفي	الرمز
$\neq$	$=$
$<$	$\geq$
$>$	$\leq$
$\geq$	$<$
$\leq$	$>$
(أو) $\vee$	(و) $\wedge$

مثال

لنفرض أن مجموعة التعويض لكل جملة مفتوحة فيما يلي هي مجموعة الأعداد الصحيحة Z

نفيها $\sim P(X)$	الجملة المفتوحة P(X)
$X^2-4\neq0$	$X^2-4=0$
X ليس عدداً صحيحاً زوجياً	X عدد صحيح زوجي
$X+1=6$ او $X\neq4$	$X+1\neq6$ و $X=4$

تمرينات (2 - 1)

س 1 \ اكتب مجموعة الحل لكل جملة مفتوحة من الجمل الآتية:

ت	الجملة المفتوحة	مجموعة التعويض	مجموعة الحل
أ	$x<3$	N	$S=\{0,1,2\}$
ب	$x^2-11x+30=0$ $(x-6)(x-5)=0$ أما $x-6=0 \Longrightarrow x=6$ أو $x-5=0 \Longrightarrow x=5$	{10, 6 , 5 , 3}	$S=\{5,6\}$
ج	$(x-1)\left(x-\frac{3}{5}\right)(x-30)=0$ $x=1\in z$ $x=\frac{3}{5}\notin z$ $x=30\in z$	Z	$S=\{1,30\}$
د	$(x-1)(x-5)=0$ و $x>4$ أما $x=1$ او $x=5$ {5,6,7,..........}	N	$S=\{1,5\}\cap\{5,6,7,\cdots\cdots\cdots\}$ $S=\{5\}$
هـ	X لا تقبل القسمة على 4	{ 2 , 4 , 6 , 8 , 10 }	$S=\{2,6,10\}$
و	$x+5\geq 0$ $x\geq -5$	Z	$S=\{-5,-4,-3,\cdots\cdots\}$

س2 يوجد في كل مما يأتي زوج من الجُمل المفتوحة ، أي من هذه الأزواج يمثل جملتين مفتوحتين متكافئتين مع العلم أن مجموعة التعويض هي Z .

أ) $x - 3 = 3 , 3x - 5 = x + 7$

الحل :-

$3x - 5 = x + 7$ نضيف x– للطرفين

$3x - x - 5 = x - x + 7$

$2x - 5 = 7 \Rightarrow 2x = 7 + 5$

$2x = 12$ نقسم على 2 $x = 6$

$S_1 = \{6\}$

$x - 3 = 3$

$x = 3 + 3$

$x = 6$

$S_2 = \{6\}$

$S_1 \equiv S_2$

ب) $x = 2 , x^2 = 4$

الحل :-

$X^2 = 4$ بالجذر

$X = \pm 2$

$S_1 = \{2, -2\}$

$X = 2$

$S_2 = \{2\}$

$S_1 \not\equiv S_2$

ج) $x^2 = 9 , x = 3$ او $x = -3$ واجب

عزيزي الطالب أسئلة الواجبات هي أسئلة مشابهه لأسئلة محلولة

د) $(x + 1)(2x + 1) = 0 , x + 1 = 0$ واجب

عزيزي الطالب

ارسل حل الواجب

على التليكرام للتأكد من صحة الحل

gl_gtt

هـ) $x^2 - 6x + 5 = 0$, $(x-1)(x-5) = 0$

الحل :-

$(x-1)(x-5) = 0$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

$S_1 = \{1, 5\}$

نحلل بالتجربة

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$(x-5)(x-1) = 0$

$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$S_2 = \{1, 5\}$

$S_1 \equiv S_2$

و) $x = 0$, x أكبر من 1 - و أصغر من 1

الحل :-

$x = 0$

$S_1 = \{0\}$

$-1 < x < 1$

$S_2 = \{0\}$

$S_1 \equiv S_2$

ز) $0 \le x < 3$, $(x-1)(x-2) = 0$

الحل :-

$0 \le x < 3$

$S_1 = \{0, 1, 2\}$

$(x-1)(x-2) = 0$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$S_2 = \{1, 2\}$

$S_1 \not\equiv S_2$

س 3

إنفِ كلَّ جملة مفتوحة من الجُمل الآتية ثم جد مجموعة الحل للجملة المنفية مع العلم أن مجموعة التعويض هي {1,2,3,4,5}

الجملة	نفي الجملة	مجموعة حل الجملة المنفية
$2x = 4$	$2x \neq 4$	$2x \neq 4 \Rightarrow x \neq 2$ $S = \{1, 3, 4, 5\}$
$x + 4 = 7$	$x + 4 \neq 7$	$x \neq 7 - 4 \Rightarrow x \neq 3$ $S = \{1, 2, 4, 5\}$
$(x-3)(x-4) = 0$	$(x-3)(x-4) \neq 0$	$x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$ $x - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$ $S = \{1, 2, 5\}$
$x^2 \neq 9$ و $x + 2 = 4$	$x^2 = 9$ او $x + 2 \neq 4$	$x = \pm 3$ $x \neq 4 - 2 \Rightarrow x \neq 2$ $S = \{1, 3, 4, 5\}$
$x^2 = 16$ او $x - 1 = 4$	$x^2 \neq 16$ و $x - 1 \neq 4$	$x \neq \pm 4$ $x \neq 4 + 1 \Rightarrow x \neq 5$ $S = \{1, 2, 3\}$

س 4

إذا علمت أن x ، y عناصر في المجموعة {0 , 1, 2 , 3 , ... , 9} فاكتب مجموعة الحل لكل من الجمل المفتوحة الآتية على شكل أزواج مرتبة

أ) $x - y = 3$

$S = \{(3,0), (4,1), (5,2), (6,3), (7,4), (8,5), (9,6)\}$

ب) $x + y = 15$

$S = \{(8,7), (7,8), (9,6), (6,9)\}$

العبارات المسورة

العبارات المسورة كلياً

إذا أردنا أن نذكر أن كل عنصر من مجموعة A يجعل F(X) عبارة صائبة

فإننا نقول : « مهما كان a من A فإن F(a) عبارة صائبة»

(يقرأ لكل) ∀

ويكتب هذا القول بشكل رمزي مختزل على النحو الآتي:

$\forall\, a \in A$ فأن F(a) عبارة صائبة.

يسمى الرمز ∀ سوراً كلياً (دلالة الشمول) أو المسور الكلي وتسمى العبارة $\forall\, a \in A$ فأن $F(a)$ عبارة مسورة كليا

مثلا $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ صائبة لكل عدد طبيعي يوضع مكان X ويمكن كتابتها كما يأتي:

$\forall\, x \in N$ فأن $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

العبارات المسورة جزئياً

إذا أردنا أن نذكر أن بعض عناصر مجموعة A تجعل G(x) عبارة صائبة فإننا نقول:

« يوجد في الاقل عنصر من A يجعل G(x) عبارة صائبة»

(يقرأ يوجد) ∃

ونكتب هذا الكلام بشكل رمزي كالآتي:

$\forall\, b \in A$ بحيث G(b) عبارة صائبة (دلالة الوجود)

يسمى الرمز ∃ سوراً جزئياً وتسمى العبارة $\exists\, b \in A$, G(b) عبارة مسورة جزئياً فإذا أردنا

مثلاً أن نقول أن للمعادلة X+1=2 حلّاً في مجموعة الأعداد الصحيحة Z كتبنا:

$\exists\, x \in z$ بحيث $x + 1 = 2$

ونذكر ما تقدم بقولنا:

>> يوجد في الاقل عنصر X ∈ Z بحيث تكون المعادلة X+1=2 محققة << .

نفي العبارات المسورة:

عندما نريد نفي العبارات المسورة ننتبه الى الآتي:

«إن كل عبارة يجب أن تتصف بواحدة وواحدة فقط من الصفتين: صائبة أو خاطئة».

- فلو أردنا مثلاً نفي العبارة:

«مهما يكن الوتر المرسوم في دائرة فإن العمود النازل عليه من مركز هذه الدائرة ينصفه»

فاننا نقول:

«يوجد في الاقل وتر واحد مرسوماً في هذه الدائرة بحيث أن العمود النازل عليه من مركزها لا ينصفه».

-وإذا اردنا إثبات خطأ القول:

«كل عدد طبيعي يقبل القسمة على 2 يقبل القسمة على6» فإنه يكفي أن نبرهن صواب القول:

«يوجد في الاقل عدد طبيعي واحد يقبل القسمة على 2 ولا يقبل القسمة على6».

- وإذا أردنا نفي القول:

«يوجد في الاقل مثلث قائم واحد لا يحقق مبرهنة فيثاغورس».

قلنا« مهما يكن المثلث القائم فإنه يحقق مبرهنة فيثاغورس».

ينتج من الأمثلة التي قدمناها أن:

$\sim[\,P(x)$ فأن $\forall\, x \in X\,] \equiv \sim P(x)$ فأن $\exists\, x \in X$

$\sim[\,P(x)$ فأن $\exists\, x \in X\,] \equiv \sim P(x)$ فأن $\forall\, x \in X$

مثال إنفِ كلاً مما يأتي:

1) $\forall x$ فأن $P(x)$ حيث أن : $P(X)$: إذا كان X عدداً طبيعياً فإن $x > 0$

الحل :-

$\sim[P(x)$ فأن $\forall x] \equiv \sim P(x)$ فأن $\exists\, x$

$\exists\, x : \sim P(x)$ عدد طبيعي حيث $x \leq 0$

وبالكلام : يوجد عدد طبيعي أصغر أو يساوي صفراً.

2) $\exists\, x$ فأن $P(x)$ حيث أن: $P(x)$: x عدد زوجي موجب

الحل: -

$\sim[P(x)$ فأن $\exists x] \equiv \sim P(x)$ فأن $\forall\, x$

$\forall\, x : \sim P(x)$ عدداً زوجياً فإن X غير موجب (وبالكلام) :مهما يكن X عدداً زوجياً فإن Xغير موجب.

3) $P \vee \; [\exists\, x \in R : x+3 \geq 5]$

الحل :-

$\sim P \wedge \quad (x+3 < 5 : \forall\, x \in R)$

التحصيل الحاصل

اذا كان لدينا العبارة المنطقية P وكانت جميع الاحتمالات المنطقية لهذه العبارة صائبة فانP تسمى تحصيلاً حاصلاً .

مثال لتكن P عبارة هل P~ PV تشكل تحصيلاً حاصلاً ؟

الحل :-

P	~ P	P ⋁ ~ P
T	F	T
F	T	T

∴ تشكل تحصيلاً حاصلاً .

ملاحظة: اذا كان جميع قيم الصواب خاطئة تدعى تناقض (Contradiction) .

تمرينات (3 -1)

س 1 إنف كل عبارة من العبارات الآتية من دون إستعمال ليس صحيحاً بدلها :

أ) جميع المثلثات المتشابهة متساوية الساقين .

النفي :- بعض المثلثات المتشابهة غير متساوية الساقين

ب) بعض المثلثات المتشابهة غير متطابقة.

النفي :- جميع المثلثات المتشابهة متطابقة.

ج) إذا كان المثلث قائم الزاوية فإنه يكون متساوي الساقين.

النفي :-

د) بعض المعادلات ليس لها حل.

النفي :- جميع المعادلات لها حل.

هـ) كل شكل رباعي مستطيل.

النفي :- بعض الاشكال الرباعية غير مستطيلة

و) $Q: \forall x \in N : x^2 = 25$

النفي :- $\sim Q: \exists x \in N : x^2 \neq 25$

ح) $P \wedge (\forall x \in R: x < 8)$

النفي :- $\sim P \vee (\exists x \in R : x \geq 8)$

س 2 بين صواب أو خطأ كل من العبارات الآتية:

أ) $\forall x$ ، فأن P(X) حيث ان :

P(X) : إذا كان X عدداً طبيعياً فإن $x^2 = x$

العبارة خاطئة

ب) $\exists x$ فأن P(X) حيث أن :

P(X) : X عدداً طبيعي ، $x^2 = x$

العبارة صائبة

ج) $\forall x$ ، فأن P(X) حيث ان :

P(X) : إذا كان X عدداً سالباً فإن X^2 عدد موجب

العبارة صائبة

د) Q , P عبارتان منطقيتان : Q ⟵ P ∧ Q تحصيلاً حاصلاً

الحل :- العبارة صائبة . يمكن توضيح ذلك من خلال الجدول

Q	P	(Q ∧ P)	(Q ∧ P) ⟶ Q
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

هـ) P عبارة : P ∧ ~P تناقض

الحل :- العبارة صائبة . يمكن توضيح ذلك من خلال الجدول

P	~P	~P ∧ P
T	F	F
F	T	F

و) P , Q عبارتان منطقيتان : (P ⟷ Q) ⟷ (P ⟷ Q) تحصيلاً حاصلاً

الحل :- العبارة صائبة . يمكن توضيح ذلك من خلال الجدول

P	Q	(P ⟷ Q)	(P⟷Q)⟷(P⟷Q)
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	T	T

الفصل الثاني : المعادلات والمتباينات

القيمة المطلقة

تُعرف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي X والتي نرمز لها بالرمز | X | كما يأتي:

$$|x| = \begin{cases} X & \forall X > 0 \\ 0 & X = 0 \\ -X & \forall X < 0 \end{cases}$$

1 - القيمة المطلقة للعدد الثابت

في حالة العدد تحت المطلق موجب يبقى موجب

EX\ $|3| = 3$, $|5| = 5$, $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $\left|\frac{1}{5}\right| = \frac{1}{5}$

في حالة العدد سالب تحت المطلق يكون خارج المطلق موجب

EX\ $|-7| = 7$, $|-12| = 12$, $|-4| = 4$, $\left|-\frac{1}{5}\right| = \frac{1}{5}$

مثال عبر باستخدام تعريف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي $|3-\sqrt{10}|$ حيث $x \in R$

ملاحظة للحل :- هكذا نوع من الاسئلة نقوم بتربيع العددين(لتسهيل المقارنة) ثم نقارن ايهما اكبر ثم نطرح الكبير من الصغير

يصبح العدد $\sqrt{10}$ بعد التربيع 10 ويصبح العدد 3 بعد التربيع 9 بما ان 10 اكبر من 9 فان

الحل :-

$$|3-\sqrt{10}| = \sqrt{10} - 3$$

2 - القيمة المطلقة للمتغيرات

مثال عبر باستخدام تعريف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي $|x-3|$ حيث $x \in R$

الحل :-

$$|x-3| = \begin{cases} +(x-3) = x-3 & , \forall x \geq 3 \\ -(x-3) = -x+3 & , \forall x < 3 \end{cases}$$

نأخذ المقدار داخل المطلق ونساوي الى الصفر

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

3 - رسم دالة المطلق

مثال :- ارسم $Y = |x|$

الحل :-

$$Y = |x| = \begin{cases} x & , \forall x \geq 0 \\ -x & , \forall x < 0 \end{cases}$$

1- نفتح المطلق

2- نأخذ المستقيم $, \forall x \geq 0$ Y = x ونعمل الجدول

X	Y	(X , Y)
0	0	(0, 0)
1	1	(1 , 1)
2	2	(2 , 2)

نحصل على اول قيمة من مساواة داخل المطلق الى الصفر x=0

نأخذ قيم حسب شرط المستقيم $x \geq 0$

نحصل على قيم y من خلال تعويض قيم x في المعادلة *y=x*

توضيح كيف تم استخراج قيم y

X=0 ⇨ y = 0

x = 1 ⇨ y = 2

x = 3 ⇨ y = 3

3- نأخذ المستقيم $\forall x < 0$, *y= -x* ونعمل الجدول

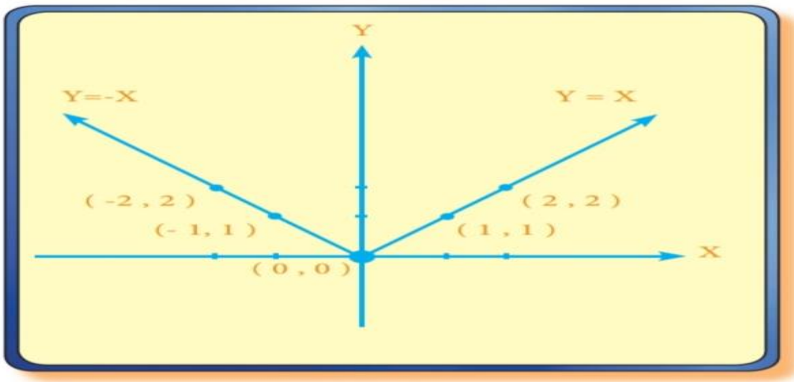
X	Y	(X , Y)
0	0	(0 , 0) فجوة
-1	1	(-1 , 1)
-2	2	(-2 , 2)

نفس الطريقة اعلاه

لاحظ هنا الشرط $x < 0$

لاحظ هنا نحصل على y عندما نعوض قيم x في y =-x

4 - نرسم



Y=| X |

التوضيحات للفهم فقط غير مطلوبة في الحل

مثال ارسم الدالة Y = |x-1|+3

الحل :-

$$Y = \begin{cases} +(x-1)+3 = x-1+3 & , \quad \forall x \geq 1 \\ -(x-1)+3 = -x+1+3 & , \quad \forall x < 1 \end{cases}$$

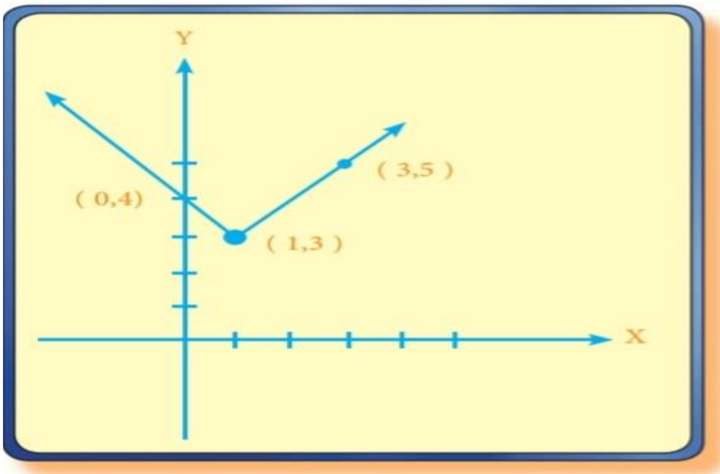
$$Y = \begin{cases} x+2 & , \quad \forall x \geq 1 \\ -x+4 & , \quad \forall x < 1 \end{cases}$$

المستقيم $Y = x + 2 \quad , \quad \forall x \geq 1$

X	Y	(Y , X)
1	3	(1 , 3)
3	5	(3 , 5)

$Y = -x + 4 \quad , \quad \forall x < 1$

X	Y	(X, Y)
1	3	(1 , 3) فجوة
0	4	(0 , 4)



Y=| X - 1 |+3

مثال ارسم الدالة $Y=|x+3|-2$ من اسئلة التلفزيون التربوي

الحل :-

$$Y=\begin{cases} +(x+3)-2=x+3-2 & ,\forall x\geq -3 \\ -(x+3)-2=-x-3-2 & ,\forall x< -3 \end{cases}$$

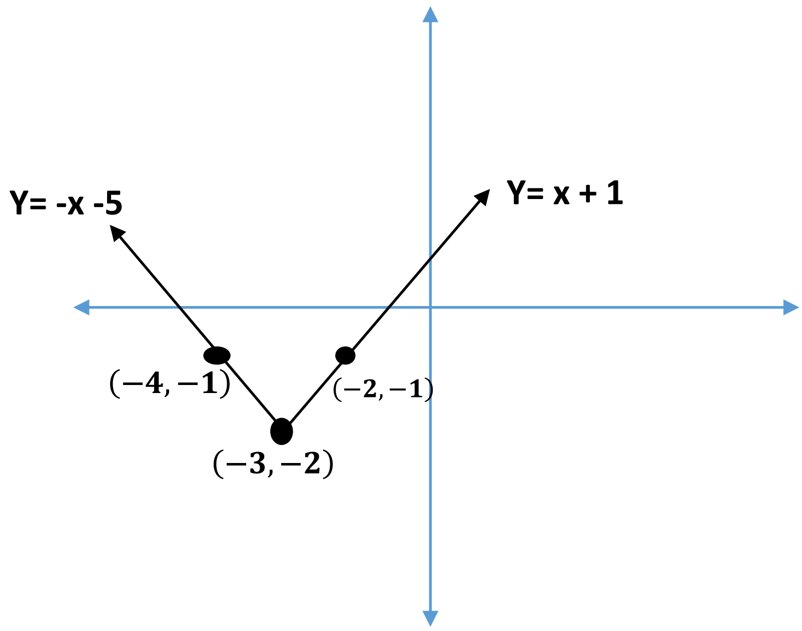
$$Y=\begin{cases} x+1 & ,\quad \forall x\geq -3 \\ -x-5 & ,\quad \forall x< -3 \end{cases}$$

المستقيم $Y=x+1 \quad ,\forall x\geq -3$

x	y	(x,y)
-3	-2	(-3,-2)
-2	-1	(-2,-1)

المستقيم $Y=-x-5 \quad ,\forall x< -3$

x	y	(x,y)
-3	-2	(-3,-2)
-4	-1	(-4,-1)



حل المعادلات التي تحتوي على مطلق

١- نفتح المطلق حسب التعريف لتصبح لدينا معادلتين

٢- نجد مجموعة حل المعادلة الاولى ونسميها S_1

٣- نجد مجموعة حل المعادلة الثانية ونسميها S_2

٤- نجد مجموعة الحل النهائية $S = S_1 \cup S_2$

مثال جد مجموعة الحل للمعادلة $|3X + 6| = 9$ حيث $x \in R$

الحل :-

1- نفتح المطلق

$$|3X+6| = \begin{cases} +(3x+6) = 3x+6 & ,\forall x \geq -2 \\ -(3x+6) = -3x-6 & ,\forall x < -2 \end{cases}$$

2- حل المعادلة الاولى $,\forall x \geq -2$ $3x + 6 = 9$

$3x + 6 = 9 \Rightarrow 3x = 9 - 6 \Rightarrow 3x = 3$ نقسم على 3 $\frac{3x}{3} = \frac{3}{3} \Rightarrow x = 1$, $S_1 = \{1\}$

3- حل المعادلة الثانية $,\forall x < -2$ $-3x - 6 = 9$

$-3x - 6 = 9 \Rightarrow -3x = 9 + 6 \Rightarrow -3x = 15$ نقسم على -3 $\frac{-3x}{-3} = \frac{15}{-3} \Rightarrow x = -5,$ $S_2 = \{-5\}$

4 -مجموعة الحل النهائية

$$S = S_1 \cup S_2 = \{1\} \cup \{-5\} = \{1, -5\}$$

عزيزي الطالب: - يجب التأكد عند استخراج مجموعة الحل انها تنتمي الى مجموعة التعويض

مثلا في المعادلة الاولى $X=1$ تحقق الشرط $X \geq -2$ والمعادلة الثانية $X = -5$ تحقق الشرط $X < -2$

مثال جد مجموعة حل المعادلة $x^2\,|x| - 8 = 0$, حيث $x \in R$

الحل :-

$$|x| = \begin{cases} x & ,\forall\, x \geq 0 \\ -x & ,\forall x < 0 \end{cases}$$

حل المعادلة $,\forall\, x \geq 0$ $x^2(x) - 8 = 0$

$x^2(x) - 8 = 0 \Rightarrow x^3 = 8$ نجذر الطرفين $\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{8} \Rightarrow x = 2$, $S_1 = \{2\}$

حل المعادلة $,\forall\, x \geq 0$ $x^2(-x) - 8 = 0$

$x^2(-x) - 8 = 0 \Rightarrow -x^3 = 8$ ضربنا ب -1 $x^3 = -8$ نجذر الطرفين $\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{-8} \Rightarrow x = -2$, $S_2 = \{-2\}$

مجموعة الحل $S = S_1 \cup S_2 = \{2,-2\}$

مثال جد مجموعة حل المعادلة $x^2 + |x| - 12 = 0$, $\forall x \in R$

الحل :-

$$|x| = \begin{cases} x & ,\forall\, x \geq 0 \\ -x & ,\forall x < 0 \end{cases}$$

حل المعادلة الاولى $x^2 + x - 12 = 0 \quad , x \geq 0$

$x^2 + x - 12 = 0$ نحلل بطريقة التجربة $(x + 4)(x - 3) = 0$

إما $x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$ تهمل لان قيمة x يجب ان تكون $x \geq 0$

أو $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$, $S_1 = \{3\}$

حل المعادلة الثانية $x^2 - x - 12 = 0 \quad , x < 0$

$x^2 - x - 12 = 0$ نحلل بطريقة التجربة $(x - 4)(x + 3) = 0$

إما $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$ تهمل لان قيمة x يجب ان تكون $x < 0$

أو $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$, $S_1 = \{-3\}$

مجموعة الحل $S = S_1 \cup S_2 = \{3,-3\}$

من اسئلة التلفزيون التربوي

مثال جد مجموعة حل المعادلة الاتية وتحقق من الحل $x^2|x| - 27 = 0$

$$|x| = \begin{cases} x & ,\forall\, x \geq 0 \\ -x & ,\forall x < 0 \end{cases}$$

حل المعادلة $x^2(x) - 27 = 0 \quad ,\forall\, x \geq 0$

$x^2(x) - 27 = 0 \Rightarrow x^3 - 27 = 0 \Rightarrow x^3 = 27$ نجذر الطرفين

$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{27} \Rightarrow x = 3 \quad , S_1 = \{3\}$

$x^2(-x) - 27 = 0 \Rightarrow -x^3 - 27 = 0 \Rightarrow -x^3 = 27$

$x^3 = -27$ نجذر الطرفين $\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{-27} \Rightarrow x = -3 \quad , S_2 = \{-3\}$

$S = S_1 \cup S_2 = \{3\} \cup \{-3\} = \{3,-3\}$

التحقق من الحل:- نعوض مجموعة الحل في المعادلة الأصلية

$(3)^2|3| - 27 = 0 \Rightarrow 9 \times 3 - 27 = 0 \Rightarrow 27 - 27 = 0 \Rightarrow 0 = 0$

$(-3)^2|-3| - 27 = 0 \Rightarrow 9 \times 3 - 27 = 0 \Rightarrow 27 - 27 = 0 \Rightarrow 0 = 0$

عزيزي الطالب: - إذا طلب في السؤال التحقق من الحل نعوض مجموعة الحل في المعادلة الأصلية ويجب ان الطرف الايمن = الطرف الايسر

حل معادلتين آنيتين بمتغيرين

المعادلة

من الدرجة الأولى

اعلى اس للمتغير هو 1

مثلا X-2Y=0

من الدرجة الثانية

اعلى اس للمتغير هو 2

مثلا $X^2 + Y^2 = 13$

اذا كانت المعادلتين من نفس الدرجة (الاولى او الثانيه) فتحل بطريقتي الحذف والتعويض (اختياري)

إذا كانت المعادلتين أحدهما من الدرجة الاولى والاخرى من الدرجة الثانية فتحل بطريقة التعويض

مثال إذا كانت R هي مجموعة التعويض لكل من Y ، X فجد مجموعة الحل بطريقتين : تحليلياً و بيانياً

X - 2Y = 5 . . . . . (1)

2X + Y = 0 . . . . . (2)

الحل :-

تحليلياً : بضرب طرفي المعادلة (2) بالعدد 2 :

X - $\cancel{2Y}$ = 5 . . . . . (1)

4X + $\cancel{2Y}$ = 0 . . . . . (2) بالجمع

5X=5 ⇒ X = 1

نعوض قيمة X في معادلة (2)

$2(1) + Y = 0 \qquad 2 + Y = 0$

Y= -2

S = {1,-2}

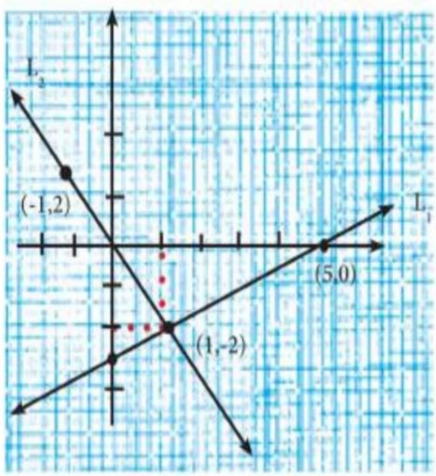
بيانياً

بيانياً : المستقيم L_1 : X - 2Y = 5

X	Y	(X , Y)
0	-5/2	(0 , -5/2)
1	-2	(1 , -2)
5	0	(5 , 0)

المستقيم L_2 : 2X + Y = 0

X	Y	X, Y
0	0	(0,0)
1	-2	(1 ,-2)
-1	2	(-1 ,2)



مثال اذا كانت مجموعة التعويض R لكل من x ,y فجد مجموعة الحل

$X - Y = 1$

$X^2 + Y^2 = 13$

حسب الملاحظة هذه النظام يحل بطريقة التعويض حيث نجد x بدلالة y او بالعكس حسب المعادلة فيكون

$X - Y = 1 \Rightarrow X = 1 + Y$ وجدنا x بدلالة y

نعوض قيمة x في المعادلة الثانية فيكون

قاعدة فتح هكذا قوس $(a+b)^2$
مربع الأول + 2 الاول × الثاني + مربع الثاني

$(1+y)^2 + y^2 = 13 \Rightarrow 1 + 2y + y^2 + y^2 = 13$

$2y^2 + 2y + 1 - 13 = 0$ نرتب المعادلة $2y^2 + 2y - 12 = 0$ نقسم المعادلة على 2

$y^2 + y - 6 = 0$ نحل بطريقة التجربة $(y+3)(y-2) = 0$

أما $y + 3 = 0 \Rightarrow y = -3 , \Rightarrow x = 1 + (-3) \Rightarrow x = -2 \Rightarrow (-2, -3)$

أو $y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 1 + 2 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow (3, 2)$

$S = \{(-2, -3), (3, 2)\}$

مثال حل المثال الآتي اذا كانت مجموعة التعويض R لكل من x,y بطريقة الحذف

$2x^2 - 3y^2 = -46 \ , x^2 + y^2 = 17$

الحل :-

$x^2 + y^2 = 17 \cdots\cdots\cdots 1$

$2x^2 - 3y^2 = -46 \cdots\cdots\cdots 2$

بضرب المعادلة الاولى في 3

$3x^2 + 3y^2 = 51$

$2x^2 - 3y^2 = -46$

بالجمع

$5x^2 = 5$ بالقسمة على 5 $x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1$ نعوض قيمة X في معادلة

أما $x = 1$

$(1)^2 + y^2 = 17 \Rightarrow y^2 = 17 - 1 \Rightarrow y^2 = 16$ بالجذر $y = \mp 4 \Rightarrow (1,4)(1,-4)$

أو $x = -1$

$(-1)^2 + y^2 = 17 \Rightarrow y^2 = 17 - 1 \Rightarrow y^2 = 16$ بالجذر $y = \mp 4 \Rightarrow (-1,4)(-1,-4)$

$S = \{(1,4)(1,-4), (1,4)(1,-4)\}$

هل يمكن حل النظام في طريقة أخرى؟

الفترات

ليكن $a < b$, $a ,b \in R$

١-نسمي المجموعة $\{x: x \in R, a \le x \le b\}$ بالفترة المغلقة closed Interval ونرمز لها [a,b]

من a الى b وتمثل على خط الاعداد

2- نسمي المجموعة $\{x: x \in R, a < x < b\}$ بالفترة المفتوحة open Interval ونرمز لها (a,b)

من a الى b وتمثل على خط الاعداد

3- نسمي المجموعة $\{x: x \in R, a < x \le b\}$ بالفترة النصف مفتوحة او النصف مغلقة ونرمز لها (a,b]

من a الى b وتمثل على خط الاعداد

4- نسمي المجموعة $\{x: x \in R, a \le x < b\}$ بالفترة النصف مفتوحة او النصف مغلقة ونرمز لها [a,b)

من a الى b وتمثل على خط الاعداد

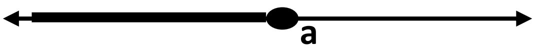
5- مجموعة الاعداد الحقيقية التي تزيد على العدد الحقيقي a او تساوي

$\{x: x \in R , x \ge a\}$ وتمثل

كما ان المجموعة $\{x: x \in R , x > a\}$ وتمثل

6- مجموعة الاعداد الحقيقية التي تساوي العدد الحقيقي a او تصغره هي

$\{x: x \in R , x \le a\}$ وتمثل



$\{x: x \in R , x < a\}$ وتمثل

ملاحظات

حول اسئلة الفترات

١- الاتحاد بين الفترات نأخذ جميع العناصر $X \cup Y$

٢- التقاطع بين الفترات نأخذ العناصر المشتركة فقط $X \cap Y$

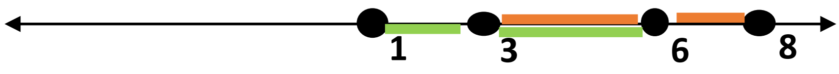
٣- الطرح بين فترتين هو نأخذ عناصر الفترة X بعد استبعاد عناصر الفترة Y منها $X - Y$

٤- الطرح بين فترتين هو نأخذ عناصر الفترة Y بعد استبعاد عناصر الفترة X منها $Y - X$

مثال لتكن X=[1,6] , Y=[3,8] مثل على خط الاعداد

$1)\ X \cap Y \qquad 2)\ X \cup Y \qquad 3)\ X - Y \qquad 4)\ Y - X$

الحل :-



$1)\ X \cap Y = [3,6]$

$2)\ X \cup Y = [1,8]$

$3)\ X - Y = [1,3)$

$4)\ Y - X = (6,8]$

مثال مثل ١- $\{x: x \geq -3\} \cup (-5,2]$ على خط الاعداد

٢- $\{x: x \geq -3\} \cap (-5,2]$ على خط الاعداد

الحل :-

1- $\{x: x \geq -3\} \cup (-5,2] = \{x: x > -5\}$

2- $\{x: x \geq -3\} \cap (-5,2] = [-3,2]$

س اذا كانت A= [-3,2) , B= (-1,3] جد

$1)\ A \cup B \quad 2)\ A \cap B \quad 3)\ A - B \quad 4)\ B - A$

من اسئلة التلفزيون التربوي

عزيزي الطالب
أسئلة الواجبات
هي أسئلة مشابهه
لأسئلة محلولة

عزيزي الطالب
ارسل حل الواجب
على التليكرام للتأكد من صحة الحل
gl_gtt

حل المتباينه (المتراجحة) من الدرجة الاولى في متغير واحد

إن المتباينة التي تحوي متغير (X) والتي تكتب بالشكل : $g(X) < f(x)$ حيث $g(X)$, $f(X)$ جملتان مفتوحان تسمى متباينة Inequality في متغير واحد (X) .

نقول عن المتباينة $f(X) < g(X)$ متباينة مكافئة للمتباينة $h(X) < I(X)$ إذا كان لهما مجموعة الحل نفسها.

مثال جد مجموعة الحل للمتباينة $3x + 1 < x + 5$ اذا كانت مجموعة التعويض هي R وضح المجموعة على خط الاعداد

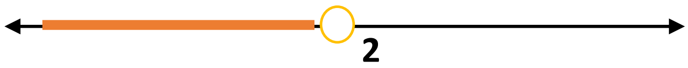
الحل :-

$3x + 1 - x < x + 5 - x$ ضفنا X – للطرفين

$2x + 1 < 5 \Rightarrow 2x + 1 - 1 < 5 - 1$ ضفنا 1 – للطرفين

$2x < 4$ نقسم الطرفين على 2 $x < 2$

$S = \{x : x \in R, x < 2\}$ مجموعة الحل



أنّ مجموعة حل النظام المكون من المتباينتين والرابط و هي:
$$S = S_1 \cap S_2$$

مثال إذا كانت مجموعة التعويض هي (R) جد مجموعة الحل للنظام : $5x + 11 < 1$ و $2x + 3 < 6$
مثّل إجابتك على خط الأعداد.

الحل :-

حل المتباينة الاولى

$5x + 11 < 1 \Rightarrow 5x + 11 - 11 < 1 - 11$ ضفنا 11- للطرفين

$5x < -10$ نقسم على 5 $x < -2$, $S_1 = \{x : x < -2\}$

حل المتباينة الثانية

$2x + 3 < 6 \Rightarrow 2x + 3 - 3 < 6 - 3$ ضفنا 3- للطرفين

$2x < 3$ نقسم الطرفين على 2 $x < \frac{3}{2}$, $S_2 = \left\{x : x < \frac{3}{2}\right\}$

$S = S_1 \cap S_2 = \{x : x < -2\} \cap \left\{x : x < \frac{3}{2}\right\}$ حسب الملاحظة

$S = \{X : < -2$ و $\frac{3}{2} > X\}$

$S_1 \cap S_1 = S_1 = \{x : x < -2, x \in R\}$

مثال إذا كانت مجموعة التعويض هي (R) جد مجموعة الحل للنظام $5x + 11 < 1$: او $2x + 3 < 6$

مثّل إجابتك على خط الأعداد.

الحل :-

حل المتباينة الاولى

$5x + 11 < 1 \Longrightarrow 5x + 11 - 11 < 1 - 11$ ضفنا -11 للطرفين

$5x < -10$ نقسم على 5 $x < -2 \quad , S_1 = \{x : x < -2\}$

حل المتباينة الثانية

$2x + 3 < 6 \Longrightarrow 2x + 3 - 3 < 6 - 3$ ضفنا -3 للطرفين

$2x < 3$ نقسم الطرفين على 2 $x < \frac{3}{2} \quad , \quad S_2 = \left\{x : x < \frac{3}{2}\right\}$

أنّ مجموعة حل النظام المكون من المتباينتين والرابط او هي:
$S = S_1 \cup S_2$

$S = S_1 \cup S_2 = \{x : x < -2\} \cup \left\{x : x < \frac{3}{2}\right\}$

$S = \{x : x < -2$ او $\frac{3}{2} > X\}$

$S = \left\{x : x < \frac{3}{2}, x \in R\right\}$

مثال اذا كان R هو مجموعة التعويض جد مجموعة الحل للمتباينة $|x - 2| > 5$

الحل :-

$$|x - 2| = \begin{cases} +(x - 2) = x - 2 & \forall x \geq 2 \\ \text{أو} & \\ -(x - 2) = -x + 2 & \forall x < 2 \end{cases}$$

$|x - 2| > 5 \leftrightarrow x - 2 > 5$ أو $-x + 2 > 5$

حل المتباينة الاولى

$x - 2 > 5$ نضيف +2 للطرفين $x - 2 + 2 > 5 + 2 \Longrightarrow x > 7$

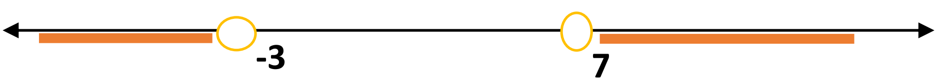
$S_1 = \{x : x \in R, x > 7\}$

حل المتباينة الثانية

$-x + 2 > 5$ نضيف -2 للطرفين $x + 2 - 2 > 5 - 2 \Longrightarrow -x > 3 \Longrightarrow x < -3$

$S_2 = \{x : x \in R, x < -3\}$

$S = S_1 \cup S_2 = \{x : x \in R, x > 7\} \cup \{x : x \in R, x < -3\}$



مثال حل المتباينة $|x+1| \le 2$ حيث $x \in R$

الحل :-

نضيف 1- للطرفين

$$|x+1| \le 2 \Rightarrow -2 \le x+1 \le 2$$

$$-2-1 \le x+1-1 \le 2-1 \Rightarrow -3 \le x \le 1 \quad , S=[-3,1]$$

حل متباينة من الدرجة الثانية في متغير واحد

اذا كان a عدداً حقيقاً موجباً فان
١- مجموعة حل المتباينة $x^2 \le a^2$ هي الفترة [−a,a]
٢- مجموعة حل المتباينة $x^2 < a^2$ هي الفترة (-a,a)
٣- مجموعة حل المتباينة $x^2 \ge a^2$ هي الفترة R\ (-a,a)
٤- مجموعة حل المتباينة $x^2 > a^2$ هي الفترة R\ [-a,a]

مثال

اذا كان $x^2 < 9$ فان مجموعة حل المتباينة هي S= (-3,3)

واذا كان $x^2 \le 9$ فان مجموعة حل المتباينة هي S= [-3,3]

أما مجموعة حل المتباينة $x^2 > 9$ هي S= R\[-3,3]

ومجموعة حل المتباينة $x^2 \ge 9$ هي S= R\ (-3,3)

مثال جد مجموعة حلول المتباينة $7 > |2x+5| \ge 5$

الحل :-

$$|2x+5| = \begin{cases} +(2x+5) = 2x+5 & \forall x \ge -\frac{5}{2} \\ -(2x+5) = -2x-5 & \forall x < -\frac{5}{2} \end{cases}$$

ان المتباينة $7 > |2x+5| \ge 5$ تكافئ النظام :

$[7 > 2x+5 \ge 5]$ او $[7 > -2x-5 \ge 5]$

$[\,2 > 2x \ge 0]$ او $[12 > -2x \ge 10]$

$[1 > x \ge 0]$ او $[-6 < x \le -5]$

$S = (-6,-5) \cup [0,1)$

س جد مجموعة حلول المتباينات الأتية

من اسئلة التلفزيون التربوي

1) $4x^2 \leq 16$

$4x^2 \leq 16$ نقسم الطرفين على 4 $x^2 \leq 4$ ⟹ $S = [-2, 2]$

2) $3y^2 < 27$

$3y^2 < 27$ نقسم الطرفين على 3 $y^2 < 9$ ⟹ $S = (-3, 3)$

3) $2x^2 - 2 > 6$

$2x^2 - 2 > 6$ نضيف 2+ للطرفين $2x^2 - 2 + 2 > 6 + 2$

$2x^2 > 8$ نقسم على 2 $x^2 > 4$ ⟹ $S = R \setminus [-2, 2]$

4) $3x^2 - 2 \geq 10$ واجب

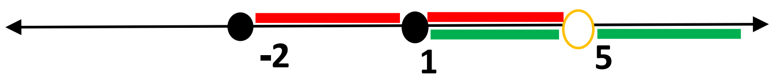
عزيزي الطالب أسئلة الواجبات هي أسئلة مشابهه لأسئلة محلولة

تمرينات (4 -2)

س 1 اذا كان $A = [-2, 5)$, $B = \{X : X \geq 1\}$

جد $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$

الحل :-



$A \cup B = \{x : x \in R , x \geq -2\}$

$A \cap B = [1, 5)$

$A - B = [-2, 1)$

$B - A = \{x : x \in R , x \geq 5\}$

عزيزي الطالب
أسئلة الواجبات هي أسئلة مشابهه لأسئلة محلولة

س 2 أ) ارسم الدالة $Y = |x + 2| - 5$ واجب

يشبه
مثال ص 22
ومثال ص 23

عزيزي الطالب
ارسل حل الواجب
على التليكرام للتأكد من صحة الحل
gl_gtt

س 2\ ب) $y = 3 - |x + 1|$

الحل :-

$$y = \begin{cases} 3 - [+(x+1)] & ,\forall x \geq -1 \\ 3 - [-(x+1)] & ,\forall x < -1 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 3 - (x+1) = 3 - x - 1 & , \quad \forall x \geq -1 \\ 3 - (-x-1) = 3 + x + 1 & , \quad \forall x < -1 \end{cases}$$

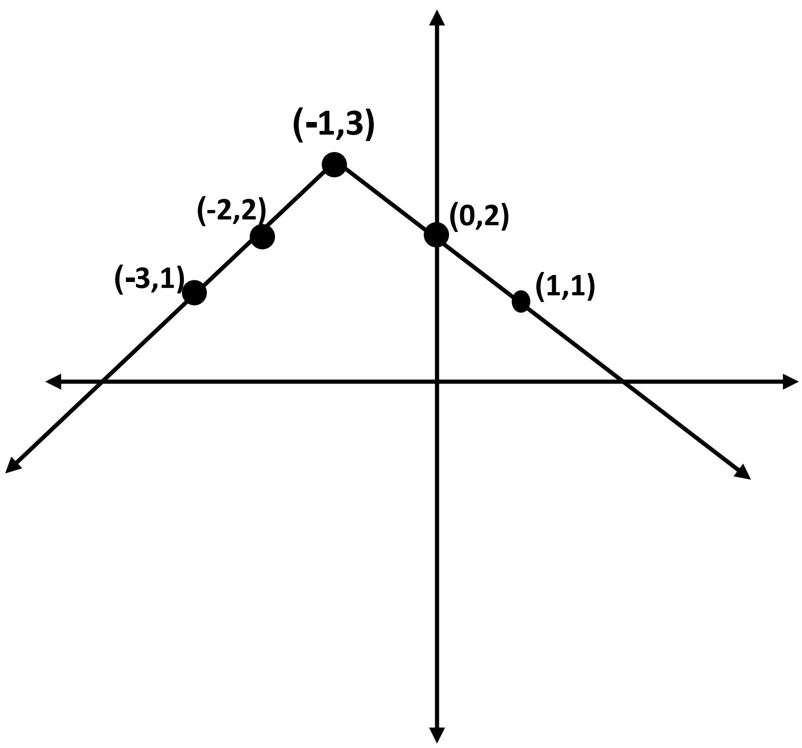
$$y = \begin{cases} -x + 2 & ,\forall x \geq -1 \\ x + 4 & ,\forall x < -1 \end{cases}$$

المستقيم $,\forall x \geq -1$ $\quad y = -x + 2$

x	y	(x , y)
-1	3	(-1,3)
0	+2	(0,2)
1	1	(1,1)

المستقيم $,\forall x < -1$ $\quad y = x + 4$

x	y	(x ,y)
-1	3	(-1,3)
-2	2	(-2,2)
-3	1	(-3,1)



س 3 جد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية ثم تحقق من الحل: واجب

يشبه المثال الأول ص 24

1) $|4X + 3| = 1$

2) $X\,|X| + 4 = 0$ واجب

يشبه المثال الثانى ص 24

عزيزي الطالب

أرسل حل الواجب

على التليكرام للتأكد من صحة الحل

gl_gtt

$3)\ x^2 - 2|x| - 15 = 0$

الحل :-

$$|x| = \begin{cases} x & ,\forall\, x \geq 0 \\ -x & ,\forall x\ < 0 \end{cases}$$

حل المعادلة الاولى $x^2 - 2\,x - 15 = 0 \quad , x \geq 0$

$x^2 - 2\,x - 15 = 0$ $(x - 5)(x + 3) = 0$

أما $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

أو $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$ تهمل لان قيمة x يجب ان تكون $x \geq 0$, $S_1 = \{5\}$

حل المعادلة الثانية $x^2 + 2x - 15 = 0 \quad , x < 0$

$x^2 + 2\,x - 15 = 0$ $(x + 5)(x - 3) = 0$

أما $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$

أو $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$, $S_2 = \{-5\}$

مجموعة الحل $S = S_1 \cup S_2 = \{5, -5\}$

التحقق من الحل

$x = 5 \Rightarrow (5)^2 - 2|5| - 15 \Rightarrow 25 - 10 - 15 = 0$

$x = -5 \Rightarrow (-5)^2 - 2|-5| - 15 \Rightarrow 25 - 10 - 15 = 0$

عزيزي الطالب: - إذا طلب في السؤال التحقق من الحل نعوض مجموعة الحل في المعادلة الأصلية ويجب ان

الطرف الايمن = الطرف الايسر

$4)\ |x^2+4|=29$

مجموع مربعين هو موجب

$x^2+4=29 \Rightarrow x^2=29-4$

$x^2=25$ بالجذر $x=\pm 5 \quad , S=\{-5,+5\}$

التحقق من الحل

$x=5 \Rightarrow |(5)^2+4| = |25+4| = 29$

$x=-5 \Rightarrow |(-5)^2+4| = |25+4| = 29$

$5)\ x|x+2|=3$

$$|x+2| = \begin{cases} +(x+2) = x+2 & ,\forall x \geq -2 \\ -(x+2) = -x-2 & ,\forall x < -2 \end{cases}$$

$x(x+2)=3 \quad , x \geq -2$ حل المعادلة الأولى

$x^2+2x=3 \Rightarrow x^2+2x-3=0$ نحلل بالتجربة $(x+3)(x-1)=0$

أما $x+3=0 \Rightarrow x=-3$ تهمل لان قيمة x يجب ان تكون $x \geq -2$

أو $x-1=0 \Rightarrow x=1 \ , \ S_1=\{1\}$

$x(-x-2)=3 \quad , x<-2$ حل المعادلة الثانية

$-x^2-2x-3=0$ نضرب في -1 $x^2+2x+3=0$ لا يوجد لها حل في R

S={1}

$1|1+2| = 1\times 3 = 3$ التحقق من الحل

$6)\ |2x+1|=x$

$$|2x+1| = \begin{cases} +(2x+1) = 2x+1 & ,\forall x \geq \frac{-1}{2} \\ -(2x+1) = -2x-1 & ,\forall x < \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$2x+1=x \quad , x \geq \frac{-1}{2}$

$2x+1=x \Rightarrow 2x-x+1=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$ يهمل

$-2x-1=x \quad , x<\frac{-1}{2}$

$-2x-x-1=0 \Rightarrow -3x=+1 \Rightarrow x=\frac{-1}{3}$ يهمل

س 4 جد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين:

1) $x - y = -1$, $2x + y = 4$ (بيانيا)

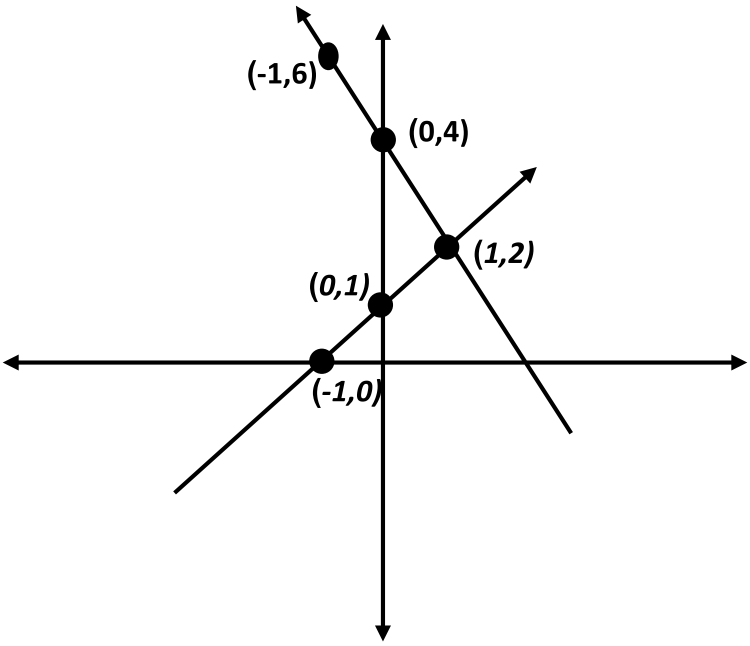
الحل :-

$x - y = -1$

x	y	(x , y)
-1	0	(-1,0)
0	1	(0,1)
1	2	(1,2)

$2x + y = 4$

x	y	(x , y)
-1	6	(-1,6)
0	4	(0,4)
1	2	(1,2)



2) $2x + 3y = 13$, $4x + 3y = 17$ (تحليليا)

الحل :- بطريقة الحذف

$4x + 3y = 17 \dots\dots\dots 1$

$2x + 3y = 13 \dots\dots\dots 2$ بالطرح

$2x = 4 \Rightarrow x = 2$

نعوض قيمة 2= x في معادلة (1)

$4(2) + 3y = 17 \Rightarrow 8 + 3y = 17 \Rightarrow 3y = 17 - 8$

$3y = 9$ نقسم على 3 $y = 3$ $, S = \{(2,3)\}$

(3 $x - y = 1 \quad , 5x^2 + 2y^2 = 53$

الحل :- بطريقة التعويض

$x - y = 1 \Rightarrow x = 1 + y$ ………… 1

قاعدة فتح هكذا قوس $(a+b)^2$
مربع الأول + 2 الاول × الثاني + مربع الثاني

من معادلة 1 نحصل على

$5(1+y)^2 + 2y^2 = 53 \Rightarrow 5(1 + 2y + y^2) + 2y^2 = 53$

$5 + 10y + 5y^2 + 2y^2 - 53 = 0$

$7y^2 + 10y - 48 = 0$ نحل بالتجربة $(7y + 24)(y - 2) = 0$

أما $7y + 24 = 0 \Rightarrow 7y = -24$ نقسم الطرفين على 7 $y = \frac{-24}{7}$ نعوض قيمة y في معادلة 1

$x = 1 - \frac{24}{7} \Rightarrow x = \frac{7-24}{7} \Rightarrow x = \frac{-17}{7} \quad , \quad S = \{(\frac{-17}{7}, \frac{-24}{7})\}$

أو $y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$ نعوض قيمة y في معادلة 1

$x = 1 + 2 \Rightarrow x = 3 \quad , S = \{(3, 2)\}$

(4 $2x^2 - y^2 = 34 \quad , 3x^2 + 2y^2 = 107$

الحل :-

$2x^2 - y^2 = 34$ … … … 1

$3x^2 + 2y^2 = 107$ … … … 2

نضرب المعادلة 1 في 2 نحصل على :

$4x^2 - 2y^2 = 68$

$3x^2 + 2y^2 = 107$ بالجمع

$7x^2 = 175$ نقسم على 7 $x^2 = 25$ بالجذر $x = \pm 5$

نعوض قيم x في معادلة 1

عندما $x = 5 \Rightarrow 2(5)^2 - y^2 = 34 \Rightarrow 2(25) - y^2 = 34$

$50 - y^2 = 34 \Rightarrow y^2 = 50 - 34 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4$

$S_1 = \{(5,4)(5,-4)\}$

عندما $x = -5 \Rightarrow 2(-5)^2 - y^2 = 34 \Rightarrow 2(25) - y^2 = 34$

$50 - y^2 = 34 \Rightarrow y^2 = 50 - 34 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4$

$S_2 = \{(-5,4)(-5,-4)\} \quad , \quad S = \{(5,4)(5,-4), (-5,4)(-5,-4)\}$

س 5 \ جد مجموعة حلول كل من المتباينات الآتية:

1) $|x-6| \le 1$

$|x-6| \le 1$ نستخدم خواص المطلق $-1 \le x-6 \le 1$ نضيف 6+

$-1+6 \le x-6+6 \le 1+6 \Rightarrow 5 \le x \le 7 \qquad , S = \{5, 7\}$

2) $2 \le |x+1| \le 4$

$2 \le x+1 \le 4$ أو $2 \le -(x+1) \le 4$

$2-1 \le x+1-1 \le 4-1$ أو $-2 \ge x+1 \ge -4$

$1 \le x \le 3$ أو $-2-1 \ge x+1-1 \ge -4-1$

$S_1 = [1, 3]$ أو $-3 \ge x \ge -5$

$S_2 = \{-5, -3\}$

$S = S_1 \cup S_2 = \{1, 3\} \cup \{-5, -3\}$

3) $-9 < 2 - |2x-3| \le -3$ واجب

4) $2x^2 \le 8$

$2x^2 \le 8$ نقسم على 2 $x^2 \le 4 \Rightarrow S = [-2, 2]$

5) $3x^2 - 27 > 0$

$3x^2 - 27 > 0 \Rightarrow 3^2 > 27$ نقسم على 3 $x^2 > 9 \Rightarrow S = R \backslash [-3, 3]$

الفصل الثالث :- الأسس والجذور

الأسس أعداد صحيحة

الأسس

إذا كان $a \in R$ ، $n \in Z$ فان

1) $a^n = a \times a \times ..... \times a$ (n مرة a مضروبة بنفسها) , EX\ $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$

2) الحالة الخاصة $a^0 = 1$, EX\ $8^0 = 1$, $1000^0 = 1$

3) $a \neq 0$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a^{-n} = (a^{-1})^n$ EX\ $6^{-1} = \frac{1}{6}$, $\frac{1}{5^{-1}} = 5$

قوانين الأسس

1) $a^n \times a^m = a^{m+n}$ عند الضرب تجمع الأسس بشرط أن تكون الأساسات متشابهة

EX\ $X^2 \times X^3 = X^{2+3} = X^5$ \ $5^3 \times 5^2 = 5^5$ \ $y \times y^{-4} = y^{1+(-4)} = y^{-3}$

2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ عند القسمة تطرح الأسس (البسط – المقام) بشرط الأساسات متشابهة

EX \ $\frac{X^5}{X^3} = X^{5-3} = X^2$, $\frac{7^4}{7^2} = 7^{4-2} = 7^2$

3) $(a^m)^n = a^{mn}$ عند الرفع تضرب الأسس (قانون الرفع)

EX \ $(X^2)^3 = X^{2\times 3} = X^6$, $(3^4)^3 = 3^{4\times 3} = 3^{12}$, $(6^2)^{-2} = 6^{2\times -2} = 6^{-4}$

ملاحظة :- نسمي الرمز a^n القوة النونية للعدد a , ونسمي العدد a أساساً والعدد n أُساً , ونقول ان a مرفوع الى الاس n .

قاعدة التوزيع :- يتوزع الأس على الضرب والقسمة

1- $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

EX \ $(3 \times 10^3)^4 = 3^4 \times 10^{12}$, $(2^5 \times 6^3)^2 = 2^{10} \times 6^6$

2- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

EX\ $\left(\frac{6}{7}\right)^4 = \frac{6^4}{7^4}$

مثال جد قيمة $\frac{8^{-3}\times 18^{2}}{81\times 16^{-2}}$

الحل :- هكذا نوع من الأسئلة نحلل الاعداد ونكتبها بصورة أسس

عزيزي الطالب :- نحلل جميع الأرقام بالسؤال بطريقة التحليل الاعتيادية الأرقام التي تحتاج تحليل هي (4,6,8,18,81,16,10,15...) وغيرها من الأرقام عند الممارسة بالحل سوف تكتشفها بنفسك

$$=\frac{(2^{3})^{-3}\times(3^{2}\times 2)^{2}}{3^{4}\times(2^{4})^{-2}}$$

استخدمنا في هذه الخطوة قانون الرفع

$$=\frac{(2^{3})^{-3}\times(3^{2}\times 2)^{2}}{3^{4}\times(2^{4})^{-2}}$$

$$=\frac{2^{-9}\times 2^{2}\times 3^{4}}{3^{4}\times 2^{-8}}$$

توضيح :- بين 2^{-9} و 2^{2} نستخدم قانون عند الضرب تجمع الأسس لان الاساسات متشابهة وبين 3^{4} و 3^{4} نستخدم قانون عند القسمة تطرح الأسس لان الاساسات متشابهة

$$=\frac{2^{-9+2}\times 3^{4-4}}{2^{-8}}=\frac{2^{-7}\times 3^{0}}{2^{-8}}$$

توضيح :- بين 2^{-7} و 2^{-8} نستخدم قانون عند القسمة تطرح الأسس لان الاساسات متشابهة اما 3^{0} حسب الحالة الخاصة تساوي 1

$$=2^{-7-(-8)}\times 1=2$$

١- أي عدد يحمل اس رقم 1 فانه يساوي العدد نفسه مثلا $5=(5)^{1}$

٢- في حالة $(-a)^{m}$ اذا كانت m فردي فالناتج $-a^{m}$ واذا كانت m زوجي فالناتج a^{m} مثلا $(-1)^{4}=1$, $(-1)^{7}=-1$

ملاحظة مهمة :- تتغير إشارة الاس اذا نقلنا العدد من البسط الى المقام او بالعكس من المقام الى البسط مثلا $5^{4}=\frac{1}{5^{-4}}$, $\frac{1}{9^{-3}}=9^{3}$, $(3)^{-1}=\frac{1}{3}$

مثال أذا كان $m , n \in Z$ فأثبت ان : $\frac{125\times15^{m-2}\times25^{m+n}}{75^{m}\times5^{2n+m}} = \frac{5}{9}$

من أسئلة التلفزيون التربوي

الحل :- نأخذ الطرف الأيسر

نحلل الاعداد القابلة للتحليل

استخدمنا قانون الرفع

استخدمنا قوانين الأسس

$$\frac{125\times15^{m-2}\times25^{m+n}}{75^{m}\times5^{2n+m}} = \frac{5^3\times(5\times3)^{m-2}\times(5^2)^{m+n}}{(3\times5^2)^{m}\times5^{2n+m}}$$

$$= \frac{5^3\times5^{m-2}\times3^{m-2}\times5^{2m+2n}}{3^{m}\times5^{2m}\times5^{2n+m}}$$

$$= 5^{3+m-2+2m+2n-2m-2n-m}\times3^{m-2-m}$$

$$= 5\times3^{-2} = 5\times\frac{1}{3^2} = \frac{5}{9}$$ الطرف الايمن

حسب الملاحظة السابقة تخلصنا من الاس السالب

الجذور Roots

إذا كان $a \in R , n \in N , n > 1$ فأن كل عدد حقيقي يحقق المعادلة :

$X^n = a$ يسمى جذراً نونياً للعدد (a) ويرمز له بالرمز $\sqrt[n]{a}$ او $a^{\frac{1}{n}}$

ملاحظات مهمة

في حل أسئلة الجذور

١- نقوم بتحليل العدد داخل الجذر

٢- نقوم بتحويل الجذر الى أسس

٣- نختصر ونبسط الحل

في الجذر التربيعي ⇐ $\sqrt{a}\times\sqrt{a} = a$ مثلا $\sqrt{5}\times\sqrt{5} = 5$

دائما التربيع يلغي الجذر التربيعي $(\sqrt{a})^2 = a$ مثلا $(\sqrt{3})^2 = 3$

مثال على الجذر التربيعي $\sqrt{16} = 4$ (للتأكيد نضرب العدد الناتج مرتين يرجع لنا العدد داخل الجذر)

تحويل الجذر الى أسس

$$\sqrt[\text{اس خارج}]{x^{\text{اس داخل}}} = x^{\frac{\text{اس داخل}}{\text{اس خارج}}}$$

EX\ $\sqrt{6^3} = 6^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$

في الجذر التكعيبي ⇐ $\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{a} = a$ مثلا $\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{5} = 5$

دائما التكعيب يلغي الجذر التكعيبي $(\sqrt[3]{a})^3 = a$ مثلا $(\sqrt[3]{4})^3 = 4$

مثال على الجذر التكعيبي $\sqrt[3]{8} = 2$ (للتأكيد نضرب العدد الناتج ثلاث مرات يرجع لنا العدد داخل الجذر

تمارين (3-1)

س ١ \ جد ناتج ما يأتي :

أ) $(9)^0 + (8)^0 = 1 + 1 = 2$ حسب الحالة الخاصة

ب) $(3)^{-1} + (2)^{-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2+3}{6} = \frac{5}{6}$ حسب ملاحظة باللون الاحمر ص43 + توحيد مقامات

ج) $16 + (16)^{-1} = 16 + \frac{1}{16} = \frac{256+1}{16} = \frac{257}{16}$ حسب ملاحظة باللون الاحمر ص43 + توحيد مقامات

د) $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt{4} = 2$ نجد قيمة الجذر الداخل $\sqrt[3]{64} = 4$ ثم نضع الناتج تحت الجذر الخارج $\sqrt{4} = 2$

هـ) $\frac{2^{-3} \times 4^{-5}}{6^{-1} \times 3^3} = \frac{2^{-3} \times (2^2)^{-5}}{(2\times3)^{-1} \times 3^3} = \frac{2^{-3} \times 2^{-10}}{2^{-1}\times3^{-1}\times3^3}$

$= \frac{2^{-3+(-10)-(-1)}}{3^{-1+3}} = \frac{2^{-12}}{3^2} = \frac{1}{2^{12} \times 9}$

١- نحلل الأرقام
٢- نستخدم قانون الرفع
٣- نطبق قوانين الأسس
٤- تخلصنا من الاس السالب

و) $\frac{10^3 \times 4^7}{10^{-5} \times 2^5} = \frac{10^3 \times (2^2)^7}{10^{-5} \times 2^5} = \frac{10^3 \times 2^{14}}{10^{-5} \times 2^5}$

$= 10^{3-(-5)} \times 2^{14-5} = 10^8 \times 2^9$

في حل أسئلة الجذور
1-نقوم بتحليل العدد داخل الجذر
2- نقوم بتحويل الجذر الى أسس
3-نختصر ونبسط الحل

ز) $(\sqrt{27})^{\frac{5}{3}} = (\sqrt{3^3})^{\frac{5}{3}} = 3^{\frac{3}{2}\times\frac{5}{3}} = 3^{\frac{5}{2}} = \sqrt{3^5}$

ح) $3a^0 = 3 \times 1 = 3 \quad , a \neq 0$ حسب الحالة الخاصة

ط) $(3a)^0 = 1 \quad , a \neq 0$ حسب الحالة الخاصة

ي) $(a+b)^0 = 1 \quad , a + b \neq 0$ حسب الحالة الخاصة

ل) $(\sqrt[5]{-32})^{-3} = (\sqrt[5]{-2^5})^{-3} = \left(-2^{\frac{5}{5}}\right)^{-3} = -2^{-3} = -\frac{1}{8}$

س٢ اكتب المقادير الاتية بأبسط صورة :

أ) $\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{20\,a^3}{45\,a}}$

الحل :-

$= \sqrt{\frac{3^2}{4^2} \times \frac{20\,a^3}{\cancel{45}\,a}}$

$= \sqrt{\frac{\cancel{9}}{16} \times \frac{\cancel{4}\,a^3}{\cancel{9}\;\;a}}$

$= \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}$

ب) $(-a)^4 \left[\frac{(-a)^3\ \sqrt[6]{729}}{3\,a}\right]^2$

الحل :-

$= a^4 \left[\frac{-a^3 \times \sqrt[6]{3^6}}{3a}\right]^2$

$= a^4 \times \frac{a^6 \cancel{\times 9}}{\cancel{9}\,a^2}$

$= a^{4+6-2} = a^8$

ج) $\sqrt{25\,b^2\,c^{-8}}$, $c \neq 0$

الحل :-

$= 5b\,c^{\frac{-8}{2}}$

$= 5bc^{-4}$

$= \frac{5b}{c^4}$

د) $\frac{3\,x^{-5} \cdot y^2}{2^{-1}\,y^{-2}}$, $x \neq 0$

الحل :-

$= 3x^{-5}\,y^{2-(-2)}$, 2

$= \frac{6\,y^4}{x^5}$

س٣ أكتب كلاً من العبارات الأتية بشكل يكون المقام فيها (1) ولا يكون تحت جذر مستخدماً الإسس

أ) $\frac{bc}{d}$, $d \neq 0$

الحل : $= \frac{bcd^{-1}}{1}$

ب) $\frac{1}{b^{-5}}$, $b \neq 0$

الحل : $= \frac{b^5}{1}$

ج) $\sqrt[5]{x}$

الحل : $= x^{\frac{1}{5}}$

د) $\frac{4b^2}{b^2 c^{-3}}$, $b \neq 0$

الحل : $= \frac{4\,\cancel{b^2}}{\cancel{b^2}\,c^{-3}} = \frac{4c^3}{1}$

هـ) $\frac{1}{b^2 + c^2}$

الحل : $= \frac{(b^2 + c^2)^{-1}}{1}$

و) $\sqrt[3]{x}\sqrt[4]{x}$, $x \geq 0$

الحل : $x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = x^{\frac{7}{12}}$

س ٤) اذا كان $a \in R$ وان m عدداً صحيحاً زوجياً فأي مما يأتي صائبة ؟

أ) $a^m > 0$ صائبة
ب) $a^m < 0$ خاطئة
ج) $a^m \geq 0$ صائبة
د) $a^m \leq 0$ خاطئة

س٥) اذا كان $a \in R$ ، a عدد سالب , وان m عدداً صحيحاً فردياً فأي مما يأتي صائبة ؟

أ) $a^m > 0$ خاطئة
ب) $a^m < 0$ صائبة
ج) $a^m \geq 0$ خاطئة
د) $a^m \leq 0$ صائبة

س ٦) برهن ان

أ) $a^{(x-y)z} \cdot a^{(z-x)y} \cdot a^{(y-z)x} = 1$

الحل : نأخذ الطرف الايسر

نفتح اقواس الاسس

$= a^{xz-yz} \cdot a^{zy-xy} \cdot a^{yx-zx}$

$= a^{xz-yz+zy-xy+yx-zx} = a^0 = 1$

عند الضرب تجمع الاسس

من أسئلة التلفزيون التربوي

ب) $\left[x^{n^2-1} \div x^{n-1}\right]^{\frac{1}{n}} = x^{n-1}$

الحل :- نأخذ الطرف الايسر

عند القسمة تطرح الاسس

$= \left[x^{n^2-1-(n-1)}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[x^{n^2-n}\right]^{\frac{1}{n}}$

$= \left[x^{n(n-1)}\right]^{\frac{1}{n}} = x^{n-1}$

سحبنا n عامل مشترك ثم اختصرنا

س 7) برهن أن : $\frac{1}{1+a^{c-b}} + \frac{1}{1+a^{b-c}} = 1$

الحل :- نأخذ الطرف الايسر

توحيد مقامات

$\frac{1}{1+\frac{a^c}{a^b}} + \frac{1}{1+\frac{a^b}{a^c}} = \frac{1}{\frac{a^b+a^c}{a^b}} + \frac{1}{\frac{a^c+a^b}{a^c}}$

$\frac{a^b}{a^b+a^c} + \frac{a^c}{a^c+a^b} = \frac{a^b+a^c}{a^b+a^c} = 1$

ملاحظة مهمة

فصل الأسس $EX:\ 3^{2n-1} = 3^{2n} \times 3^{-1}$, في حالة الجمع $X^{a+b} = X^a \times X^b$

$EX:\ a^{c-b} = \frac{a^c}{a^b}$, في حالة الطرح $X^{a-b} = \frac{X^a}{X^b}$

س 8 \ اثبت ان $\frac{11}{15} = \frac{5 \times 3^{2n} - 4 \times 3^{2n-1}}{2 \times 3^{2n+1} - 3^{2n}}$ من أسئلة التلفزيون التربوي

الحل : نأخذ الطرف الأيسر

عزيزي الطالب في هكذا نوع من الأسئلة التي تحتوي جمع + او طرح – بين الحدود غالبا يكون الحل بسحب عامل مشترك

$$\frac{5 \times 3^{2n} - 4 \times 3^{2n} \times 3^{-1}}{2 \times 3^{2n} \times 3^{1} - 3^{2n}} = \frac{3^{2n}\,(5 - 4 \times 3^{-1})}{3^{2n}\,(2 \times 3 - 1)}$$

$$= \frac{5 - \frac{4}{3}}{6-1} = \frac{\frac{15-4}{3}}{5} = \frac{\frac{11}{3}}{5} = \frac{11}{15}$$

س 9 \ أختصر كل مما يأتي الى ابسط صورة : من أسئلة التلفزيون التربوي

A\ $\frac{6^{4n-1} \times 27^{2n}}{2^{n+1} \times 8^{n-1} \times 9^{n+2}}$

$$= \frac{(2 \times 3)^{4n-1} \times (3^3)^{2n}}{2^{n+1} \times (2^3)^{n-1} \times (3^2)^{n+2}} = \frac{2^{4n-1}\, 3^{4n-1} \times 3^{6n}}{2^{n+1} \times 2^{3n-3} \times 3^{2n+4}}$$

$$= 2^{4n-1-n-1-3n+3} \times 3^{4n-1+6n-2n-4} = 2 \times 3^{8n-5}$$

B\ $\frac{3^{2+n} + 3^{n+1}}{3^n - 3^{n-1}} = \frac{3^2 \times 3^n + 3^n \times 3^1}{3^n - 3^n \times 3^{-1}}$

$$= \frac{3^n\,(3^2 + 3)}{3^n\,(1 - 3^{-1})} = \frac{9+3}{1-\frac{1}{3}} = \frac{12}{\frac{3-1}{3}} = \frac{36}{2} = 18$$

س 10 \ برهن أن $\left[\frac{9^{n+\frac{1}{4}} \times \sqrt{3 \times 3^n}}{3\sqrt{3^{-n}}}\right]^{\frac{1}{n}} = 27$

الحل :

$$= \left[\frac{(3^2)^{n+\frac{1}{4}} \times \sqrt{3^{n+1}}}{3 \times 3^{\frac{-n}{2}}}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[\frac{3^{2n+2} \times 3^{\frac{n+1}{2}}}{3 \times 3^{\frac{-n}{2}}}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[3^{2n+2+\frac{n+1}{2}-1+\frac{n}{2}}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$= \left[3^{\frac{4n+4+n+1-2+n}{2}}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[3^{\frac{6n}{3}}\right]^{\frac{1}{n}} = [3^{3n}]^{\frac{1}{n}} = 3^3 = 27$$ الطرف الايمن

حل المعادلات الاسية البسيطة

تتضمن المعادلة الاسية متغير في الاس . ولحل هذا النوع من المعادلات ندرج الملاحظات الاتية:

الملاحظة 1 :- ((اذا تساوت الاساسات فسوف تتساوي الأسس بشرط الاساس ≠ 1))

أي اذا كان $a^x = a^y \Rightarrow x = y \quad , a \neq 1$

EX : $2^x = 2^4 \Rightarrow x = 2$, EX : $5^x = 5^{-3} \Rightarrow x = -3$

EX : $3^{2x} = 3^2 \Rightarrow 2x = 2 \ , \ x = 1$

في بعض الأحيان الأساسات لا تكون متشابهة بصورة مباشره تحتاج الى تحليل (نحلل العدد الأكبر)

EX \ $2^x = 4^2 \Rightarrow 2^x = (2^2)^2 \Rightarrow 2^x = 2^4 \Rightarrow x = 4$

مثال :- حل المعادلة : $2^{x^2-2x+1} = 4^{x+3}$

الحل :-

$2^{x^2-2x+1} = (2^2)^{x+3}$ نحلل العدد الاكبر

$2^{x^2-2x+1} = 2^{2x+6}$ استخدمنا قانون الرفع

$\therefore x^2 - 2x + 1 = 2x + 6$ نطبق ملاحظه 1

$x^2 - 2x + 1 - 2x - 6 = 0$ غالبا في حل المعادلة التي تحتوي تربيع نصفر المعادلة

$x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+1) = 0$

أما $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

أو $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

مجموعة الحلول = {-1,5}

مثال :- حل المعادلة : $3^{2x+1} - 4 \times 3^{x+2} = -81$

الحل :-

$= 3^{2x} \times 3 - 4 \times 3^x \times 3^2 + 81 = 0 \qquad \div 3$

$= 3^{2x} \times 1 - 4 \times 3^x \times 3 + 27 = 0$

$= 3^{2x} - 12 \times 3^x + 27 = 0 \Rightarrow (3^x - 3)(3^x - 9) = 0$

أما $3^x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1$ نطبق ملاحظه 1

أو $3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2$ نحلل العدد الاكبر $\Rightarrow x = 2$ نطبق ملاحظه 1

مجموعة الحلول = {1,2}

مثال :- حل المعادلة في R حيث $8^{\frac{X}{2}}+8^{\frac{X}{2}+\frac{1}{3}}+8^{\frac{X}{2}+\frac{2}{3}}=14$

الحل :-

$$8^{\frac{X}{2}}+8^{\frac{x}{2}}\times 8^{\frac{1}{3}}+8^{\frac{x}{2}}\times 8^{\frac{2}{3}}=14$$

$$=8^{\frac{x}{2}}\times\left\{1+8^{\frac{1}{3}}+8^{\frac{2}{3}}\right\}=14$$ سحبنا عامل مشترك

$$=8^{\frac{x}{2}}\times\left\{1+\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{8^2}\right\}=14$$

$$=8^{\frac{x}{2}}\times\{1+2+4\}=14$$

$$=8^{\frac{x}{2}}\times 7=14 \Rightarrow 8^{\frac{x}{2}}=2 \Rightarrow (2^3)^{\frac{x}{2}}=2$$ حللنا العدد الاكبر $2^{\frac{3x}{2}}=2^1$ نطبق ملاحظة 1

$$\frac{3x}{2}=1 \Rightarrow 3x=2 \Rightarrow x=\frac{2}{3} \quad , \quad s=\{\tfrac{2}{3}\}$$

الملاحظة 2 ((اذا تساوت الاسس فسوف تتساوى الاساسات))

أولا :- اذا كان $x^n=y^n$ فأن $x=y$ اذا كانت n فردية

EX : $x^5=4^5 \Rightarrow x=4$

ثانيا :- اذا كان $x^n=y^n$ فأن $x=\pm y$ اذا كانت n زوجية

EX : $x^6=4^6 \Rightarrow x=\pm 4$

مثال :- جد قيمة x اذا كان :

A \ $(x+3)^5=4^5$

الحل :- حسب ملاحظة 2

$$x+3=4 \Rightarrow x=4-3 \Rightarrow x=1$$

B \ $(x-1)^6=2^6$

الحل :- حسب ملاحظة 2 $\quad x-1=\pm 2$

$$x-1=2 \Rightarrow x=2+1 \Rightarrow x=3 \quad , \quad x-1=-2 \Rightarrow x=-2+1 \Rightarrow x=-1$$

إذا كان السؤال يحتوي على

(جذور + أسس + ارقام قابلة للتحليل)

طريقة الحل

١- نحلل الرقم
٢- نحول الجذر الى اسس
٣- نرفع المعادلتين الى اس

(الاس يشبه مقام اس المعادلة التي تحتوي x)

تحويل الجذر الى أسس

$$\sqrt[\text{اس خارج}]{x^{\text{اس داخل}}} = x^{\frac{\text{اس داخل}}{\text{اس خارج}}}$$

$$EX\backslash\ \sqrt{6^3} = 6^{\frac{3}{2}} \quad , \quad \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$$

مثال جد قيمة x اذا كان

$$A\backslash\ (x+2)^{\frac{-3}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{27}}$$

الحل :-

$$(x+2)^{\frac{-3}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{3^3}}$$ نحلل الرقم $$(x+2)^{\frac{-3}{5}} = \frac{1}{3^{\frac{3}{5}}}$$ نحول الجذر الى اسس $$(x+2)^{\frac{-3}{5}} = 3^{\frac{-3}{5}}$$

$$\left[(x+2)^{\frac{-3}{\cancel{5}}}\right]^{\cancel{5}} = \left[3^{\frac{-3}{\cancel{5}}}\right]^{\cancel{5}}$$ نرفع المعادلتين الى اس5 $$(x+2)^{-3} = 3^{-3}$$

$$\rightarrow x+2=3 \rightarrow x=1 \quad , \quad s=\{1\}$$

مثال جد قيمة x اذا كان

$$B\backslash\ x^{\frac{2}{3}} = 3^{-2}$$

الحل :- لاحظ عزيزي الطالب هنا السؤال هوه جاهز ولا نحتاج تحليل العدد ولا نحتاج تحويل الجذر

$$\left[x^{\frac{2}{\cancel{3}}}\right]^{\cancel{3}} = [3^{-2}]^3$$ نرفع المعادلتين الى اس3 $$x^2 = (3^{-3})^2$$

$$x = \pm 3^{-3} \rightarrow x = \pm\frac{1}{3^3} \rightarrow x = \pm\frac{1}{27} \quad , \quad s = \{\pm\frac{1}{27}\}$$

لاحظ غالبا عندما نرفع المعادلتين الى اس

نرفعه الى عدد يشبه اس مقام الجزء الذي يحتوي x

انتبه في حالات خاصه لا تتحقق الملاحظة 1 والملاحظة 2 أي ان اذا اختلفت الإسس والاساسات

اذا كان $x^n = y^m$ ⟵ m = n= 0

مثال :- جد قيمة x اذا كان :- $1 - 3^{x-1} = 5^{x-1}$

الحل :- $1)\ 3^{x-1} = 5^{x-1} \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$2)\ 3^{x-1} = 7^{x-1}$ من أسئلة التلفزيون التربوي واجب

الحل :-

مثال :- جد قيمة x لكل مما يأتي من أسئلة التلفزيون التربوي واجب

1- $(x-1)^3 = 2^3$

الحل :-

2- $(x+3)^2 = 4^2$

الحل :-

عزيزي الطالب
ارسل حل الواجب
على التليكرام للتأكد من صحة الحل
gl_gtt

عزيزي الطالب أسئلة الواجبات هي أسئلة مشابهه لأسئلة محلولة

تمارين (2-3)

س 1 \ حل كلاً من المعادلات الاتية :

أ) $\sqrt[5]{x^3} = \frac{1}{27}$

الحل:-

للتذكر طريقة الحل راجع صفحة 51

$x^{\frac{3}{5}} = 3^{-3}$ حللنا العدد وتخلصنا من الجذر $= x^{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3^3}$

$x^3 = [3^{-5}]^3$ نرفع المعادلتين الى اس5 $= \left[x^{\frac{3}{5}}\right]^5 = [3^{-3}]^5$

$x = 3^{-5} \Rightarrow x = \frac{1}{3^5} \Rightarrow x = \frac{1}{243} \;, \; S = \{\frac{1}{243}\}$

ب) $\left(\sqrt[5]{243}\right)^2 = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^2$

الحل :-

$= \left(\sqrt[5]{243}\right)^2 = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \Rightarrow \left(\sqrt[5]{3^5}\right)^2 = x^{-1} \Rightarrow 3^2 = \frac{1}{x}$

$9 = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{9} \qquad S = \{\frac{1}{9}\}$

ج) $(x+2)^{\frac{1}{2}} = 3$

$= \left[(x+2)^{\frac{1}{2}}\right]^2 = [3]^2$ نرفع المعادلتين الى اس 2

$= \; x + 2 = 9 \Rightarrow x = 7 \;, \qquad s = \{7\}$

لاحظ غالبا عندما نرفع المعادلتين الى اس
نرفعه الى عدد يشبه اس مقام الجزء الذي يحتوي x

د) $10^{(x-4)(x-5)} = 100$

الحل :–

$10^{(x-4)(x-5)} = 10^2$

$x^2 - 5x - 4x + 20 = 2$ طبقنا ملاحظة 1 $= (x-4)(x-5) = 2$

$= x^2 - 9x + 18 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-6)$

أما $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$, أو $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$ $, S\{3, 6)$

للتذكر طريقة الحل راجع صفحة 49

هـ) $-6\times 5^x+25^x+5=0$

الحل :-

للتذكر طريقة الحل راجع صفحة 49

$-6\times 5^x+(5^2)^x+5=0 \Rightarrow -6\times 5^x+5^{2x}+5=0$

$5^{2x}-6\times 5^x+5=0$ نرتب المعادلة $(5^x-1)(5^x-5)=0$

أما $5^x-1=0 \Rightarrow 5^x=1 \Rightarrow 5^x=5^0$ حسب الحالة الخاصة $5^0=1$ $x=0$

طبقنا ملاحظة

أو $5^x-5^1=0 \Rightarrow 5^x=5^1 \Rightarrow x=1 \quad , \quad S=\{0.1\}$

و) $6^{x^2-3x-2}=36$

من أسئلة التلفزيون

الحل :-

للتذكر طريقة الحل راجع صفحة 49

$=6^{x^2-3x-2}=6^2 \Rightarrow x^2-3x-2=2$ طبقنا ملاحظة 1

$=x^2-3x-2-2=0 \Rightarrow x^2-3x-4=0$

$=(x-4)(x+1)=0$

أما $x-4=0 \Rightarrow x=4$, أو $x+1=0 \Rightarrow x=-1$ $,S=\{4,-1\}$

ز) $3^{(x^2+5x+4)}=27^{(-x-4)}$

الحل :-

$=3^{x^2+5x+4}=3^{3(-x-4)} \Rightarrow 3^{x^2+5x+4}=3^{-3x-12}$

$=x^2+5x+4=-3x-12$ طبقنا ملاحظة 1 $x^2+5x+4+3x+12=0$

$=x^2+8x+16=0 \Rightarrow (x+4)(x+4)=0$

أما $x+4=0 \Rightarrow x=-4$, أو $x+4=0 \Rightarrow x=-4$ $,S=\{-4\}$

ح) $2^{2x+3}-57=65\,(2^x-1)$

الحل :-

$=2^{2x}\times 2^3-57=652^x-65 \Rightarrow 82^{2x}-57-652^x+65=0$

$=82^{2x}-652^x+8=0 \Rightarrow (82^x-1)(2^x-8)=0$

أما $82^x-1=0 \Rightarrow 82^x=1 \Rightarrow 2^x=\frac{1}{8} \Rightarrow 2^x=\frac{1}{2^3} \Rightarrow 2^x=2^{-3} \Rightarrow x=-3$

أو $2^x-8=0 \Rightarrow 2^x=8 \Rightarrow 2^x=2^3 \Rightarrow x=3\ ,\ S=\{-3,3\}$

ط) $5(5^x + 5^{-x}) = 26$

من أسئلة التلفزيون التربوي

الحل :-

فتحنا الاقواس + رتبنا المعادلة

$$= 55^x + 55^{-x} = 26 \Rightarrow 55^x + 5\frac{1}{5^x} - 26 = 0$$

ضربنا الطرفين في 5^X

$$= 55^x \times 5^x + 5\frac{1}{5^x}5^x - 265^x = 0$$

$$= 55^{2x} - 265^x + 5 = 0 \Rightarrow (55^x - 1)(5^x - 5) = 0$$

أما $55^x - 1 = 0 \Rightarrow 55^x = 1 \Rightarrow 5^x = \frac{1}{5} \Rightarrow 5^x = 5^{-1} \Rightarrow x = -1$

أو $5^x - 5 = 0 \Rightarrow 5^x = 5^1 \Rightarrow x = 1 \quad , \quad S = \{-1, 1\}$

س 2 \ حل المعادلة في R حيث $3^{x+1} \times 9^x - 9^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{x}} = 0$

من أسئلة التلفزيون

نحلل الاعداد

$$= 3^{x+1} \times (3^2)^x - (3^2)^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{x}} = 0$$

استخدمنا قانون الرفع

$$3^{x+1} \times 3^{2x} - 3^1 \times 3^{\frac{3}{x}} = 0$$

عند الضرب تجمع الأسس

$$= 3^{3x+1} - 3^{1+\frac{3}{x}} = 0 \Rightarrow 3^{3x+1} = 3^{1+\frac{3}{x}}$$

طبقنا ملاحظة 1

$$3x + 1 = 1 + \frac{3}{x}$$

ضربنا الطرفين في x

$$3x^2 + x = x + 3$$

$$3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \quad , S = \{-1, 1\}$$

س 3 \ حل المعادلة الأتية $\frac{(243)^{x-1} \times (27)^{x-2}}{(729)^{\frac{1}{2}x}} = 81$

الحل :-

نحلل الاعداد

$$= \frac{(3^5)^{x-1} \times (3^3)^{x-2}}{(3^6)^{\frac{1}{2}x}} = 3^4$$

استخدمنا قانون الرفع

$$\frac{3^{5x-5} \times 3^{3x-6}}{3^{3x}} = 3^4$$

عند الضرب تجمع الأسس

$$\frac{3^{8x-11}}{3^{3x}} = 3^4$$

عند القسمة تطرح الأسس

$$3^{5x-11} = 3^4$$

طبقنا ملاحظة 1

$$5x - 11 = 4 \Rightarrow 5x = 4 + 11 \Rightarrow 5x = 15 \Rightarrow x = 3 \quad , s = \{3\}$$

س 4 جد قيمة $x \in R$ اذا $A \mid 3^{x^2-1} + 3^{x^2} + 3^{x^2+1} = 39$

الحل :-

$$= 3^{x^2} \times 3^{-1} + 3^{x^2} + 3^{x^2} \times 3^{1} = 39$$

$$= 3^{x^2}(3^{-1} + 1 + 3) = 39$$ سحبنا $3x^2$ عامل مشترك $$3^{x^2}\left(\frac{1}{3} + 4\right) = 39$$

$$= 3^{x^2}\left(\frac{1+12}{3}\right) = 39$$ توحيد مقامات $$3^{x^2}\left(\frac{13}{3}\right) = 39$$ سوف نضرب الطرفين ب $\frac{3}{13}$

$$= 3^{x^2}\left(\frac{\cancel{13}}{\cancel{3}}\right) \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{13}} = \cancel{39} \times \frac{3}{\cancel{13}} \Rightarrow 3^{x^2} = 9 \Rightarrow 3^{x^2} = 3^2$$

$x^2 = 2$ طبقنا ملاحظة 1 $\Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \quad , S = \{\pm\sqrt{2}\}$

$$B \mid \frac{4^x + 4(2^x) + 3}{4^x + 2^x} = 25$$

الحل :-

$$= \frac{(2^2)^x + 8^x + 3}{(2^2)^x + 2^x} = 2$$ نحلل الاعداد $$\frac{2^{2x} + 8^x + 3}{2^{2x} + 2^x} = 25$$ استخدمنا قانون الرفع

$$= \frac{(2^x+1)(2^x+3)}{2^x(2^x+1)} = 25$$ استخدمنا طريقة التجربة بالبسط وسحبنا عامل مشترك بالمقام ثم نختصر

$$\frac{2^x + 3}{2^x} = 25$$ نضرب وسطين في طرفين $$2^x + 3 = 252^x \Rightarrow 252^x - 2^x = 3$$

$$242^x = 3 \Rightarrow \frac{\cancel{242^x}}{\cancel{24}} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{24}} \Rightarrow 2^x = \frac{1}{8} \Rightarrow 2^x = \frac{1}{2^3}$$

$2^x = 2^{-3} \Rightarrow x = -3$ طبقنا ملاحظة 1 $\quad , \quad S = \{-3\}$

الجذور والعمليات عليها

بعض الجذور هي كميات لا يمكن ايجاد قيمها بصورة مضبوطة مثل : $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[5]{61}$

تدعى هذه الجذور بالجذور الصماء وسنعطي بعض الخواص لتسهيل عملية تبسيطها.

الخواص

-1 $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y}$ وعكس الخاصية صحيح

مثلاً : $\sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{8}$, $\sqrt[5]{6} \times \sqrt[5]{12} = \sqrt[5]{72}$, $\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{3} \times \sqrt[4]{x^3} = \sqrt[4]{15x^3}$

- 2 $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$ وعكس الخاصية صحيح حيث $y \neq 0$

مثلاً : $\sqrt{7} = \sqrt{\frac{21}{3}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}}$, $\sqrt[3]{\frac{3x}{2y}} = \frac{\sqrt[3]{3x}}{\sqrt[3]{2y}}$

مثال :- رتب الجذور الآتية تصاعدياً: $\sqrt[3]{12}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[6]{147}$

الحل :-

$$\sqrt[3]{12} = \sqrt[6]{12^2} = \sqrt[6]{144}$$

$$\sqrt{5} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{125}$$

$$\sqrt[6]{147} = \sqrt[6]{147}$$

قمنا بتوحيد رتبة الجذور لتسهيل المقارنة

الترتيب يكون : $\sqrt[6]{147}$, $\sqrt[3]{12}$, $\sqrt{5}$

العددان المترافقان $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$

نعلم ان العامل المنسب هو الذي لو ضربت به الكمية غير النسبية لتحولت الى كمية نسبية .

ملاحظة :- الجذور هي كمية غير نسبية

فالعامل المنسب للمقدار $2\sqrt{3}$ هو $\sqrt{3}$ لان $2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 2 \times 3 = 6$

والعامل المنسب للمقدار $\sqrt[3]{3}$ هو $\sqrt[3]{3^2}$ لان $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

والعامل المنسب للمقدار $5+\sqrt{6}$ هو مرافقه $5-\sqrt{6}$

لان ضربهما $(5-\sqrt{6})(5+\sqrt{6}) = 25 - 6 = 19$

ناتج ضرب المرافق في حالة الجذر التربيعي = مربع الأول – مربع الثاني

والعامل المنسب للمقدار $3\sqrt{2}-2\sqrt{5}$ هو مرافقه $3\sqrt{2}+2\sqrt{5}$

لان ضربهما $(3\sqrt{2}-2\sqrt{5})(3\sqrt{2}+2\sqrt{5}) = 9 \times 2 - 4 \times 5 = 18 - 20 = -2$

والعامل المنسب للمقدار $\sqrt[3]{5}-1$ $\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5}+1$

لأن $(\sqrt[3]{5}-1)(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1) = 5 - 1 = 4$ (فرق بين مكعبين)

مثال :- بسط بحيث يكون المقام كمية نسبية $\frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}}$

الحل :-

$$= \frac{1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} + \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} \quad = \quad \frac{\sqrt{2}+1}{1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1} + \frac{2-\sqrt{3}}{1}$$

$$= \cancel{\sqrt{2}} + 1 + \cancel{\sqrt{3}} - \cancel{\sqrt{2}} + 2 - \cancel{\sqrt{3}} = 3$$

من أسئلة التلفزيون التربوي

الدوال الحقيقة

ايجاد اوسع مجال للدوال الحقيقية

سندرس هنا اربعة انواع من الدوال هي : الدالة كثيرة الحدود ، الدالة الكسرية ، الدالة الجذرية ، الدالة الاسية

حيث المجال يختلف من دالة الى اخرى.

الدالة كثيرة الحدود وتشمل

1- الدالة الخطية $f(x) = 3x - 1$

2- الدالة التربيعية $g(x) = x^2 - 5x + 9$

3- الدالة التكعيبية $h(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$

اوسع مجال للدالة كثيرة الحدود هو R

مثال :- جد أوسع مجال للدوال الاتية : 1- $f(x) = 3x - 1$ 2- $g(x) = x^2 - 5x + 9$

الجواب :- أوسع مجال للدالة كثيرة الحدود هو R

الدالة الكسرية

أوسع مجال للدالة الكسرية هو كل R ماعدا القيم التي تجعل المقام = صفر

لإيجاد مجال هذا النوع من الدوال نجعل المقام = صفراً ونجد قيم x فيكون اوسع مجال للدالة R \{ x قيم}

مثال :- جد أوسع مجال للدوال الأتية :

1) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+5}$ نأخذ المقام ونساويه للصفر $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$, أوسع مجال لها $R \setminus \{-5\}$

2) $g(x) = \dfrac{2}{x^2-4}$ نأخذ المقام ونساويه للصفر $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

أوسع مجال لها $R \setminus \{\pm 2\}$

$h(x) = \dfrac{x+7}{x^2-3x} \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ or } x - 3 = 0 \quad , x = 3$

أوسع مجال لها $R \setminus \{0, 3\}$

الدالة الجذرية

الدالة الجذرية (دليل الجذر زوجي) $\sqrt[6]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, $\sqrt{\ }$

لإيجاد مجال الدالة نجد جميع قيم x الحقيقية التي تجعل داخل الجذر أكبر او يساوي صفراً

مثال :- جد أوسع مجال للدوال الأتية :

$1-\mathrm{f}(\mathrm{x})=\sqrt{x-7}$ نأخذ داخل الجذر ونجعله أكبر او يساوي صفر $x-7\geq 0 \Rightarrow x\geq 7$

أوسع مجال لها هو $\{x: x\in R, x\geq 7\}$

$2-\mathrm{g}(x)=\sqrt{3x+5} \Rightarrow 3x+5\geq 0 \Rightarrow 3x\geq -5$ نقسم الطرفين على 3 $x\geq \frac{-5}{3}$

أوسع مجال لها هو $\{x: x\in R, x\geq \frac{-5}{3}\}$

$3-\mathrm{h}(x)=\sqrt{1-2x} \Rightarrow 1-2x\geq 0 \Rightarrow -2x\geq 1$ نقسم الطرفين على 2 - $x\leq \frac{1}{2}$

لاحظ انقلاب اتجاه المتباينة لان قسمنا على سالب

أوسع مجال لها هو $\{x: x\in R, x\leq \frac{1}{2}\}$

الدالة الاسية

الدالة الاسية $f_a(x)=a^x$ حيث $a\in R^+\backslash\{1\}$, $x\in R$ حيث a هو الأساس , x يمثل الأس

من الامثلة على الدالة الاسية :

$1-\ f_{\frac{1}{2}}(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ $2-h_{\sqrt{5}}(x)=\left(\sqrt{5}\right)^x$ $3-\ g_3(x)=(3)^x$ $4-\ f_2(x)=(2)^x$

ملاحظة : $\mathrm{f}(\mathrm{x})=1^{\mathrm{x}}=1$ وهذه دالة ثابتة وهذا ما جعلنا نستبعد $a=1$ في الدالة الاسية

التمثيل البياني للدوال الحقيقية

اولاً : تمثيل الدالة الخطية $f(x) = ax + b$ حيث $a , b \in R$, $a \neq 0$

مثال : مثل الدالة $f(x) = 2x + 3 , \forall x \in R$

X	Y	(x , y)
1	5	(1 , 5)
0	3	(0 , 3)
-1	1	(-1 , 1)

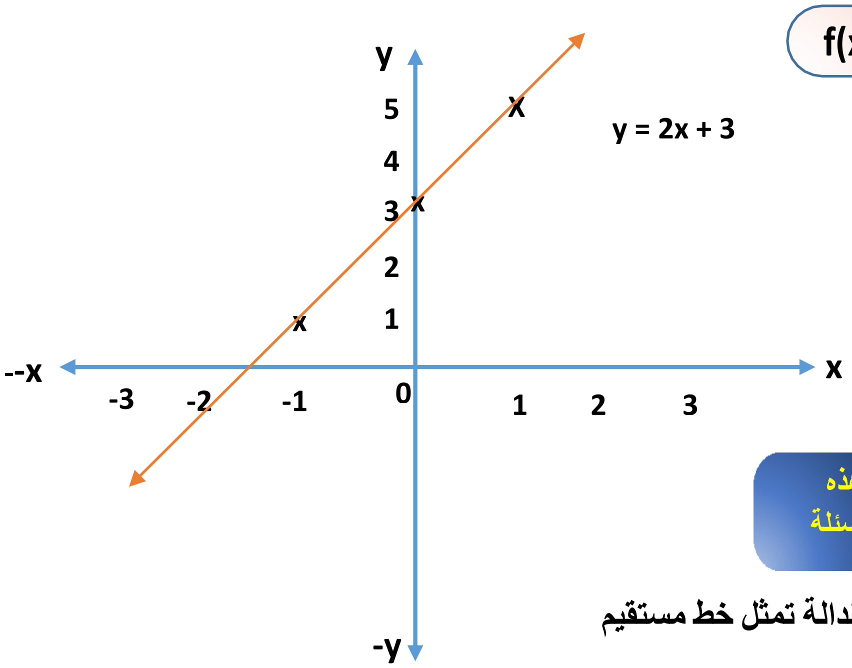
توضيح كيف تم استخراج قيم y

$X=1 \Rightarrow y = 2(1)+3 = 5$

$x = 0 \Rightarrow y = 2(0) + 3= 3$

$x = -1 \Rightarrow y = 2(-1) + 3= 1$

قيم x ستكون هذه الأرقام في كل الاسئلة



لاحظ ان هذه الدالة تمثل خط مستقيم

مثال :- مثال الدالة $f(x) = 3x - 2$

من اسئلة التلفزيون التربوي

واجب

الحل :-

عزيزي الطالب أسئلة الواجبات هي أسئلة مشابهه لأسئلة محلولة

ثانياً : تمثي ل الدالة التربيعية $a,b \in R$, $a \neq 0$, $f(x) = ax^2 + b$

مثال : مثل الدالة $f(x) = 2x^2 + 3$ اي عندما $a > 0$, $b \geq 0$

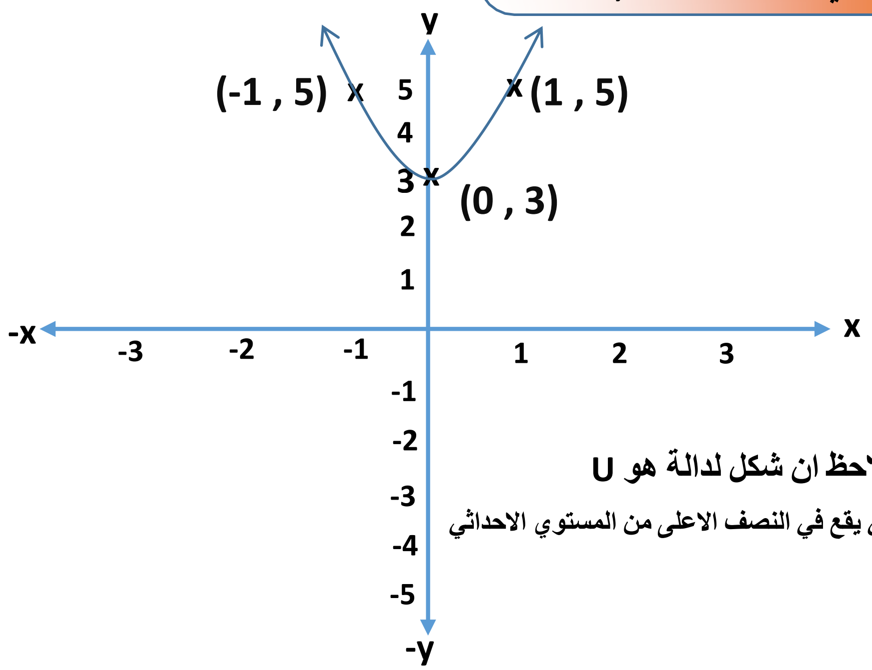
x	y	(x , y)
1	5	(1 , 5)
0	3	(0 ,3)
-1	5	(-1 , 5)

توضيح كيف تم استخراج قيم y

X = 1 $y = 2(1)^2 + 3 = 5$

x = 0 $y = 2(0)^2 + 3 = 3$

x = -1 $y = 2(-1)^2 + 3 = 5$



لاحظ ان شكل لدالة هو U

وتمثيلها البياني يقع في النصف الاعلى من المستوي الاحداثي

مثال : مثل الدالة $f(x) = -4x^2$ ، اي عندما $a < 0$

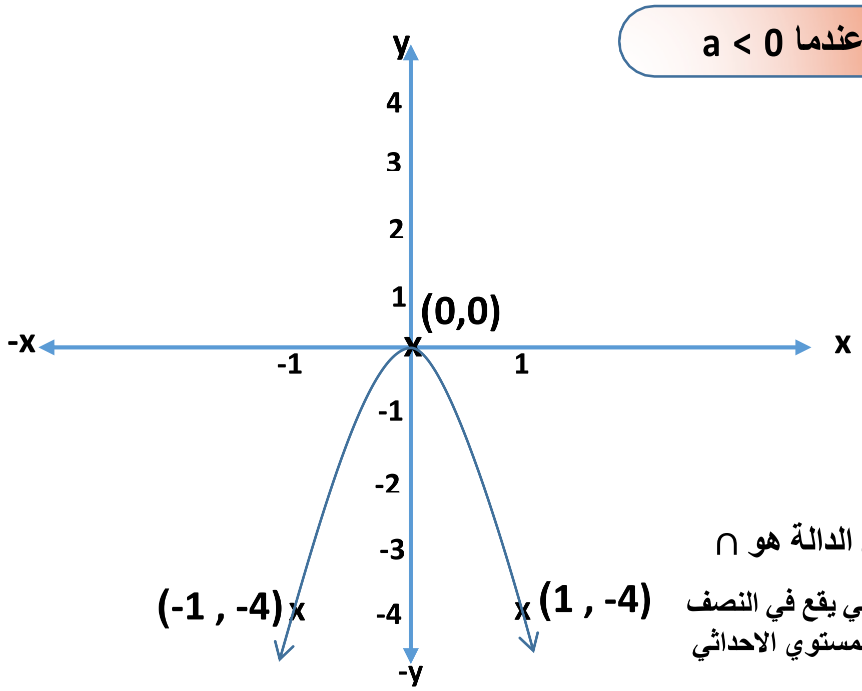
x	y	(x , y)
1	- 4	(1 , -4)
0	0	(0 , 0)
-1	-4	(-1 , -4)

توضيح كيف تم استخراج قيم y

X = 1 $y = -4(1)^2 = -4$

x = 0 $y = -4(0)^2 = 0$

x = -1 $y = -4(-1)^2 = -4$



لاحظ ان شكل الدالة هو ∩

وتمثيلها البياني يقع في النصف الاسفل من المستوي الاحداثي

مثال   مثال الدالة $f(x) = 2x^2 - 5$ من اسئلة التلفزيون

الحل :-

واجب

ثالثاً : تمثيل الدالة التكعيبية $f(x) = ax^3 + b$, $a, b \in R, \ a \neq 0$

مثال :-   مثل الدالة : $f(x) = x^3 + 2$

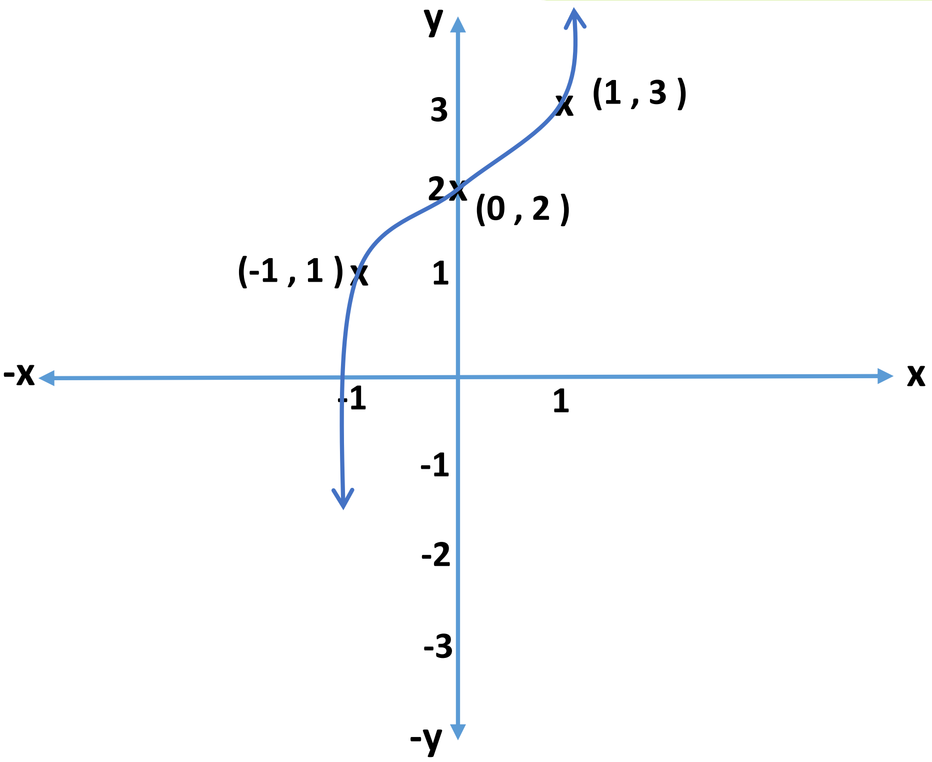
x	y	(x , y)
1	3	(1 , 3)
0	2	(0 , 2)
-1	1	(-1 , 1)

توضيح كيف تم استخراج قيم y

X = 1   y = $(1)^3 + 2 = 3$

x = 0   y = $(0)^3 + 2 = 2$

x = -1   y = $(-1)^3 + 2 = 1$



مثال مثل الدالة $f(x) = -x^3$

الحل :-

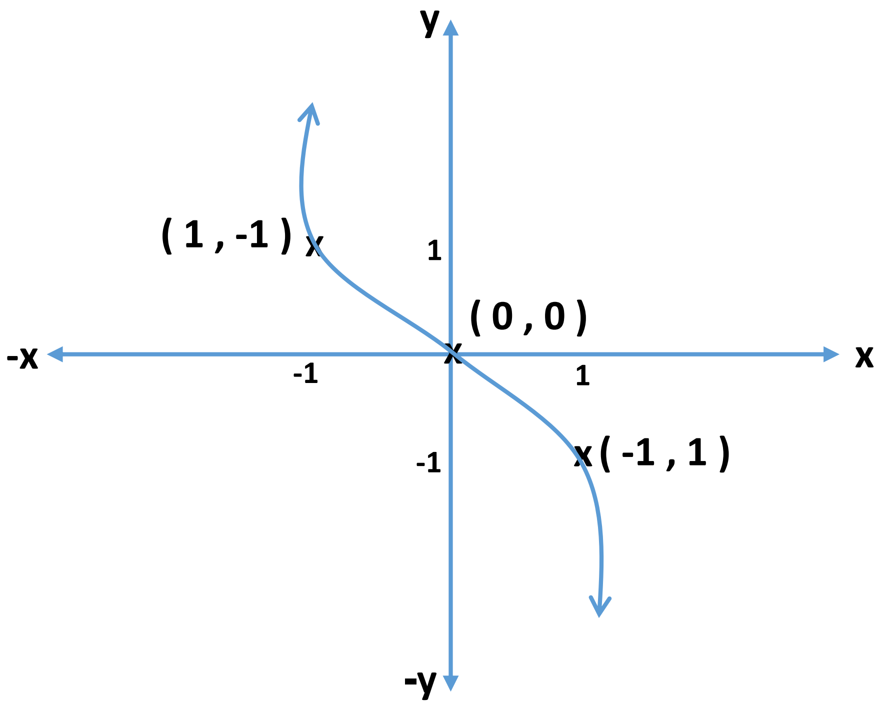
x	y	(x , y)
1	-1	(1 , -1)
0	0	(0 , 0)
-1	1	(-1 , 1)

توضيح كيف تم استخراج قيم y

X = 1 y = $-(1)^3$ = -1

x = 0 y = $-(0)^3$ = 0

x = -1 y = $-(-1)^3$ = 1



مثال :- مثل الدالة بيانياً $f(x) = x^3 - 3$

من أسئلة التلفزيون التربوي

الحل:-

واجب

رابعاً : تمثيل الدالة الاسية $f_a(x) = a^x$

مثال :-

أ) جد قيم الدالة $f(x) = 2^x$ من اجل $x = 3,2,1,0,-1,-2,-3$ ثم استفد من ذلك في رسم جزء من منحني هذه الدالة

ب) ابحث عن طريقة للإفادة من المنحني السابق في رسم جزء من منحني هذه الدالة: $f_{\frac{1}{2}}(x)$ على الشكل نفسه.

الحل :- أ) $f(x) = 2^x$

x	3	2	1	0	-1	-2	-3
2^x	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

ب) $g(x) = f_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x} = f(-x)$ ولنفرض R_y تناظر بالنسبة لمحور الصادات

$R_y : (x, y) = (-x, y)$

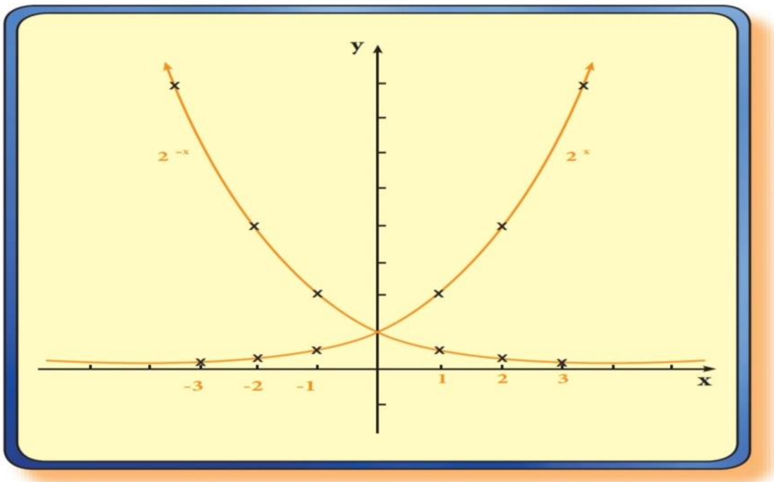
أي ان صورة $(x, 2^x) = (-x, 2^x)$

لذلك فأننا نحصل على منحني لدالة

$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ من المنحني $f(x) = 2^x$

بالتناظر حول محور الصادات

كما موضح في الشكل



بعض خصائص الدالة الأسية $f(x) = a^x$

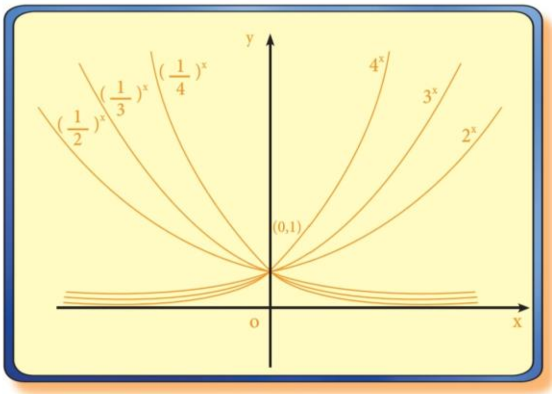
1 - اذا قمنا برسم منحنيات الدوال: .... $2^x, 3^x, 4^x, 5^x$.

وكذلك الدوال: .... $\left(\frac{1}{2}\right)^x, \left(\frac{1}{3}\right)^x, \left(\frac{1}{4}\right)^x, \left(\frac{1}{5}\right)^x$ فسوف نجد مجموعتين من المنحنيات :

الاولى : عندما $a > 1$ حيث تتزايد قيم الدالة a^x كلما تزايدت قيمة x .

الثانية : عندما $0 < a < 1$ حيث تتناقص قيم الدالة a^x كلما تزايدت قيمة x .

وقد رسمنا في الشكل ستة من هذه المنحنيات (رسم جزء من كل منحني)
ثلاثة فيها $a > 1$ وثلاثة منها اخرى فيها $0 < a < 1$ وقد اخترنا قيم a
في هذه الاخيرة مقلوبات قيم a في الثلاثة الاولى ونلاحظ ان جميع هذه المنحنيات
تمر بالنقطة (0 , 1)



2- بالرجوع الى المنحني البياني لأية دالة اسية a^x . $a \neq 0$ نجد ان مجالها R .

تمارين (3-3)

س 1 أ \ أختصر $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}\left[\dfrac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}}-\dfrac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}\right]^{-1}$

الحل :-

توحيد مقامات

قانون فرق بين مربعين
$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$$=\frac{\sqrt{(a-b)(a+b)}}{a+b}\left[\frac{\sqrt{a+b}\times\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\times\sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b}\times\sqrt{a+b}}\right]^{-1}$$

$$=\frac{\sqrt{a-b}\times\sqrt{a+b}}{a+b}\left[\frac{a+b-(a-b)}{\sqrt{a-b}\times\sqrt{a+b}}\right]^{-1}=\frac{\sqrt{a-b}\times\sqrt{a+b}}{a+b}\left[\frac{2b}{\sqrt{a-b}\times\sqrt{a+b}}\right]^{-1}$$

$$=\frac{\sqrt{a-b}\times\sqrt{a+b}}{a+b}\times\frac{\sqrt{a-b}\times\sqrt{a+b}}{2b}=\frac{(a-b)\cancel{(a+b)}}{\cancel{(a+b)}2b}=\frac{a-b}{2b}$$

س 1 ب \ إذا كان $x=\sqrt[3]{2}+1$. $y=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1$ فأثبت ان xy = 3 ؟

الحل :-

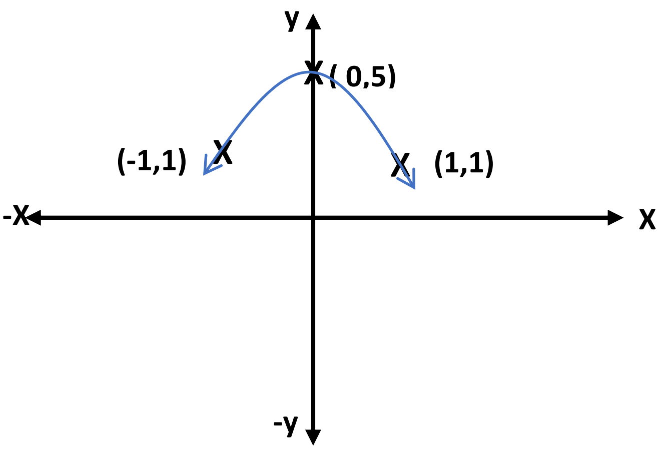
الطرف الأيسر $x\cdot y=(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)$

الطرف الأيمن $\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1=2+1=3$

س 2 \ مثل بيانياً الدوال الاتية :

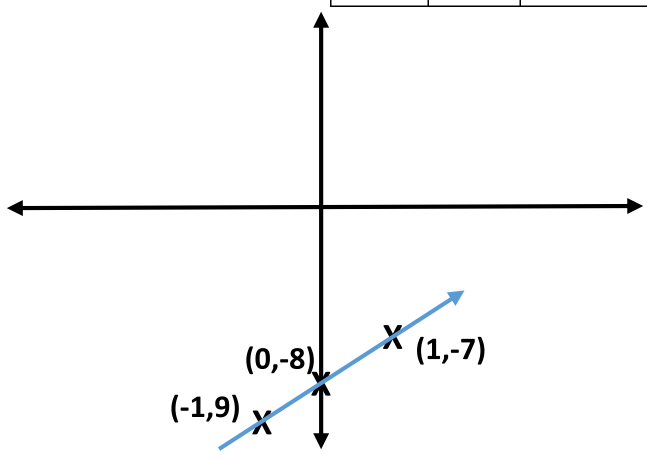
$A)\ f(x)=-4x^2+5$

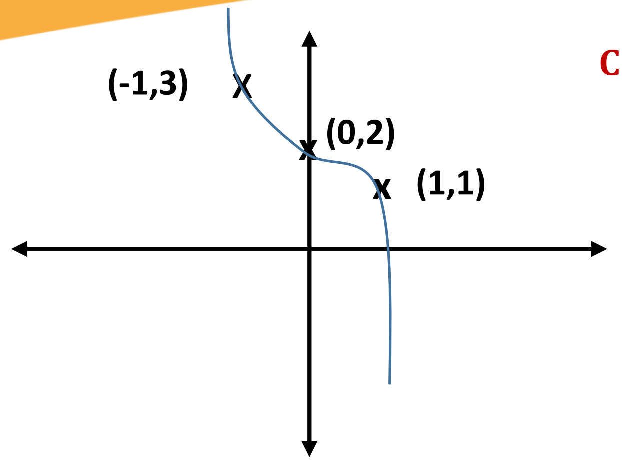
x	y	(x , y)
1	1	(1 , 1)
0	5	(0 , 5)
-1	1	(-1 , 1)



$B)\ f(x)=x-8$

x	y	(x , y)
1	-7	(1,-7)
0	-8	(0,8)
-1	-9	(-1,-9)





$C-\ f(x) = 2 - x^3$

x	y	(x , y)
1	1	(1,1)
0	2	(0,2)
-1	3	(-1,3)

س 3 \ جد أوسع مجال للدوال التالية :

$A)\ f(x) = x^2 - 5x + 9$ أوسع مجال لها هو R

$B)\ f(x) = \frac{x-1}{x+9} \Rightarrow x + 9 = 0 \Rightarrow x = -9$ أوسع مجال لها {-9} \R

$C)\ f(x) = \sqrt{x-9} \Rightarrow x - 9 \geq 0 \Rightarrow x \geq 9$ أوسع مجال لها {x: x ∈ R , x ≥ 9}

$D)\ f(x) = \sqrt{3-5x} \Rightarrow 3 - 5x \geq 0 \Rightarrow -5x \geq -3 \Rightarrow x \leq \frac{5}{3}$ أوسع مجال لها $\{x : x \in R , x \leq \frac{3}{5}\}$

$E)\ f(x) = \frac{1}{x^2-9} \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$ أوسع مجال لها {±3} \R

س 4 \ اوجد ناتج ما يلي بحيث يكون المقام كمية نسبية :

$$A)\ \frac{3}{a-b}\cdot\sqrt{\frac{2x}{a-b}} \div \sqrt{\frac{18x^3}{(a-b)^5}} = \frac{3}{a-b}\cdot\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{a-b}} \div \frac{\sqrt{18x^3}}{\sqrt{(a-b)^5}}$$

$$= \frac{3}{a-b}\cdot\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{a-b}} \times \frac{\sqrt{(a-b)^5}}{\sqrt{18x^3}} = \frac{3}{a-b}\cdot\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{18x^3}} \times \frac{\sqrt{(a-b)^5}}{\sqrt{a-b}}$$

$$\frac{3}{a-b}\cdot\sqrt{\frac{\cancel{2x}}{\cancel{18x^3}}} \times \sqrt{\frac{\cancel{(a-b)^5}}{\cancel{a-b}}} = \frac{3}{a-b}\cdot\sqrt{\frac{1}{9x^2}} \times \sqrt{(a-b)^4}$$

$$\frac{\cancel{3}}{\cancel{a-b}}\cdot\frac{1}{\cancel{3}x} \times \cancel{(a-b)^2} = \frac{a-b}{x}$$

$$B)\ \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{8}{27}}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{27}}}{\sqrt{6}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}}{\sqrt{6}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{\frac{3\times 3-2\times 2}{\sqrt{2}\times 3\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{18}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=\frac{\frac{9-4}{3\sqrt{6}}}{\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=\frac{\frac{5}{3\sqrt{6}}}{\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=\frac{5}{3\sqrt{6}}\div\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{5}{3\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}=\frac{5}{3\times\cancel{\sqrt{3}}\times\sqrt{2}}\times\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{4\sqrt{2}}=\frac{5}{24}$$

$$C)\ \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}}-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}}=\frac{\sqrt{\sqrt{5}+1}}{\sqrt{\sqrt{5}-1}}-\frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{\sqrt{5}+1}\times\sqrt{\sqrt{5}+1}-\left(\sqrt{\sqrt{5}-1}\times\sqrt{\sqrt{5}-1}\right)}{\sqrt{\sqrt{5}-1}\times\sqrt{\sqrt{5}+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{5}+1-(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5-1}}$$

$$=\frac{\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1}{\sqrt{5-1}}=\frac{2}{\sqrt{4}}=\frac{2}{2}=1$$

س 5 \ A - أثبت ان

$$\frac{-15}{x-6+\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt{x}-2}-\frac{3}{\sqrt{x}+3}=0$$

نأخذ الطرف الايسر

$$=\frac{-15}{x-6+\sqrt{x}}+\frac{3\times(\sqrt{x}+3)-3\times(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)\times(\sqrt{x}+3)}$$

$$=\frac{-15}{x-6+\sqrt{x}}+\frac{3\sqrt{x}+9-3\sqrt{x}+6}{x+3\sqrt{x}-2\sqrt{x}-6}$$

$$\frac{-15}{x-6+\sqrt{x}}+\frac{15}{x-6+\sqrt{x}}=0$$ الطرف الأيمن

B- جد x بصورة $a+\sqrt{3b}$ اذا كانت $x+\sqrt{3}x=8$

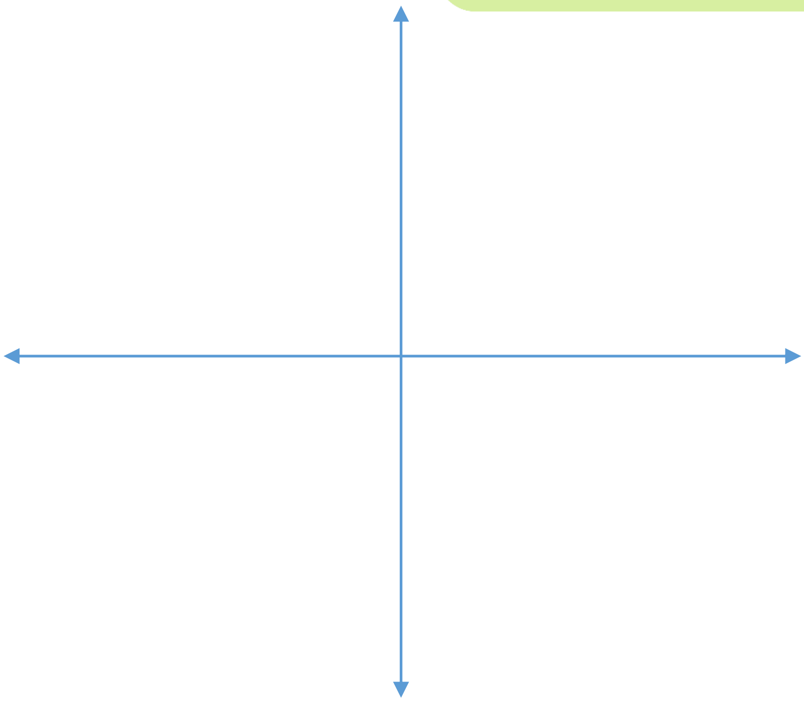
$$x\left(1+\sqrt{3}\right)=8 \Rightarrow x=\frac{8}{1+\sqrt{3}} \Rightarrow x=\frac{8}{1+\sqrt{3}}\times\frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$

$$x=\frac{8(1-\sqrt{3})}{1-3} \Rightarrow x=\frac{8(1-\sqrt{3})}{-2}= \Rightarrow x=-4\left(1-\sqrt{3}\right) \Rightarrow x=-4+4\sqrt{3}$$

س 6 \ أرسم جزءاً من المنحني البياني للدالة $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$

الحل :-

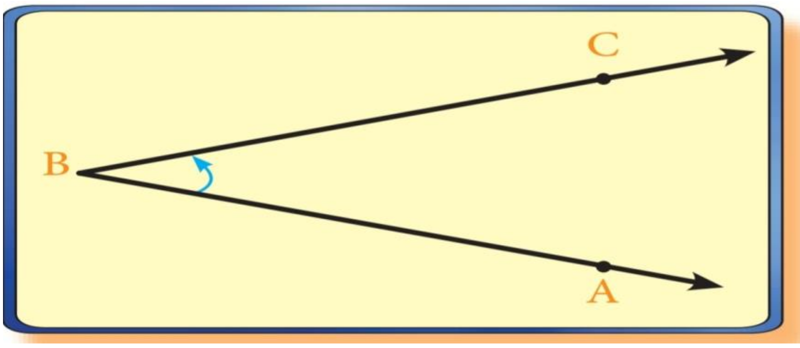
x	$\left(\frac{1}{5}\right)^x$	(x , y)
1	$\frac{1}{5}$	$(1 , \frac{1}{5})$
0	1	(0,1)
-1	5	(-1,5)



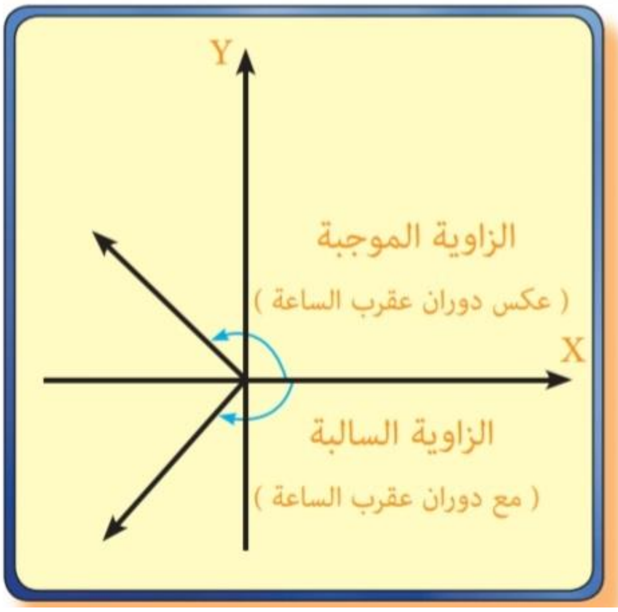
الفصل الرابع : حساب المثلث

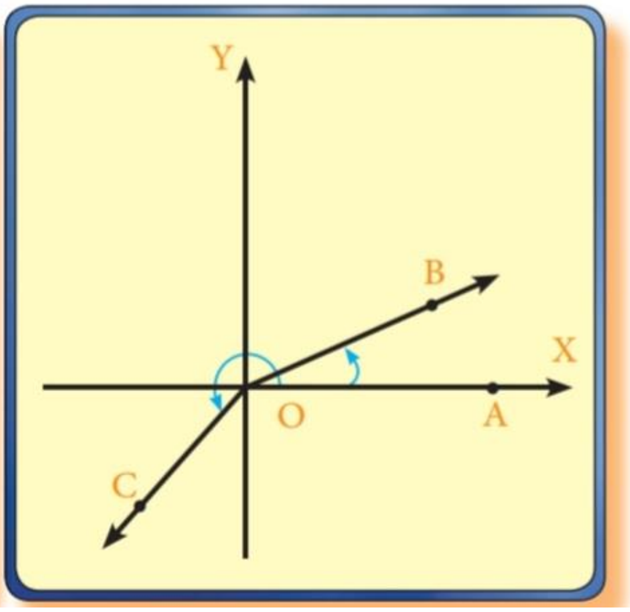
الزاوية الموجهة بالوضع القياسي

الزاوية الموجهة Directed Angle : اذا كان للشعاعين $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$ نقطة بداية مشتركة هي B فان الزوج المرتب $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ يسمى الزاوية الموجهة التي ضلعها الابتدائي $\overrightarrow{BA}$ وضلعها النهائي $\overrightarrow{BC}$ ورأسها النقطة B وتكتب بإحدى الطريقتين $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ أو $\angle\overrightarrow{ABC}$.



الزاوية الموجهة بالوضع القياسي: إذا كان لدينا نظام احداثي متعامد المحورين في المستوي وزاوية موجهة في المستوي فيقال ان الزاوية الموجهة في وضع قياسي إذا وقع رأسها في نقطة الأصل وانطبق ضلعها الابتدائي على الجزء الموجب لمحور السينات كما في الشكل





القياس الستيني والقياس الدائري للزوايا:

تعلمنا من المرحلة المتوسطة انه :

القياس الستيني Degree Measure :

اذا قسمنا دائرة على 360 قسماً متساوياً فأننا نحصل على 360 قوساً متساوية كل قوس منها يقابل زاوية مركزية في هذه الدائرة قياسها يسمى درجة في التقدير الستيني ويرمز له بالرمز 1°

كما أن : $1^{\circ} = 60$ دقيقة $= 60'$. $1' = 60$ ثانية $= 360''$

القياس الدائري Radian Measure :

يوجد نظام اخر لقياس الزوايا يسمى القياس الدائري للزوايا.

تعريف: وحدة قياس الزوايا بالتقدير الدائري هي الزاوية نصف القطرية وهي قياس للزاوية التي وضع رأسها في مركز دائرة وقابلها قوس Arc طوله مساوٍ لنصف قطر تلك الدائرة.

ففي الشكل 1 اذا فرضنا ان طول القوس المقابل للزاوية المركزية A O B يساوي (L) وحدة

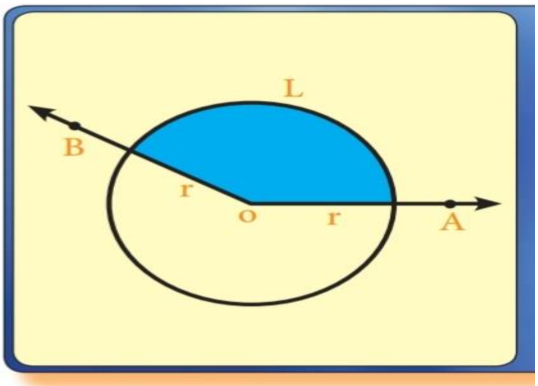
طول نصف قطر الدائرة = r وحدة طول وكان L = r فان $m <$ A O B

بالتقدير الدائري = 1 زاوية نصف قطرية.

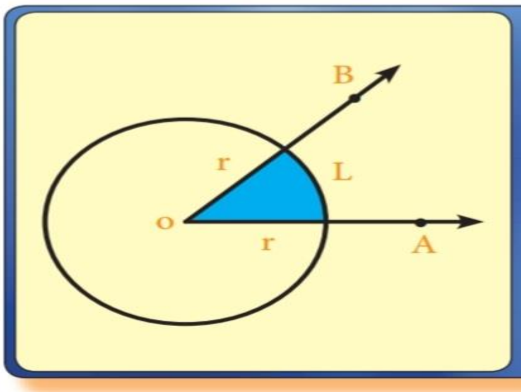
واذا كان L = 2r كما في الشكل 2 فان m< A O B

بالتقدير الدائري = 2 من الزوايا نصف القطرية.

الشكل 2



الشكل 1



ومن التعريف ينتج ان طول قوس الدائرة التي نصف قطرها r هو:

$L = |Q| \cdot r$ حيث | Q | قياس الزاوية المركزية المقابلة لذلك القوس مقدراً بالتقدير الدائري.

أو

$$|Q| = \frac{L}{r} = \frac{\text{طول القوس}}{\text{نصف القطر}}$$

العلاقة بين القياس الستيني والدائري للزوايا:

$$\frac{Q}{D^\circ}=\frac{\pi}{180^\circ}$$

يستخدم هذه القانون لحل الأسئلة

للتحويل من القياس الستيني الى القياس الدائري

او التحويل من القياس الدائري الى القياس الستينى

ترمز الى كمية القياس الدائري Q

ترمز الى كمية القياس الستيني D

مثال :- اذا كانت $\overrightarrow{A\ O\ B} <$ في وضعها القياسي $\frac{3\pi}{4}$ فما قياسها بالتقدير الستيني

الحل :-

$$\frac{Q}{D^\circ}=\frac{\pi}{180^\circ}$$

$$=\frac{\frac{3\cancel{\pi}}{4}}{D^\circ}=\frac{\cancel{\pi}}{180^\circ} \Longrightarrow D=\frac{3}{\cancel{4}}\times \overset{45}{\cancel{180^\circ}}=135^\circ$$

مثال :- حول أ - 45° الى التقدير الدائري ب - 2.6π الى التقدير الستيني

الحل :-

أ –

$$\frac{Q}{D^\circ}=\frac{\pi}{180^\circ} \Longrightarrow \frac{Q}{45^\circ}=\frac{\pi}{180^\circ} \Longrightarrow Q=\frac{\cancel{45^\circ}\pi}{\underset{4}{\cancel{180^\circ}}} \Longrightarrow Q=\frac{\pi}{4}$$

ب -

$$\frac{Q}{D^\circ}=\frac{\pi}{180} \Longrightarrow \frac{2.6\cancel{\pi}}{D}=\frac{\cancel{\pi}}{180^\circ} \Longrightarrow D=2.6\times180^\circ=468^\circ$$

عزيزي الطالب

ارسل حل الواجب

على التليكرام للتأكد من صحة الحل

gl_gtt

عزيزي الطالب أسئلة الواجبات هي أسئلة مشابهه لأسئلة محلولة

واجب

س \ حول الى التقدير الدائري كل من قياس الزوايا الأتية 1) 40° 2) 60° 3) 150°

من أسئلة التلفزيون التربوي

الحل :-

1) $\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow \frac{Q}{40^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow Q = \frac{\pi \times 40^\circ}{180^\circ} \Rightarrow Q = \frac{2\pi}{9}$

2)

3)

واجب

س \ حول الى التقدير الستيني كل من قياس الزوايا الأتية 1) $\frac{5\pi}{3}$ 2) $\frac{3\pi}{4}$ 3) $\frac{3\pi}{2}$

من أسئلة التلفزيون التربوي

الحل :-

1) $\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow \frac{\frac{5\pi}{3}}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow D^\circ = \frac{5}{\cancel{3}} \times \overset{60}{\cancel{180^\circ}} \Rightarrow D^\circ = 300^\circ$

2)

3)

ملاحظة 1 :- اذا اعطى بالسؤال طول القوس ونصف القطر نستخرج Q (القياس الدائري) ثم ننتبه اذا كان المطلوب القياس دائري ف ينتهي الحل اما اذا كان المطلوب القياس الستيني نحول القياس الدائري الى القياس الستيني

ملاحظة 2 :- اذا اعطى بالسؤال نصف القطر وطلب طول القوس او بالعكس و (اعطى قياس دائري نعوضه مباشرتا بالقانون اما اذا اعطى قياس ستيني نحوله الى قياس دائري ونعوضه بالقانون)

القانون الذي ينطبق على الملاحظتين $|Q| = \frac{L}{r}$ حيث ان L يمثل طول القوس و r تمثل نصف القطر

مثال :- زاوية مركزية قياسها °60 فما طول القوس الذي تقابله اذا كان طول نصف قطر دائرتها 9cm ؟

الحل :- راجع ملاحظة 2 ص 73

$$\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow \frac{Q}{60^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow Q = \frac{60^\circ \pi}{180^\circ} \Rightarrow Q = \frac{\pi}{3}$$ من الزوايا النصف قطرية.

$$|Q| = \frac{L}{r} \Rightarrow L = |Q| \times r \Rightarrow L = \frac{\pi}{3} \times 9 \Rightarrow L = 3\pi$$

$L = 3 \times 3.142 = 9.426$ cm

قيمتها ثابتة $\pi = 3.142$ او $\pi = \frac{22}{7}$

س ١ زاوية مركزية قياسها °30 فما طول القوس الذي تقابله اذا كان طول نصف قطر دائرتها 6cm ؟

الحل :- راجع ملاحظة 2 ص 73

من أسئلة التلفزيون التربوي

$$\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow \frac{Q}{30^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow Q = \frac{30^\circ \pi}{180^\circ} \Rightarrow Q = \frac{\pi}{6}$$

$$|Q| = \frac{L}{r} \Rightarrow L = |Q| \times r \Rightarrow L = \frac{\pi}{6} \times 6 \Rightarrow L = \pi$$

$L = 3.142$

مثال :- زاوية مركزية طول قوسها $21\frac{1}{4}\,cm$ وطول نصف قطر دائرتها 20 cm فما مقدار قياسها الستيني ؟

الحل :- راجع ملاحظة 1 ص 73

$$|Q| = \frac{L}{r} \Rightarrow |Q| = \frac{21\frac{1}{4}}{20} \Rightarrow |Q| = \frac{17}{16}$$ زاوية نصف قطرية.

$$\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow \frac{\frac{17}{16}}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow D^\circ = \frac{17}{16} \times 180^\circ \times \frac{7}{22} \Rightarrow D^\circ = 60.85^\circ$$

س :- زاوية مركزية Q طول قوسها $44cm$ وطول نصف قطر دائرتها 21 cm حيث $0 \le Q < 2\pi$ فما مقدار قياسها الستيني ؟

من أسئلة التلفزيون التربوي

الحل :-

واجب

مثال :- في مثلث قائم الزاوية الفرق بين زاويتيه الحادتين 0.44 زاوية نصف قطرية فما قياس كل منها بالتقدير الستيني ؟

الحل :-

$$\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow \frac{0.44}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow D^\circ = \frac{0.44\times180^\circ}{\pi} \Rightarrow D^\circ = \frac{79.2}{3.142} \Rightarrow D^\circ = 25.2$$

نفرض ان الزاويتين الحادتين قياسهما الستيني A , B

A + B = 90˚ 1

A - B = 25.2˚ 1

بالجمع

2A = 115.2 ⟹ A = 57.6°

لإيجاد قيمة B نعوض قيمة A في المعادلة الأولى

$$A + B = 90^\circ \Rightarrow 57.6^\circ + B = 90^\circ \Rightarrow B = 90^\circ - 57.6^\circ \Rightarrow B = 32.4^\circ$$

س ١ في مثلث قائم الزاوية الفرق بين زاويتيه الحادتين $\frac{\pi}{3}$ زاوية نصف قطرية فما قياس كل منها بالتقدير الستيني ؟

من أسئلة التلفزيون التربوي

الحل :-

$$\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow \frac{\frac{\pi}{3}}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow D^\circ = \frac{1}{3} \times 180^\circ \Rightarrow D^\circ = 60^\circ$$

نفرض ان الزاويتين الحادتين قياسهما الستيني A , B

A + B = 90˚ 1

A - B = 60˚ 2

بالجمع

2A = 150 ⟹ A = 75°

لإيجاد قيمة B نعوض قيمة A في المعادلة الأولى نحصل على $B = 15^\circ$

مثال :- اذا كانت $< \overrightarrow{AOB}$ في وضع قياسي تقابل قوساً طوله 10cm في دائرة طول نصف قطرها 12cm .

أ) احسب بالتقدير الدائري $m < \overrightarrow{AOB}$ حيث: $2\pi \geq m < AOB \geq 0$ علماً ان مركز الدائرة هو نقطة الاصل.

ب) احسب بالتقدير الدائري $m < \overrightarrow{AOB}$ حيث: $0 \geq m < AOB > -2\pi$

L= 10 cm , r = 12 cm

أ) ∴ زاوية نصف قطرية $|Q| = \frac{L}{r} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} = 0.833$

ب) في هذه الحالة يكون قياس الزاوية سالباً ويكون:

$$|Q| = \frac{L}{r} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} = 0.833$$

∴ *Q = - 0. 833* زاوية نصف قطرية (لان الزاوية سالبة).

تمارين (1 – 4)

س 1 \ حول الى التقدير الدائري كل من قياس الزوايا الاتية : 1) 300° ، 2) 120° ، 3) 30°

الحل :-

1) $\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow \frac{Q}{300^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow Q = \frac{\pi \times 300^\circ}{180^\circ} \Rightarrow Q = \frac{5\pi}{3}$

2) $\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow \frac{Q}{120^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow Q = \frac{\pi \times 120^\circ}{180^\circ} \Rightarrow Q = \frac{2\pi}{3}$

3) $\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow \frac{Q}{30^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow Q = \frac{\pi \times 30^\circ}{180^\circ} \Rightarrow Q = \frac{\pi}{6}$

س2 \ حول كلاً من الزوايا نصف القطرية الآتية الى التقدير الستيني

1) $\frac{1}{3}$ ، 2) $\frac{5\pi}{6}$ ، 3) $\frac{3\pi}{5}$

1) $\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow \frac{\frac{1}{3}}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow D^\circ = \frac{1}{\cancel{3}} \times \overset{60}{\cancel{180^\circ}} \times \frac{7}{22} \Rightarrow D^\circ = \frac{420}{22} \Rightarrow D^\circ = 19.1^\circ$

2) $\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow \frac{\frac{5\pi}{6}}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow D^\circ = \frac{5}{\cancel{6}} \times \overset{30}{\cancel{180^\circ}} \Rightarrow D^\circ = 150^\circ$

3) $\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow \frac{\frac{3\pi}{5}}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow D^\circ = \frac{3}{\cancel{5}} \times \overset{36}{\cancel{180^\circ}} \Rightarrow D^\circ = 108^\circ$

س 3 \ قياس زاوية مركزية في دائرة $\frac{5}{6}$ من الزوايا نصف القطرية تقابل قوساً طوله 25 cm جد نصف قطر تلك الدائرة ؟

من أسئلة التلفزيون التربوي

الحل :-

$|Q| = \frac{L}{r} \Rightarrow r = \frac{L}{|Q|} \Rightarrow r = \frac{25}{\frac{5}{6}} \Rightarrow r = \frac{150}{5} \Rightarrow r = 30\ cm$

راجع ملاحظة 2 ص 73

س 4 \ ما طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها °135 في دائرة نصف قطرها 8cm ؟

الحل :-

راجع ملاحظة 2 ص 73

$$\frac{Q}{D^\circ}=\frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow \frac{Q}{135^\circ}=\frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow Q=\frac{\pi\times 135^\circ}{180^\circ} \Rightarrow Q=\frac{3\pi}{4}$$

$$|Q|=\frac{L}{r} \Rightarrow L=|Q|\times r \Rightarrow L=\frac{3\pi}{\cancel{4}}\times \overset{2}{\cancel{8}} \Rightarrow L=6\pi \Rightarrow L=6\times 3.142$$

$$L=18.852\ cm$$

س 5 \ زاويتان مجموعهما $\frac{\pi}{4}$ زاوية نصف قطرية وفرقهما يساوي °9 فما مقدار هاتين الزاويتين بالتقدير الستيني ؟

الحل :-

$$\frac{Q}{D^\circ}=\frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow \frac{\frac{\cancel{\pi}}{4}}{D^\circ}=\frac{\cancel{\pi}}{180^\circ} \Rightarrow D^\circ=\frac{1}{\cancel{4}}\times \overset{45}{\cancel{180^\circ}} \Rightarrow D^\circ=45^\circ$$

نفرض ان الزاويتين الحادتين قياسهما الستيني A , B

A + B = 45° 1

A - B = 9° 2

بالجمع

2A= 54 ⇒ A =27°

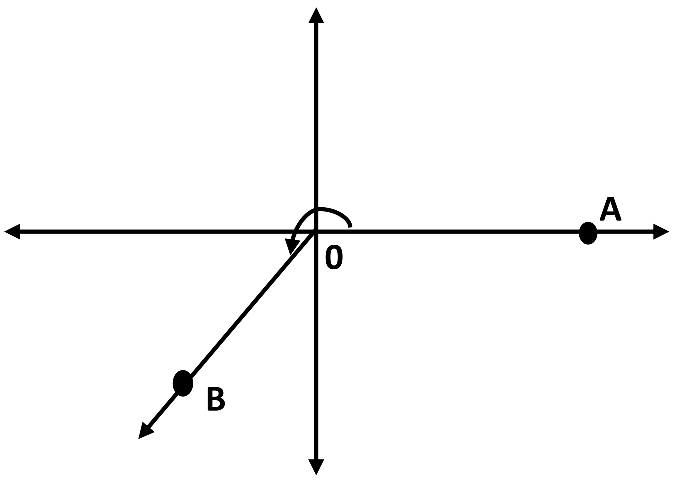
لإيجاد قيمة B نعوض قيمة A في المعادلة الأولى

$$A+B=45^\circ \Rightarrow 27^\circ+B=45^\circ \Rightarrow B=45^\circ-27^\circ \Rightarrow B=18^\circ$$

س 6 \ ارسم $\overrightarrow{A\,O\,B}$ > في وضعها القياسي اذا كان قياسها $\frac{5\pi}{4}$ = ثم جد قياسها بالتقدير الستيني ؟

الحل :-

$$\frac{Q}{D^\circ}=\frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow \frac{\frac{5\pi}{4}}{D^\circ}=\frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow D^\circ=\frac{5}{\cancel{4}}\times \overset{45}{\cancel{180^\circ}} \Rightarrow D^\circ=225^\circ$$



07817462016 07700402553

النسب المثلثية لزاوية حادة وبعض العلاقات الاساسية

ليكن ABC يمثل المثلث القائم الزاوية في C

وليكن $m \angle ABC = Q$

نسمي العدد الذي يمثل النسبة الاتية كما يلي:

١- النسبة $\frac{AC}{AB}$ تدعى جيب (Sine) الزاوية الحادة (Q)

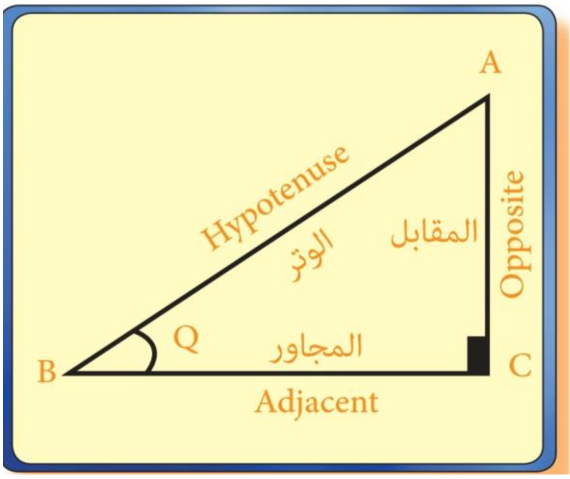
وتكتب $Sin\ Q = \frac{AC}{AB} = \frac{OPP.}{HYP.}$

2 - النسبة $\frac{BC}{AB}$ تدعى جيب تمام (Cosine) الزاوية الحادة (Q)

وتكتب $Cos\ Q = \frac{BC}{AB} = \frac{ADJ.}{HYP.}$

3- أما النسبة $\frac{AC}{BC}$ فتدعى ظل (Tangent) الزاوية الحادة (Q)

وتكتب $\tan Q = \frac{AC}{BC} = \frac{OPP.}{ADJ.}$



قوانين مهمة

$$1)\quad Sin^2 Q + Cos^2 Q = 1$$

$$2)\ \tan Q = \frac{\text{Sin Q}}{\text{Cos Q}}$$

من الشكل نطبق

(مبرهنة فيثاغورس)

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$$

النسبة المثلثية لزاوية خاصة Trigonometric Ratio :

النسب المثلثية لزوايا خاصة وهي $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 180^\circ$

Q	0°	30°	45°	60°	90°	180°
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	غير معروف	0

هذه الجدول مهم جداً يحفظ

ملاحظة :- الزاويتان 30° , 60° متتامتان

لأن $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$

لاحظ ان : $\frac{1}{2} = Cos\ 60^\circ = Sin\ 30^\circ$ وكذلك $\frac{\sqrt{3}}{2} = Sin\ 60^\circ = Cos\ 30^\circ$ اي ان جيب احدهما يساوي جيب تمام الاخرى وبالعكس. وبصورة عامة اذا كانت Q زاوية حادة فان قياس متممتها هو $(90^\circ - Q)$

ويكون : $\sin(90^\circ - Q) = \cos Q$ و $\cos(90^\circ - Q) = \sin Q$

س \ أثبت ان $\sin 60^\circ \tan 30^\circ + \tan^2 45^\circ + \cos 120^\circ + \cos 180^\circ = 0$

من أسئلة التلفزيون التربوي

الحل :- نأخذ الطرف الايسر

$$= \sin 60^\circ \tan 30^\circ + \tan^2 45^\circ + \cos 120^\circ + \cos 180^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} + (1)^2 + \cos(180^\circ - 60^\circ) + (-1)$$

$$= \frac{1}{2} + 1 - \cos 60^\circ - 1 = \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{1} = 0$$ الطرف الايمن

دائرة الوحدة والنقطة المثلثية :

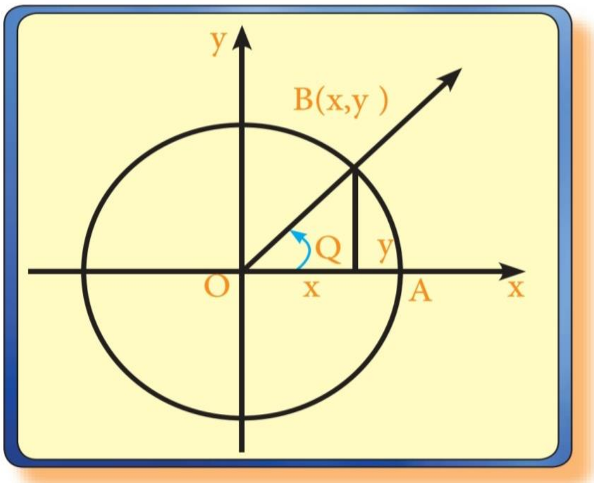
دائرة الوحدة :هي دائرة مركزها نقطة الاصل ونصف قطرها يساوي وحدة طول واحدة.

النقطة المثلثية لزاوية في الشكل $m < \overrightarrow{BOA} = Q$.
زاوية موجهة في الوضع القياسي، B نقطة تقاطع الضلع النهائي $\overrightarrow{OB}$ مع دائرة الوحدة نفرض ان B(x,y)

$$Sin\ Q = \frac{y}{1} \Rightarrow Sin\ Q = y$$

$$Cos\ Q = \frac{x}{1} \Rightarrow Cos\ Q = x$$

$$\therefore B(x, y) = (cosQ\ , SinQ)$$



ملاحظة :- باستخدام دائرة الوحدة والانعكاس على المستوي يمكن إيجاد النسب المثلثية الآتية:

sin (180°- Q) = sin Q | cos (180°- Q) = -cos Q | tan (180°- Q) = -tan Q

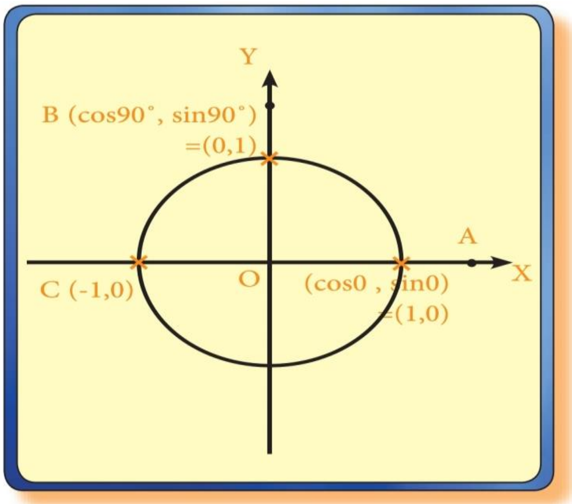
تعريف :- النقطة المثلثية Trigonometric Point للزاوية الموجهة في الوضع القياسي هي نقطة تقاطع الضلع النهائي للزاوية مع دائرة الوحدة.

لاحظ أن نقطة B هي نقطة مثلثية للزاوية $\overrightarrow{AOB}$ مما سبق يتضح أن لكل زاوية موجه Q في الوضع القياسي نقطة مثلثية (x,y) يكون $y = \sin Q$, $x = \cos Q$

مثال :- جد sin Q , cos Q , tan Q اذا علمت أن $Q = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$

الحل :-

نعلم ان 180˚ ، 90˚، 0˚ يقع الضلع النهائي لكل منها على أحد المحورين الاحداثيين . وكما في الشكل فان:



(cos 0 , sin 0) = (1 , 0) ⇒ cos 0˚ = 1 , sin 0˚ = 0

$\therefore \tan 0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \tan 0^\circ = 0$

$(\cos 90^\circ \;,\; \sin 90^\circ) = (0, 1)$

⇒ cos 90˚= 0 ، sin 90˚=1

لكن $\frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \tan 90^\circ$ غير معرف

(cos 180˚ , sin 180˚) = (-1, 0)

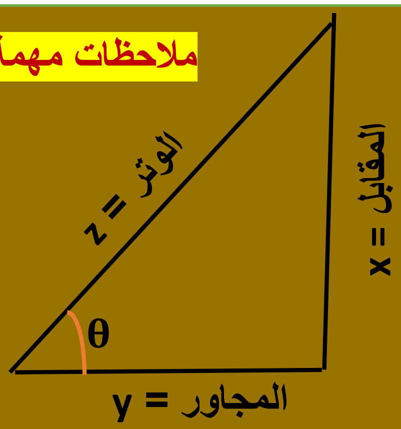
cos 180˚= -1 ، sin 180˚= 0 ⇒ tan 180˚= 0

ملاحظات مهمة في الموضوع القادم

1- $\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{x}{z}$

2- $\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{y}{z}$

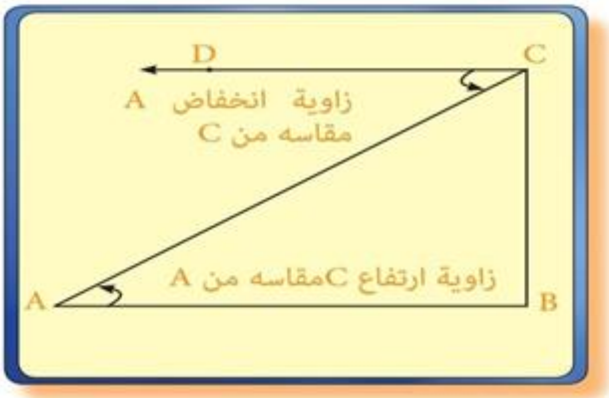
3- $\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{x}{y}$



التطبيقات الدائرية

زاويتا الارتفاع والانخفاض

نتمكن من حساب الارتفاعات والابعاد عندما نتمكن من قياس الزوايا التي نراها بها. فإذا وقف راصد في نقطة A ونظر الى نقطة C تقع فوق افق A فإن الزاوية الحاصلة بين المستقيم الواصل من عين الراصد الى نقطة C (زاوية ارتفاع C Angle of Elevation بالنسبة الى A)



مثلاً الزاوية $\measuredangle CAB$ في الشكل .

أما إذا كانت عين الراصد في C ونظر الى A التي تحت أفق C ،

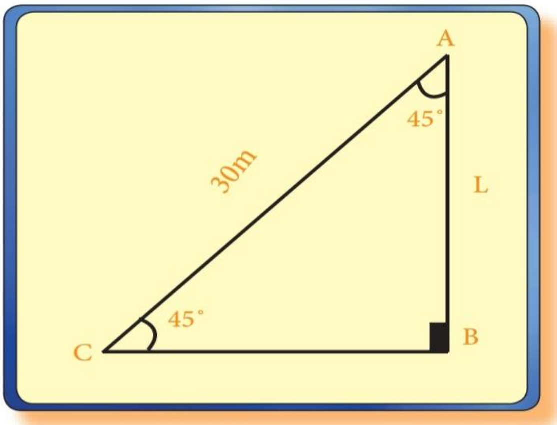
فإن الزاوية الكائنة، بين المستقيم الواصل من عين الراصد إلى

النقطة A وبين أفق C تدعى (زاوية انخفاض

Angle of Depression A بالنسبة الى C) مثلاً

الزاوية $\measuredangle ACD$ في الشكل .

مثال -: طائرة ورقية طول خيطها 30m فإذا كانت الزاوية التي يصنعها الخيط مع الأرض (مع الافق) هي 45° جد ارتفاع الطائرة الورقية عن الارض.



الحل -:

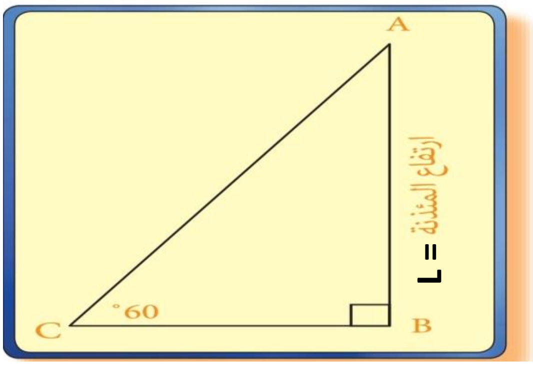
نفرض أن الارتفاع = L من وحدات الطول المثلث A B C قائم الزاوية في B .

$$\sin 45^{\circ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{L}{30} \Rightarrow \sqrt{2}L = 30 \Rightarrow L = \frac{30}{\sqrt{2}}$$

$$L = \frac{30}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow L = \frac{30\sqrt{2}}{2} \Rightarrow L = 15\sqrt{2}m$$

مثال:- وجد راصد أن زاوية ارتفاع قمة مئذنة من نقطة على الأرض تبعد 8m عن قاعدتها تساوي 60 ° فما إرتفاع المئذنة؟



الحل -: $\Delta\ A\ B\ C$ قائم الزاوية في B : نفرض أن الارتفاع = L

$$\tan 60^{\circ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

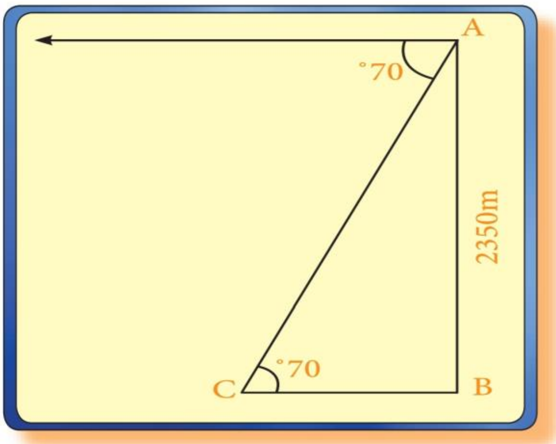
$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{L}{8} \Rightarrow L = 8\sqrt{3}\,m$$

س ١ من نقطة تبعد عن قمة بناية البنك المركزي العراقي 344m على ارض افقية وجد راصد ان زاوية الارتفاع تساوي 30° جد ارتفاع البناية .

من أسئلة التلفزيون التربوي

واجب

مثال:- جبل ارتفاعه 2350m وجد راصد من قمته أن قياس زاوية انخفاض نقطة على الارض 70 ° فما هي المسافة بين النقطة والراصد ؟ علماً أن $\sin 70^\circ = 0.9396$



الحل :- قياس زاوية الارتفاع = قياس زاوية الانخفاض

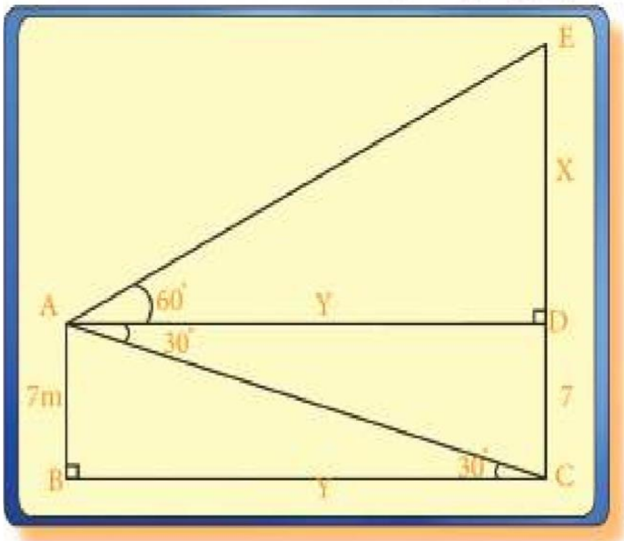
Δ ABC قائم الزاوية في B , نفرض ان الوتر = x

$$\sin 70^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$= 0.9396 = \frac{2350}{x} \Rightarrow 0.9396x = 2350$$

$$\Rightarrow x = \frac{2350}{0.9396} \Rightarrow x \cong 2500m$$

مثال :- من سطح منزل ارتفاعه 7 متر وجد راصد أن زاوية ارتفاع اعلى عماره أمامه 60° وزاوية انخفاض قاعدتها 30° , جد البعد بين الراصد والعمارة وارتفاع العمارة.



الحل :- $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ACB$

زاوية الانخفاض = زاوية الارتفاع

في $\Delta\, ABC$ قائم الزاوية في B :

$$\tan 30^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} \qquad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{7}{y}$$

البعد بين الراصد والعمارة $y = 7\sqrt{3}$

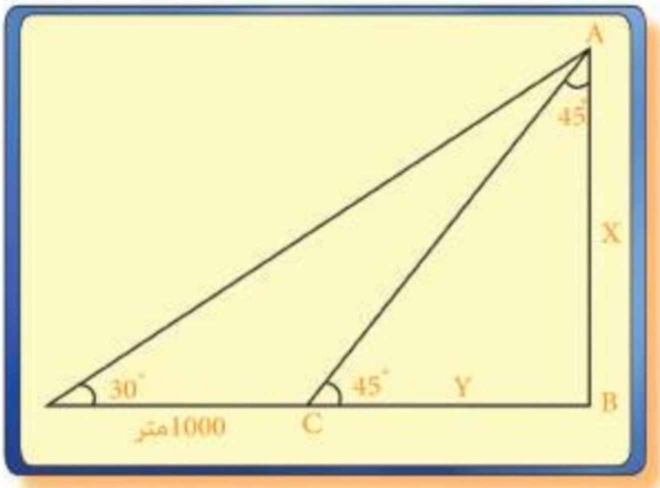
في $\Delta\, EAD$ القائم في D :

$$\tan 60^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{7\sqrt{3}} \Rightarrow x = 7 \times 3$$

$$x = 21 \Rightarrow \text{ارتفاع العمارة} = 21 + 7 = 28m$$

مثال :- شاهد راصد أن زاوية ارتفاع منطاد مثبت هي 30° ولما سار الراصد في مستوى افقي نحو المنطاد مسافة 1000 متر شاهد أن زاوية الارتفاع هي 45° جد ارتفاع المنطاد الى أقرب متر

الحل :-



Δ ABC قائم الزاوية في B

$$\tan 45^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$= 1 = \frac{x}{y} \Rightarrow y = x \quad (1)$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{y+1000} \quad (2)$$

نعوض معادلة 1 في 2

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{x+1000}$$

$$\boxed{\sqrt{3} = 1.7}$$

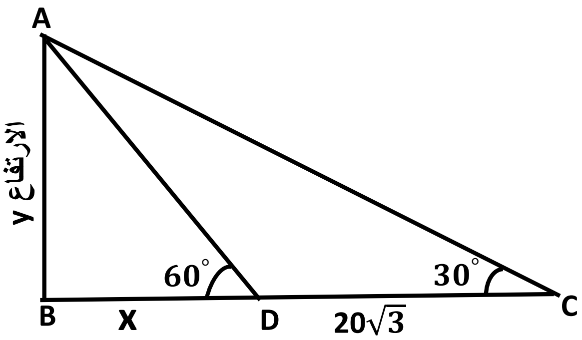
$$\sqrt{3}x = x + 1000 \Rightarrow 1.7x - x = 1000 \Rightarrow 0.7x = 1000 \Rightarrow x = \frac{1000}{0.7} = 1428.6m$$

س ١ وقف شخص في اعلى برج وأبصر شجرتين تقعان مع قاعدة البرج على استقامة واحدة ، فكانت زاوية انخفاض الشجرة الأولى 60° وزاوية انخفاض الشجرة الثانية 30° جد ارتفاع البرج اذا علمت المسافة بين الشجرتين هي $20\sqrt{3}$.

من أسئلة التلفزيون التربوي

واجب

يشبه السؤال الأول من التمارين



عزيزي الطالب
ارسل حل الواجب
على التليكرام للتأكد من صحة الحل
gl_gtt

س ١ وجد راصد ان زاوية ارتفاع قمة مئذنة من نقطة على الأرض تساوي 30° فاذا كان البعد بين الراصد وقاعدة المئذنة $104\sqrt{3}m$ فما بعد الراصد عن قمة المئذنة ؟

واجب

من أسئلة التلفزيون التربوي

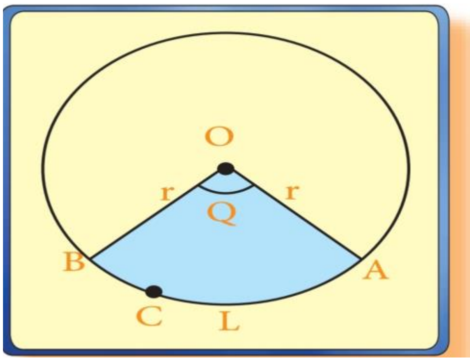
عزيزي الطالب أسئلة الواجبات هي أسئلة مشابهه لأسئلة محلولة

القطاع الدائري Circular Sector :

القطاع الدائري هو جزء من سطح دائرة محدد بقوس من الدائرة وبنصفي القطرين المارين بنهايتي القوس.

في الشكل تسمى AOB ∢ المركزية Central Angle

بزاوية القطاع الأصغر وقياسها اقل من ° 180 .



قوانين القطاع الدائري

1 - مساحة القطاع الدائري $A = \frac{1}{2} L \cdot r$ اذا اعطى بالسؤال طول القوس ونصف القطر

2 - مساحة القطاع الدائري $A = \frac{1}{2} Q r^2$ اذا اعطى بالسؤال زاوية بالتقدير الدائري ونصف القطر

3 - مساحة القطاع الدائري $A = \frac{D^\circ}{360} \times r^2 \pi$ اذا اعطى بالسؤال زاوية بالتقدير الستيني ونصف قطر

4 - محيط القطاع الدائري $P = r + r + L$

حيث ان A تمثل المساحة و L تمثل طول القوس و r نصف القطر

مثال :- جد مساحة قطاع دائري قياس زاويته يساوي ° 60 وطول نصف قطر دائرته 8cm .

الحل :-

$$A = \frac{D^{\circ}}{360^{\circ}} \times r^2\pi$$

$$A = \frac{\cancel{60^{\circ}}}{\cancel{360^{\circ}}_{6}} \times (8)^2 \times 3.14 \Rightarrow = \frac{1}{6} \times 64 \times 3.14 \Rightarrow = \frac{200.96}{6} \Rightarrow A = 33.49cm^2$$

مثال :- قطاع دائري مساحته $15cm^2$ وطول قوسه 6cm

جد 1 - طول نصف قطر دائرته، 2- محيطه ، 3- قياس زاويته بالستيني.

الحل :-

$$1)\ A = \frac{1}{2} L \cdot r \Rightarrow r = \frac{2A}{L} \Rightarrow r = \frac{2 \times 15}{6} \Rightarrow r = 5cm$$

$$2) P = r + r + L \Rightarrow P = 5 + 5 + 6 \Rightarrow P = 16cm$$

$$3)\ |Q| = \frac{L}{r} \Rightarrow |Q| = \frac{6}{5}$$

$$\frac{Q}{D^{\circ}} = \frac{\pi}{180^{\circ}} \Rightarrow \frac{\frac{6}{5}}{D^{\circ}} = \frac{\pi}{180^{\circ}} \Rightarrow D^{\circ} = \frac{6}{5} \times 180^{\circ} \times \frac{7}{22} \Rightarrow D^{\circ} = 68.7272^{\circ}$$

س \ جد مساحة قطاع دائري قياس زاويته 30° وطول نصف قطر دائرته $\sqrt{42}cm$

من أسئلة التلفزيون التربوي

واجب

الحل :-

س \ قطاع دائري مساحته $20cm^2$ وطول نصف قطر دائرته 5 cm جد محيطة

من أسئلة التلفزيون التربوي

واجب

الحل :-

القطعة الدائرية Circular Segment :

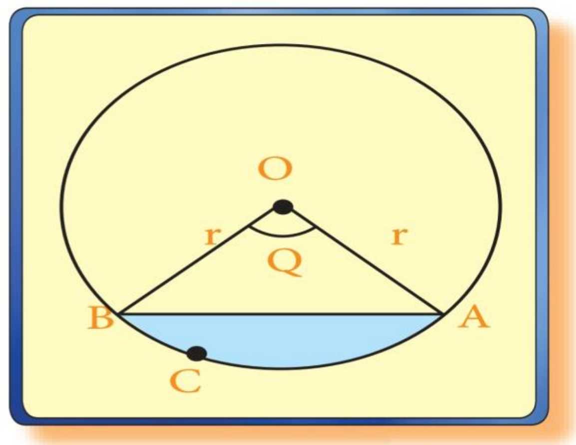
القطعة الدائرية هي جزء من سطح دائرة محدد بقوس فيها ووتر مار بنهايتي ذلك القوس. تسمى AOB> المركزية

زاوية القطعة الصغرى وقياسها اصغر من 180°

لإيجاد مساحة القطعة الدائرية:

نفرض أن Q القياس الدائري لزاوية القطعة الصغرى

∴ مساحة القطعة ACB = مساحة القطاع ($\overset{\frown}{OACB}$) - مساحة Δ OAB



نحصل على

قانون مساحة القطعة الدائرية

$$A = \frac{1}{2} r^2(Q - \sin Q)$$

مثال :- جد مساحة قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها 12cm وقياس زاويتها 30° .

الحل :-

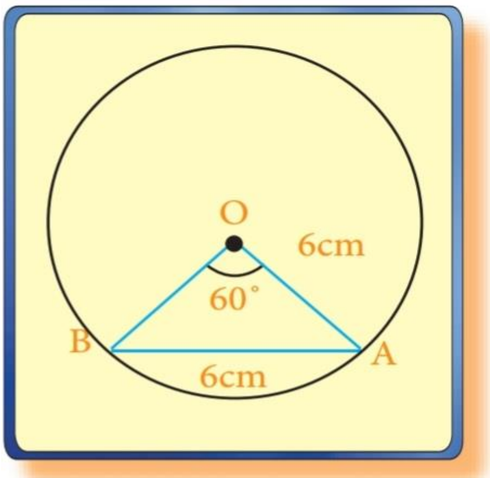
$$\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow \frac{Q}{30^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow Q = \frac{\pi \times 30^\circ}{180^\circ} \Rightarrow Q = \frac{\pi}{6}$$

$$A = \frac{1}{2} r^2(Q - \sin Q) \Rightarrow A = \frac{1}{2}(12)^2\left(\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$A = \frac{1}{\cancel{2}}(\overset{72}{\cancel{144}})\left(\frac{3.14}{6} - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow A = 72(0.5236 - 0.5) \Rightarrow A = 1.7\ cm^2$$

مثال :- O مركز دائرة نصف قطرها 6cm ، رسم فيها وتر طوله 6cm ، جد لأقرب cm^2 مساحة القطعة الدائرية الصغرى.

الحل :-



Δ AOB متساوي الاضلاع

∴ m ∢AOB = 60 °

$$\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow \frac{Q}{60^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow Q = \frac{\pi \times 60^\circ}{180^\circ}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{\pi}{3}$$

$$A = \frac{1}{2} r^2(Q - \sin Q) \Rightarrow A = \frac{1}{2}(6)^2\left(\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$A = \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{36})\left(\frac{3.14}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow A = 18\left(1.047 - \frac{1.7}{2}\right) \Rightarrow A = 18(1.047 - 0.85)$$

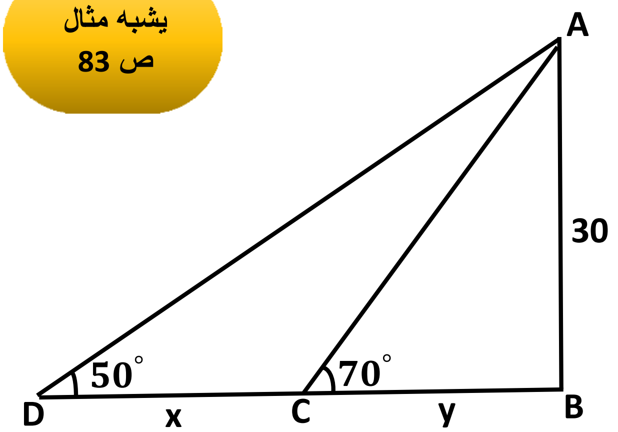
$$\Rightarrow A = 3.546\ cm^2$$

تمرينات (4 -2)

س 1 \ وقف شخص في أعلى برج وأبصر شجرتين تقعان مع قاعدة البرج على استقامة واحدة، فكانت زاوية انخفاض قاعدة الشجرة الأولى $70°$ وزاوية انخفاض قاعدة الشجرة الثانية $50°$ جد المسافة بين الشجرتين مع العلم أن ارتفاع البرج 30m، علماً أن $\tan 50^\circ = 1.2$. $\tan 70^\circ = 2.8$

يشبه مثال
ص 83

الحل :-



$$\tan 70^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$2.8 = \frac{30}{y} \Rightarrow y = \frac{30}{2.8} \Rightarrow y = 10.72m$$

$$\tan 50^\circ = \frac{30}{x+y}$$

$$1.2 = \frac{30}{x + 10.72}$$

$$1.2(x+10.72) = 30 \Rightarrow \frac{1.2(x+10.72)}{1.2} = \frac{30}{1.2}$$

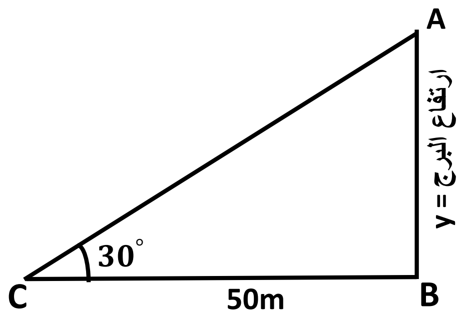
قسمنا الطرفين على 1,2

$$x + 10.72 = 25$$

$$\Rightarrow x = 25 - 10.72 \Rightarrow x = 14.28m$$

س 2 \ من نقطة تبعد عن قاعدة برج (50m) وجد أن زاوية ارتفاع قمتها 30° فما ارتفاع البرج؟

الحل :-



$$\tan 30^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{y}{50} \Rightarrow \sqrt{3}y = 50 \Rightarrow y = \frac{50}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow y = \frac{50}{1.7} \Rightarrow y = 29.4m$$

س 3 \ جد مساحة قطاع دائري طول قوسه 8cm وطول نصف قطر دائرته 3.2cm .

الحل :-

$$A = \frac{1}{2} L \cdot r \Rightarrow A = \frac{1}{\cancel{2}}(\overset{4}{\cancel{8}})(3.2) \Rightarrow A = 4 \times 3.2 \Rightarrow A = 12.8cm^2$$

س 4 \ جد مساحة قطاع دائري قياس زاويته تساوي 100° وطول نصف قطر دائرته 10cm .

الحل :-

$$A = \frac{D^\circ}{360^\circ} \times r^2\pi$$

$$A = \frac{\overset{5}{\cancel{100^\circ}}}{\underset{18}{\cancel{360^\circ}}} \times (10)^2 \times 3.14 \Rightarrow = \frac{5}{\underset{9}{\cancel{18}}} \times \overset{50}{\cancel{100}} \times 3.14 \Rightarrow = \frac{785}{9} \Rightarrow A = 87.2cm^2$$

س 5 \ قطاع دائري مساحته $37.68\ cm^2$ وطول نصف قطر دائرته 6cm جد طول قوسه.

الحل :-

$$A = \frac{1}{2}L \cdot r \Rightarrow L = \frac{2A}{r} \Rightarrow L = \frac{\cancel{2} \times 37.68}{\underset{3}{\cancel{6}}} \Rightarrow L = 12.56\ cm$$

س 6 \ نصف محيط دائرة هو 10cm . جد مساحة قطاع دائري فيها قياس زاويته 45° . واجب

الحل :-

س 7 \ جد مساحة قطعة دائرية قياس زاويتها 60° وطول نصف قطر دائرتها 8cm .

الحل :-

$$\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow \frac{Q}{60^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow Q = \frac{\pi \times 60^\circ}{180^\circ} \Rightarrow Q = \frac{\pi}{3}$$

$$A = \frac{1}{2}r^2(Q - \sin Q) \Rightarrow A = \frac{1}{2}(8)^2\left(\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$A = \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{64})\left(\frac{3.14}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow A = 32(1.047 - 0.86) \Rightarrow A = 5.984\ cm^2$$

استخدام الحاسبة في إيجاد قيم التطبيقات الدائرية

ان للزاوية نظامين للقياس هما :القياس الستيني والقياس الدائري والحاسبة تستخدم النظامين وهو ما يلاحظ أعلى مفاتيح الحاسبة اليدوية فالقياس الستيني يرمز له DEG اختصارا لكلمة (DEGREE) درجة.

اما القياس الدائري فيرمز له RAD اختصارا لكلمة (RADIAN) نصف قطري

وهذان الرمزان يظهران في أعلى الشاشة بعد الضغط على المفتاح DRG _ فالضغطة الأولى تظهر DEG والضغطة الثانية تظهر RAD وبالعكس.

وهذان الرمزان يظهران في أعلى الشاشة بعد الضغط على المفتاح ⟵ DRG فالضغطة الأولى تظهر DEG والضغطة الثانية تظهر RAD وبالعكس.

وللنسب المثلثية مفاتيح أيضاً وسنقتصر على نسبة الجيب، نسبة الجيب تمام ونسبة الظل. فالمفتاح sin يرمز الى الجيب (sine). والمفتاح cos يرمز الى الجيب تمام (cosine) . والمفتاح tan يرمز الى الظل (tangent).

طريقة استخدام الحاسبة

1- تحدد نظام الزاوية الستيني (DEG) أو الدائري (RAD) بالضغط على (DRG) .

2- تدخل الزاوية حسب النظام.

3- تضغط على مفتاح النسب المثلثية المطلوبة.

حل المثلث القائم الزاوية

يشتمل كل مثلث على ستة عناصر (ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا) ويقصد بحل المثلث إيجاد قيم عناصره المجهولة.

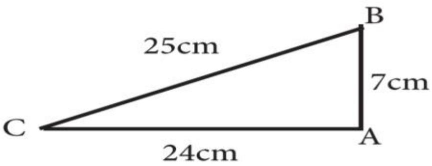
$1 - \sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

$2 - \cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

$3 - \tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

مثال :- ABC مثلث قائم الزاوية في A فيه AB = 7 cm ، AC = 24 cm جد : sin C ، tan C , sin B ، cos B

الحل :-



(مبرهنة فيثاغورس)

$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$

$(BC)^2 = (7)^2 + (24)^2 \Rightarrow (BC)^2 = 49 + 576$

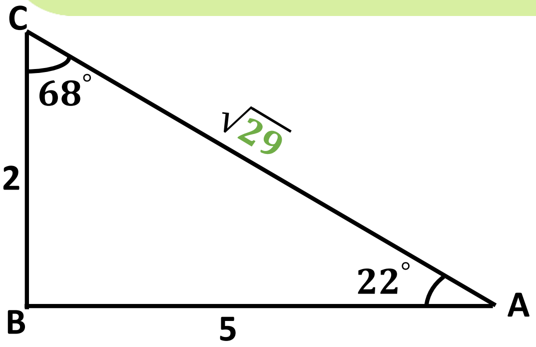
$(BC)^2 = 625$ (نجذر الطرفين) $BC = 25\ cm$

$\sin C = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \Rightarrow \sin c = \frac{7}{25}$ ★ $\tan C = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} \Rightarrow \tan c = \frac{7}{24}$

$\sin B = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \Rightarrow \sin B = \frac{24}{25}$ ★ $\cos B = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \Rightarrow \cos B = \frac{7}{25}$

مثال :- إذا كان $tan\ 22^\circ = 0.4$ أوجد : (1) $cos\ 22^\circ$, $sin\ 22^\circ$ (2) $sin\ 68^\circ$, $cos\ 68^\circ$

الحل :-



$$\tan 22^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$\therefore$ المقابل $= 2$, $\therefore$ المجاور $= 5$

(مبرهنة فيثاغورس) $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

$(AC)^2 = 4 + 25 \Rightarrow (AC)^2 = 29$ (نجذر الطرفين) $AC = \sqrt{29}$

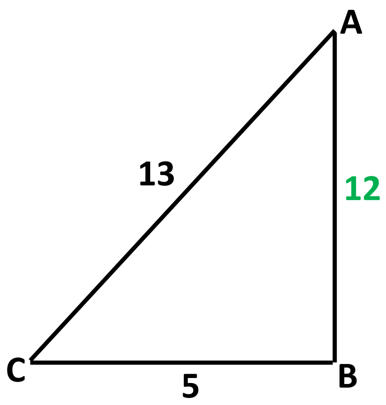
(1) - $cos\ 22^\circ = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$ ☆ $sin\ 22^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{2}{\sqrt{29}}$

(2) - $\sin 68^\circ = sin\,(90^\circ - 22^\circ) = \cos 22^\circ = \frac{5}{\sqrt{29}}$

$$\cos 68^\circ = \cos(90^\circ - 22^\circ) = \sin 22^\circ = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

مثال :- اذا علمت أن $cos\ C = \frac{5}{13}$ في Δ ABC القائم الزاوية في B. جد sin A ، tan C ، cos A .

الحل :-



$$cos\ C = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{5}{13}$$

(مبرهنة فيثاغورس) $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

$(13)^2 = (AB)^2 + (5)^2 \Rightarrow 169 = (AB)^2 + 25$

$(AB)^2 = 169 - 25 \Rightarrow (AB)^2 = 144$ (نجذر الطرفين) $AB = 12$

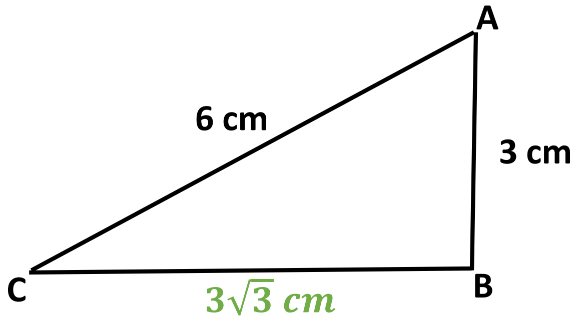
$$\sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{5}{13}$$

$$cos\ A = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{12}{13}$$

$$tan\ C = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{12}{5}$$

مثال :- حل المثلث ABC القائم الزاوية في B . اذا علمت ان AB = 3 cm , AC = 6 cm

الحل :-



(مبرهنة فيثاغورس) $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

$(6)^2 = (3)^2 + (BC)^2$

$36 = 9 + (BC)^2 \Rightarrow (BC)^2 = 36 - 9$

$(BC)^2 = 27$ نجذر الطرفين $BC = 3\sqrt{3}$

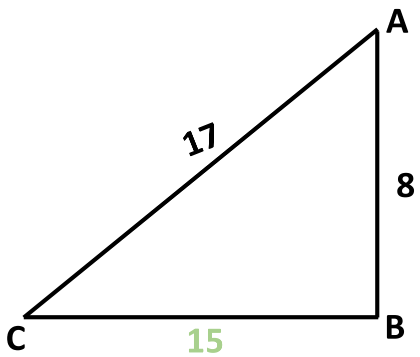
$$tan\ C = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow c = 30^\circ$$

$$m < A = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

تمرينات (3 - 4)

س 1 \ ABC مثلث قائم الزاوية في B فيه $sin\ C = \frac{8}{17}$ جد : sin A , tan C , cos C .

الحل:-



$$sin\ C = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{8}{17}$$

(مبرهنة فيثاغورس) $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

$(17)^2 = (8)^2 + (BC)^2 \Rightarrow 289 = 64 + (BC)^2$

$(BC)^2 = 289 - 64 \Rightarrow (BC)^2 = 225$ نجذر الطرفين $BC = 15$

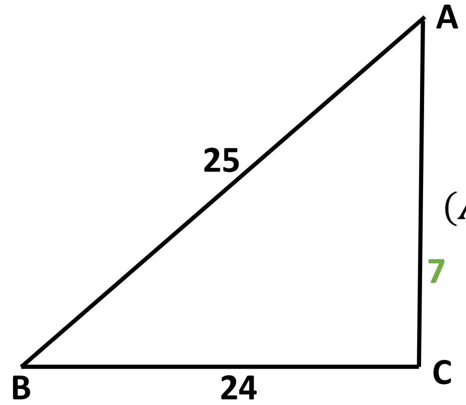
$$sin\ A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{15}{17}$$

$$tan\ C = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{8}{15}$$

$$cos\ C = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{15}{17}$$

س 2 \ ABC مثلث قائم الزاوية في C فيه AB = 25 cm ، B C = 24 cm جد قيمة $sin^2B + cos^2B$ وباستخدام المعلومات المعطاة.

الحل :-



$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$ (مبرهنة فيثاغورس)

$(25)^2 = (AC)^2 + (24)^2 \Rightarrow 625 = (AC)^2 + 576$

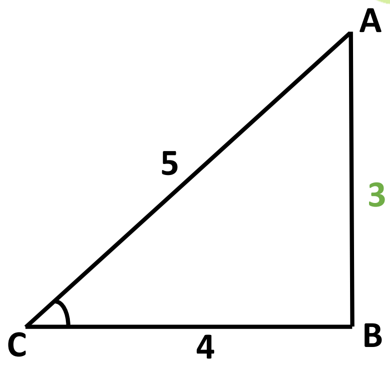
$(AC)^2 = 625 - 567 \Rightarrow (AC)^2 = 49$ نجذر الطرفين $AC = 7cm$

$$sin^2B + cos^2B = \left(\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}\right)^2 + \left(\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}\right)^2$$

$$\left(\frac{7}{25}\right)^2 + \left(\frac{24}{25}\right)^2 = \frac{49}{625} + \frac{576}{625} = \frac{625}{625} = 1$$

س 3 \ إذا كان $cos\ Q = \frac{4}{5}$ فأوجد sin Q , tan Q

الحل :-



$$cos\ Q = \frac{4}{5} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$ (مبرهنة فيثاغورس)

$(5)^2 = (AB)^2 + (4)^2 \Rightarrow 25 = (AB)^2 + 16$

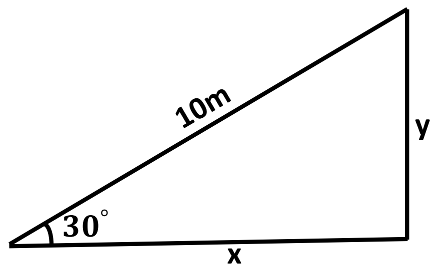
$(AB)^2 = 25 - 16 \Rightarrow (AB)^2 = 9$ نجذر الطرفين $AB = 3$

$$tan\ Q = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{3}{4}$$

$$sin\ Q = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{3}{5}$$

س 4 \ سلم طوله 10 متر مرتكز طرفه الأسفل على أرض أفقية وطرفه الآخر على حائط شاقولي فاذا كانت الزاوية بين السلم والأرض 30° فما بعد طرفه الأعلى عن الأرض وطرفه الأسفل عن الحائط؟ استعمل $\sqrt{3} = 1.73$

الحل :-



$$\cos 30^\circ = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{10}$$

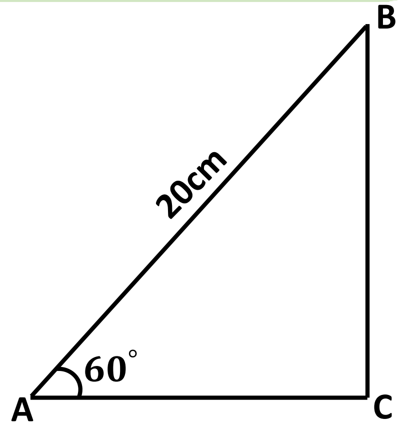
$$2x = 10\sqrt{3} \quad \boxed{\text{نقسم على } 2} \quad x = 5\sqrt{3}$$

$$x = 5 \times 1.73 \Rightarrow x = 8.65m$$

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{10}$$

$$2y = 10 \quad \boxed{\text{نقسم على } 2} \quad y = 5m$$

س 5 \ A B C مثلث قائم الزاوية في C فيه $m < C\,A\,B = 60^\circ$, A B = 20cm جد مساحة منطقته.



$$\sin 60^\circ = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{20}$$

$$2\,BC = 20\sqrt{3} \quad \boxed{\text{نقسم على } 2} \quad BC = 10\sqrt{3}cm$$

$$\cos 60^\circ = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AC}{20}$$

$$2\,AC = 20 \quad \boxed{\text{نقسم على } 2} \quad AC = 10cm$$

$$A = \frac{1}{2}(\text{القاعدة})(\text{الارتفاع})$$

$$A = \frac{1}{2} \times AC \times BC$$

$$A = \frac{1}{2} \times 10 \times 10\sqrt{3} \Rightarrow A = 50\sqrt{3}\ cm^2$$

س 6 \ جد قيمة

$$(A)\ \frac{3}{4}tan^2 30^\circ + 2\,sin\,60^\circ + 3\,tan\,45^\circ + cos^2 30^\circ - tan\,60^\circ$$

الحل :-

$$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3\times 1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \sqrt{3}$$

$$\frac{\cancel{3}}{4}\times\frac{1}{\cancel{3}} + \cancel{\sqrt{3}} + 3 + \frac{3}{4} - \cancel{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{4} + 3 + \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{4}{4} + 3 \Rightarrow 1 + 3 = 4$$

$$(B)\ cos^2 45^\circ sin\,60^\circ tan\,60^\circ cos^2 30^\circ$$

الحل :-

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

$$(C)\ sin\,120° = sin(180^\circ - 60^\circ) = sin\,60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\,135° = cos(180^\circ - 45^\circ) = -cos\,45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$tan\,150° = tan(180^\circ - 30^\circ) = -tan\,30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

س/ 7

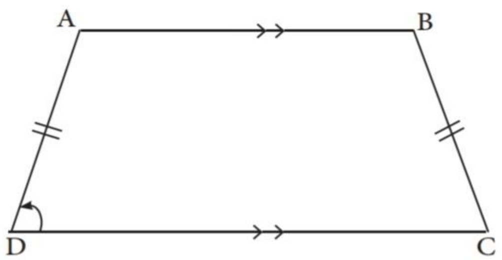
في الشكل المجاور:

ABCD شبه منحرف

فيه AD=BC

(متساوي الساقين)

AB=14cm،DC=20cm



الحل :-

$$\cos D = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \Rightarrow \cos D = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \therefore m < CDA = 60^\circ$$

الفصل الخامس :- المتجهات

مفهوم المتجه (الهندسي والجبري)

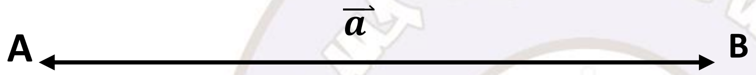
بعض الكميات الفيزيائية والرياضية مثل الطول والكتلة والزمن والحجم والمسافة وغيرها تتحدد تحدداً كاملاً بذكر عدد يدل على مقدارها فقط، مثل هذه الكميات تسمى الكميات العددية أو الكميات غير المتجهة .

وكميات أخرى مثل القوة والسرعة والإزاحة يكون الاتجاه بالإضافة الى المقدار ضرورياً في تحديدها تحديداً كاملاً مثل هذه الكميات تسمى الكميات المتجهة .نشأت فكرة المتجه أصلاً في علم الميكانيك لتمثيل القوة والسرعة والإزاحة وغيرها، واستخدمت القطعة المستقيمة المتجهة من نقطة مثل A تسمى نقطة البدء الى نقطة أخرى مثل B تسمى نقطة الانتهاء لتمثيل المتجه ويرمز عادة للمتجه بالرمز $\overrightarrow{AB}$ حيث يعني السهم أن القطعة موجهة من A الى B وقد يرمز للمتجه بحرف واحد. مثل $\vec{a}$ (مع معرفة بدايته ونهايته)

هناك اتجاهان لدراسة المتجهات :-

(1) هندسي

(2) جبري

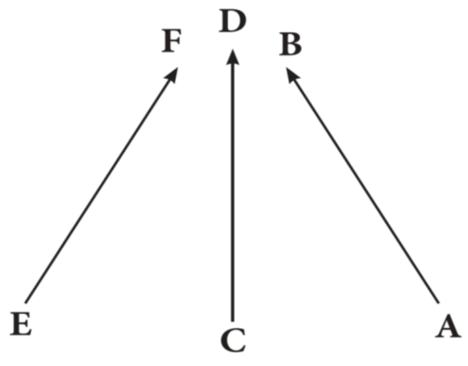


وسنؤكد في دراستنا في هذا الفصل على الاتجاه الجبري مستفيدين من الاتجاه الهندسي لأجل التوضيح.

المتجه:

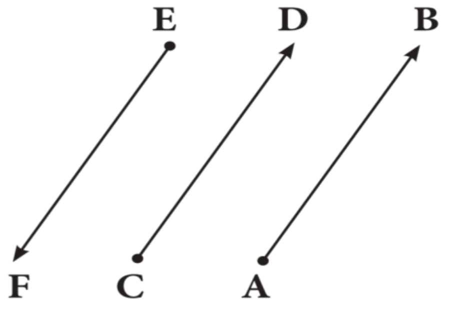
قطعة مستقيم موجهة

فالقطع AB ، CD ، EF تمثل متجهات مختلفة.



المتجهان المتوازيان:

إذا كانت قطعتاهما متوازيتين، قد يكون للمتجهين المتوازيين الاتجاه نفسه وقد يكونان بالاتجاه متعاكسين .
من الشكل نلاحظ ان $\overrightarrow{AB}$ يوازي $\overrightarrow{CD}$ ولهما نفس الاتجاه
ولكن $\overrightarrow{AB}$ يوازي $\overrightarrow{EF}$ كما انهما متعاكسان في الاتجاه

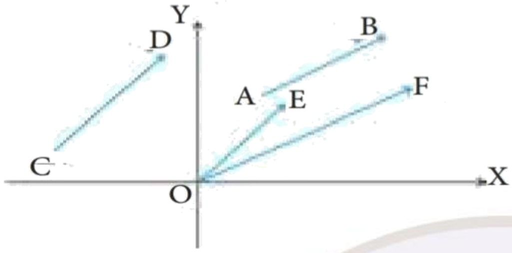


المتجهان المتكافئان : إذا كان لهما الطول نفسه والاتجاه نفسه .

المتجه المقيد Conorlical Vector

لكل متجه في المستوي يوجد متجه وحيد يكافئه يبتدئ من نقطة الأصل (0 , 0) ، لذا فبدلاً من التعامل من عدد غير منته من المتجهات المتساوية في الطول والاتجاه، سنتخذ المتجه المكافئ لها والذي يبتدئ بنقطة الأصل ممثلاً عنها جميعاً، يسمى المتجه الذي يبتدئ بنقطة الاصل بالمتجه القياسي أو المتجه المقيد .

وتسمى بقية المتجهات غير المرتبطة بنقطة الاصل (المتجه الحر أو المتجه الطليق)



لاحظ أن :

$\overrightarrow{OF}$ ، $\overrightarrow{OE}$ متجهان مقيدان

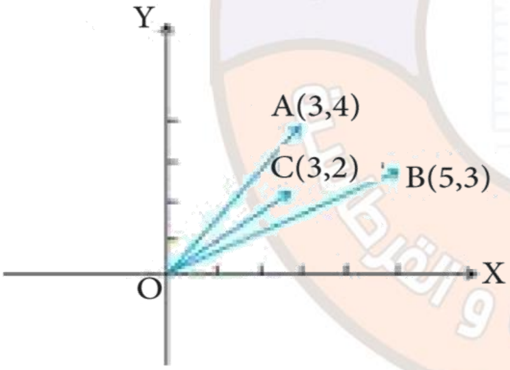
بينما $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{CD}$ متجهان طليقان

المتجهات وتمثيلها:

لقد مثلنا الزوج (4 , 3) بنقطة في المستوي المتعامد المحورين وكل زوج من الأعداد الحقيقية نستطيع تمثيله بنقطة واحدة فالزوجان المرتبان (3 , 5) ، (2 , 3) يتمثلان بالنقطتين B ، C على التوالي .

ونستطيع تمثيل الزوج المرتب من الأعداد الحقيقية بقطعة متجهة بدايتها نقطة الاصل ونهايتها الزوج المرتب المعلوم

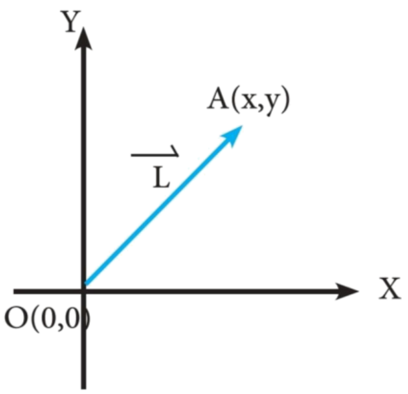
فالقطع الموجهة $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$



تمثل الأزواج المرتبة (3,4) ، (5,3) ، (3,2) .

على هذا الأساس سنمثل المتجه بزوج من الأعداد الحقيقية نكتب:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{A} = (x, y)$$



لأننا سوف نقتصر في دراستنا على المتجهات المقيدة فقط، لذا كلها تبتدئ بنقطة الأصل فنذكر النقطة النهائية فقط .

طول المتجه واتجاهه

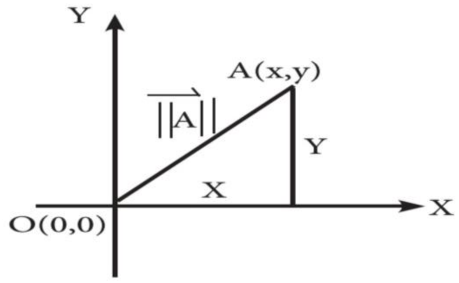
طول المتجه :

هي المسافة بين نقطة بداية المتجه ونقطة انتهائه.

فطول $\overrightarrow{AB}$ يساوي طول AB ويرمز له $||\overrightarrow{AB}||$

اذا كان $\overrightarrow{A}$ متجها حيث $A = (x,y)$ فأن :

قانون طول المتجه $||\overrightarrow{A}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$



مثال :- جد طول كل من المتجهات الأتية :

$1)\ (3,4)$

الحل :-

طول المتجه $||\overrightarrow{A}|| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(3)^2+(4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$2)\ (-12\,,-9)$

الحل :-

طول المتجه $||\overrightarrow{A}|| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-12)^2+(-9)^2} = \sqrt{144+81} = \sqrt{225} = 15$

$3)\ \left(\frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{7\sqrt{2}}{10}\right)$

الحل :-

$$||\overrightarrow{A}|| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2 + \left(\frac{7\sqrt{2}}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{100} + \frac{49 \times 2}{100}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{100} + \frac{98}{100}} = \sqrt{\frac{100}{100}} = 1$$

عزيزي الطالب أسئلة الواجبات هي أسئلة مشابهه لأسئلة محلولة

س ١ جد طول المتجه $A = \left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$

من أسئلة التلفزيون التربوي

الحل :-

عزيزي الطالب
ارسل حل الواجب
على التليكرام للتأكد من صحة الحل
gl_gtt

المتجه الصفري Zero Vector

يسمى المتجه (0,0) بالمتجه الصفري لان نقطة بدايته ونهايته هي نقطة الأصل.

ويرمز له $\vec{0}$ ، وطول $\vec{0}$ = $||\vec{0}||$ = صفر.

المتجهان المتساويان:

يقال للمتجهين (x_1 , y_1) و (x_2 , y_2) أنهما متساويان أذا وفقط إذا كان $x_1 = x_2 , y_1 = y_2$

اتجاه المتجه:

الزاوية التي يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

أيجاد اتجاه المتجه :

اذا كان $\vec{A}$ = (x , y) متجهاً فأن اتجاه $\vec{A}$ يعرف بقياس الزاوية Q حيث $0 \le Q \le 2\pi$ مقاسة باتجاه معاكس لاتجاه حركة عقارب الساعة من محور السينات الموجب الى المتجهة $\vec{A}$ لاحظ ان المتجه الصفري لا يمكن تعريف اتجاهه

الربع الأول: x, y : + , +
الزاوية $= Q$

الربع الثاني: x, y : − , +
الزاوية $- \pi = Q$

الربع الثالث: x, y : − , −
الزاوية $+ \pi = Q$

الربع الرابع: x, y : + , −
الزاوية $- 2\pi = Q$

$$\cos\theta = \frac{x}{||\vec{A}||}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{||\vec{A}||}$$

الزاوية	$\cos\theta$	$\sin\theta$
$30 = \frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$60 = \frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$45 = \frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

خطوات حل إيجاد اتجاه المتجه

١- إيجاد طول المتجه $||\vec{A}||$
٢- نطبق قانون cos Q و ثم sin Q ونجد الزاوية
٣- نستخرج Q حسب الربع

مثال :- جد طول واتجاه $\overrightarrow{OB} = (\sqrt{3}, -1)$

الحل :-

نجد طول المتجه

$$\left\|\overrightarrow{OB}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

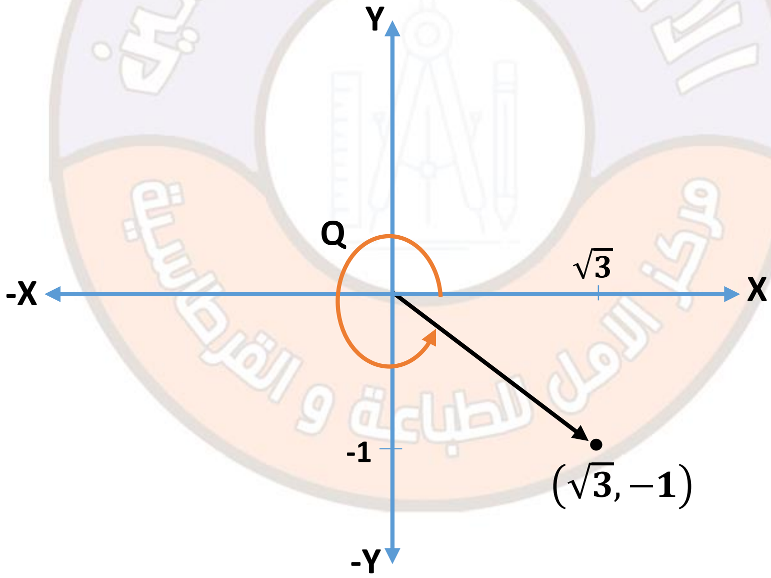
نطبق قانون cos Q و ثم sin Q ونجد الزاوية من خلال الجدول

$$\left.\begin{aligned} \cos Q &= \frac{x}{\|\overrightarrow{OB}\|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin Q &= \frac{y}{\|\overrightarrow{OB}\|} = \frac{-1}{2} \end{aligned}\right\} \text{الزاوية } \frac{\pi}{6}$$

نستخرج Q

$$Q = \underline{2\pi - \frac{\pi}{6}} = \frac{12\pi - \pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

استخدمنا هذه العلاقة لأنها تقع في الربع الرابع

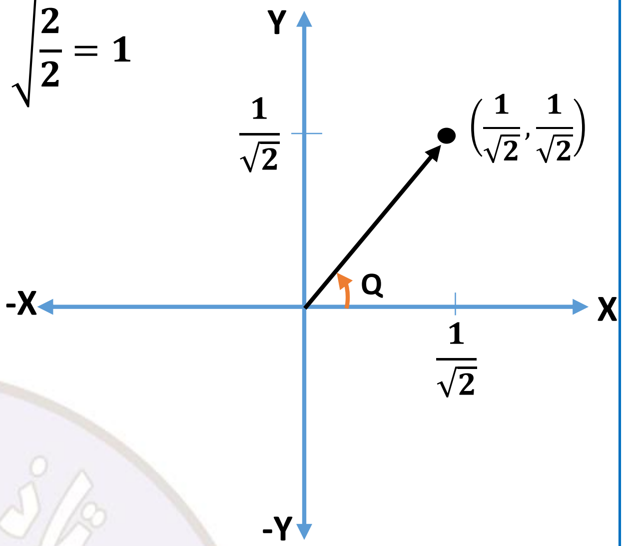


الزاوية	$\cos\theta$	$\sin\theta$
0	1	0
$90 = \frac{\pi}{2}$	0	1
$180 = \pi$	-1	0
$270 = \frac{3\pi}{2}$	0	-1

مثال :- جد اتجاه المتجه $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

الحل :-

$$\left\|\vec{A}\right\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{2}} = 1$$



$$\cos Q = \frac{x}{\|\vec{A}\|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin Q = \frac{y}{\|\vec{A}\|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

الزاوية $\frac{\pi}{4}$

$Q = \frac{\pi}{4}$ "تقع في الربع الاول"

مثال :- جد المتجه الذي طوله = 5 وحدات واتجاهه $\frac{\pi}{6}$

الحل :-

$\left\|\vec{A}\right\| = 5 \quad , \quad Q = \frac{\pi}{6}$ من خلال معلومات السؤال

$$\cos Q = \frac{x}{\|\vec{A}\|} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{6} = \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{5} \Rightarrow x = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin Q = \frac{y}{\|\vec{A}\|} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{6} = \frac{y}{5} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{5} \Rightarrow y = \frac{5}{2}$$

$\therefore$ المتجه هو $\left(\frac{5\sqrt{3}}{2},\frac{5}{2}\right)$

س :- جد المتجه $\vec{E}$ الذي طوله = 4 وحدات واتجاهه $\frac{3\pi}{2}$ ثم ارسم القطعة المستقيمة الموجهة الذي تمثله

من أسئلة التلفزيون التربوي

واجب

الحل:-

من أسئلة التلفزيون التربوي

س جد طول واتجاه المتجه $\overrightarrow{B} = (-1, -\sqrt{3})$ ثم ارسم القطعة المستقيمة الموجهة التي تمثله

الحل :-

$$\|\overrightarrow{B}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

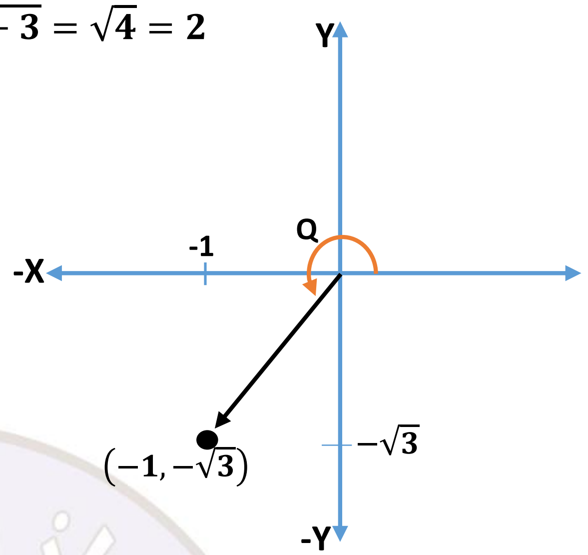
$$\cos Q = \frac{x}{\|\overrightarrow{B}\|} = \frac{-1}{2}$$

$$\sin Q = \frac{y}{\|\overrightarrow{B}\|} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

الزاوية $\frac{\pi}{3}$

$$Q = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi + \pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

استخدمنا هذه العلاقة لأنها تقع في الربع الثالث



من أسئلة التلفزيون التربوي

س جد اتجاه المتجه $\overrightarrow{C} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

واجب

الحل :-

من أسئلة التلفزيون التربوي

س :- جد المتجه $\overrightarrow{D}$ الذي طوله = 4 وحدات واتجاهه $\frac{5\pi}{6}$

واجب

عزيزي الطالب

ارسل حل الواجب

على التليكرام للتأكد من صحة الحل

gl_gtt

تمرينات (1 - 5)

س 1 \ جد طول واتجاه كل من المتجهات الآتية ثم ارسم القطعة المستقيمة الموجهة التي تمثل كلاً منها :

أ) $(-2,2)$

$$||\vec{A}|| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-2)^2+(2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

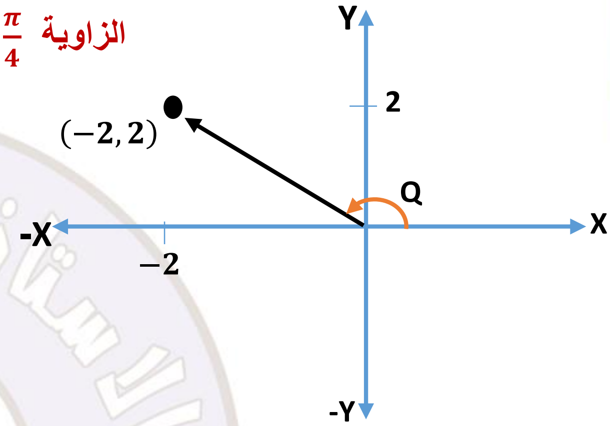
$$\cos Q = \frac{x}{||\vec{A}||} = \frac{-2}{\sqrt{8}} = \frac{-2}{\sqrt{4\times 2}} = \frac{-\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin Q = \frac{y}{||\vec{A}||} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{2}{\sqrt{4\times 2}} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

الزاوية $\frac{\pi}{4}$

$$Q = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi-\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

تقع في الربع الثاني



ب) $(-3,0)$

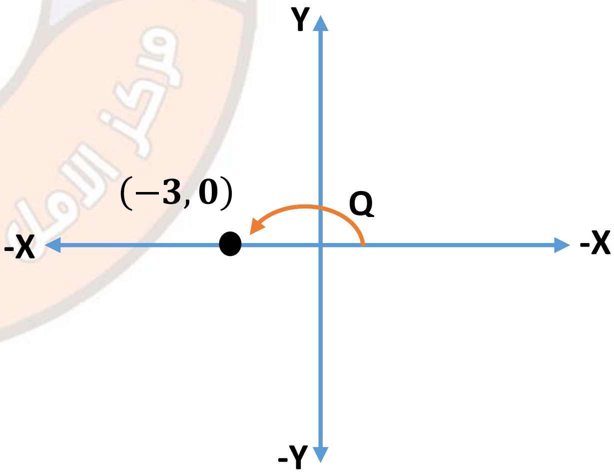
$$||\vec{A}|| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-3)^2+(0)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\cos Q = \frac{x}{||\vec{A}||} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$\sin Q = \frac{y}{||\vec{A}||} = \frac{0}{3} = 0$$

$$Q = \pi$$

تقع على الاتجاه السالب لمحور السينات



ج) $(1,\sqrt{3})$

$$||\vec{A}|| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

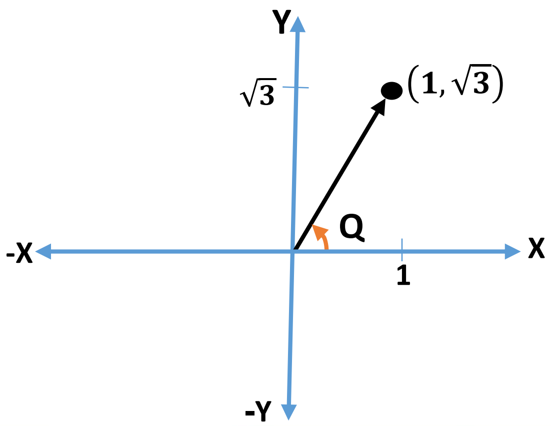
$$\cos Q = \frac{x}{||\vec{A}||} = \frac{1}{2}$$

$$\sin Q = \frac{y}{||\vec{A}||} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

الزاوية $\frac{\pi}{3}$

$$Q = \frac{\pi}{3}$$

تقع في الربع الاول



د) $(0,6)$

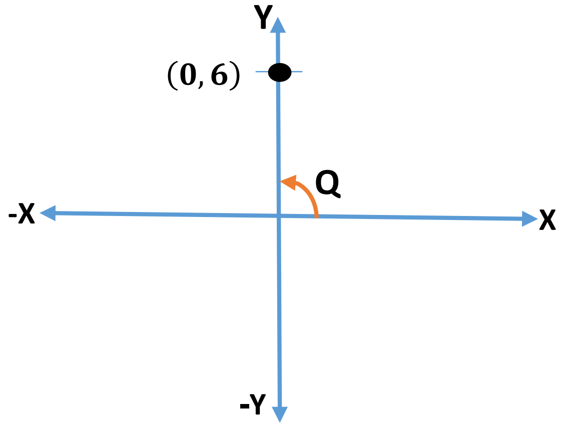
$$||\vec{A}|| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(0)^2+(6)^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\cos Q = \frac{x}{||\vec{A}||} = \frac{0}{6} = 0$$

$$\sin Q = \frac{y}{||\vec{A}||} = \frac{6}{6} = 1$$

$$Q = \frac{\pi}{2}$$

تقع على الاتجاه الموجب لمحور الصادات



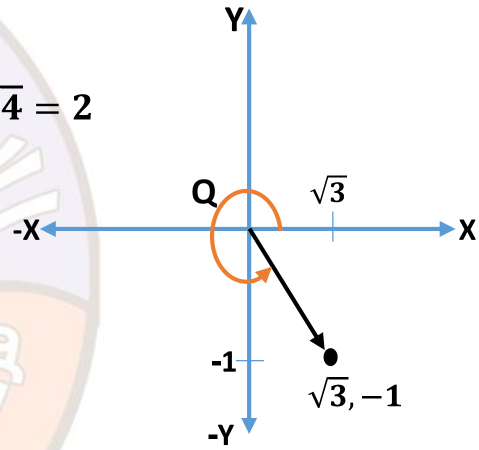
هـ) $(\sqrt{3},-1)$

$$||\vec{A}|| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\left.\begin{aligned} \cos Q &= \frac{x}{||\vec{A}||} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin Q &= \frac{y}{||\vec{A}||} = \frac{-1}{2} \end{aligned}\right\} \text{الزاوية } \frac{\pi}{6}$$

$$Q = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{12\pi-\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

تقع في الربع الرابع



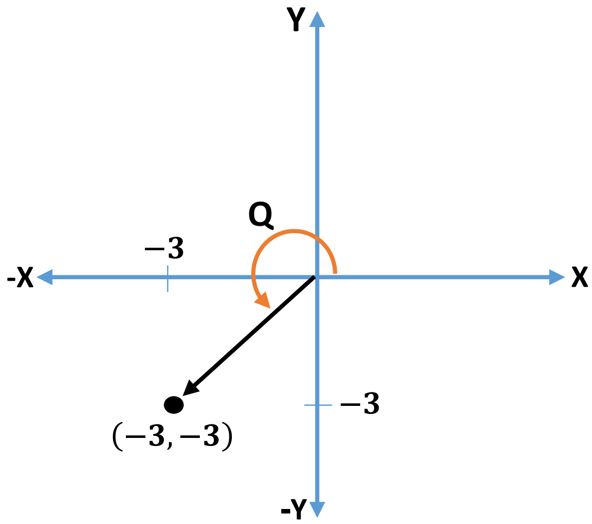
و) $(-3,-3)$

$$||\vec{A}|| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-3)^2+(-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos Q &= \frac{x}{||\vec{A}||} = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin Q &= \frac{y}{||\vec{A}||} = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \text{الزاوية } \frac{\pi}{4}$$

$$Q = \underline{\pi + \frac{\pi}{4}} = \frac{4\pi+\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

استخدمنا هذه العلاقة لأنها تقع في الربع الثالث



عزيزي الطالب أسئلة الواجبات هي أسئلة مشابهه لأسئلة محلولة

ز) $(0,-8)$ واجب

س 2 \ جد المتجه الذي طوله واتجاهه كما يلي:

A) $\left\|\overrightarrow{B}\right\| = 2 \quad , \quad Q = \frac{\pi}{6}$

$\cos Q = \frac{x}{\|\overrightarrow{B}\|} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{6} = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \frac{x}{\cancel{2}} \Rightarrow x = \sqrt{3}$

$\sin Q = \frac{y}{\|\overrightarrow{B}\|} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{6} = \frac{y}{2} \Rightarrow \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{y}{\cancel{2}} \Rightarrow y = 1$

المتجه : $\overrightarrow{B} = \left(\sqrt{3}, 1\right)$

B) $\left\|\overrightarrow{B}\right\| = \sqrt{2} \quad , \quad Q = \frac{\pi}{4}$

$\cos Q = \frac{x}{\|\overrightarrow{B}\|} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{4} = \frac{x}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}} = \frac{x}{\cancel{\sqrt{2}}} \Rightarrow x = 1$

$\sin Q = \frac{y}{\|\overrightarrow{B}\|} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{4} = \frac{y}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}} = \frac{y}{\cancel{\sqrt{2}}} \Rightarrow y = 1$

المتجه : $\overrightarrow{B} = (1, 1)$

C) $\|\overrightarrow{B}\| = 4$, $Q = \pi$

$\cos Q = \frac{x}{\|\overrightarrow{B}\|} \Rightarrow \cos\pi = \frac{x}{4} \Rightarrow -1 = \frac{x}{4} \Rightarrow x = -4$

$\sin Q = \frac{y}{\|\overrightarrow{B}\|} \Rightarrow \sin\pi = \frac{y}{4} \Rightarrow 0 = \frac{y}{4} \Rightarrow y = 0$

المتجه : $\overrightarrow{B} = (-4, 0)$

D) $\|\overrightarrow{B}\| = 3$, $Q = \frac{3\pi}{2}$

$\cos Q = \frac{x}{\|\overrightarrow{B}\|} \Rightarrow \cos\frac{3\pi}{2} = \frac{x}{3} \Rightarrow 0 = \frac{x}{3} \Rightarrow x = 0$

$\sin Q = \frac{y}{\|\overrightarrow{B}\|} \Rightarrow \sin\frac{3\pi}{2} = \frac{y}{3} \Rightarrow -1 = \frac{y}{3} \Rightarrow y = -3$

المتجه : $\overrightarrow{B} = (0, -3)$

E) $\|\overrightarrow{B}\| = 4$, $Q = \frac{2\pi}{3}$ واجب

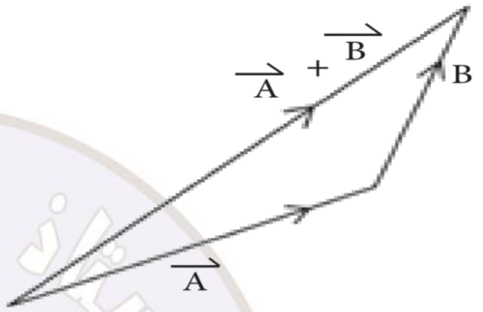
عزيزي الطالب
ارسل حل الواجب
على التليكرام للتأكد من صحة الحل
gl_gtt

عزيزي الطالب أسئلة الواجبات هي أسئلة مشابهه لأسئلة محلولة

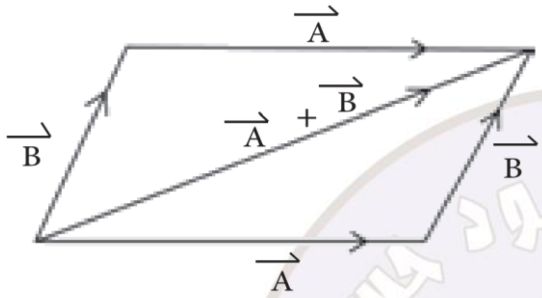
جمع المتجهات وضربها بعدد حقيقي

جمع المتجهات:

لجمع متجهين مثل $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{A}$ هندسياً نرسم أحدهما ومن نقطة انتهائه المتجه الآخر ويكون المتجه الذي يبتدئ بنقطة بدء المتجه الاول وينتهي بنقطة انتهاء المتجه الثاني هو حاصل جمع المتجهين (لاحظ الشكل الاول) ويتم إيجاد مجموع متجهين بطريقة متوازي الاضلاع، إذ يمثل المجموع قطر متوازي الاضلاع الذي يكون المتجهان ضلعين متجاورين فيه كما في(الشكل الثاني)

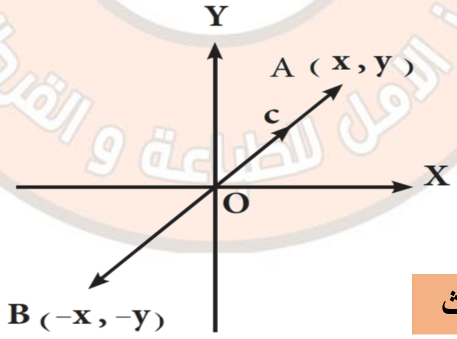


الشكل الاول



الشكل الثاني

قد يقع متجهان على مستقيم واحد عندئذ يقال أنهما على استقامة واحدة كما في المتجهان $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{A}$ بينما المتجهان $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{A}$ متضادان في الاتجاه كما في (الشكل الثالث)



الشكل الثالث

فاذا كان المتجهان $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{A}$ على استقامة واحدة وكانا متساويين في الطول ومتعاكسين في الاتجاه

وكان $\overrightarrow{A}=(x,y)$ فأن $\overrightarrow{B}=(-x,-y)$ لاحظ $\left\|\overrightarrow{A}\right\|=\left\|\overrightarrow{B}\right\|=\sqrt{x^2+y^2}$

يرمز لسالب المتجه A بالرمز $-\overrightarrow{A}$.

تعريف

إذا كان $\overrightarrow{B}=(x_2,y_2)$ ، $\overrightarrow{A}=(x_1,y_1)$ فان:

$$\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}=(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2\,,\,y_1+y_2)$$

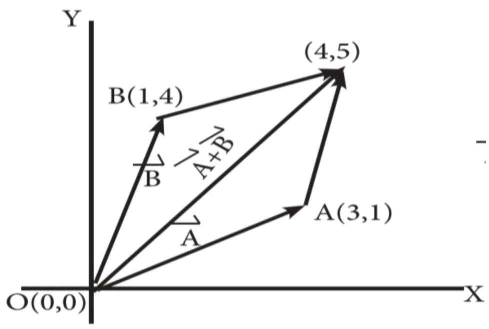
مثال :- أذا كان $\vec{B} = (1,4)$, $\vec{A} = (3,1)$ فجد $\vec{A} + \vec{B}$

الحل :-

$$\vec{A} + \vec{B} = (3,1) + (1,4) = (4,5)$$

ويمكن توضيح ذلك هندسياً كما في الشكل

لاحظ أن $\vec{A} + \vec{B}$ يمثل قطر متوازي الاضلاع المكمل للمتجهين $\vec{A}$, $\vec{B}$



مثال :- اذا كان $\vec{B} = (5\,,-2)$, $\vec{A} = (-4\,,\ 3)$ فأوجد $\vec{A} + \vec{B}$

الحل :-

$$\vec{A} + \vec{B} = (-4\,,3) + (5,-2) = (1,1)$$

خواص جمع المتجهات:

(1) الانغلاق: إذا كان كل من $\vec{B}$ ، $\vec{A}$ متجهاً فان $\vec{A} + \vec{B}$ متجهاً أيضاً .

(2) التجميع: إذا كان كل من $\vec{C}$ ، $\vec{B}$ ، $\vec{A}$ متجهاً

فان $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$

(3) التبديل: إذا كان كل من $\vec{B}$ ، $\vec{A}$ متجهاً فان $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

(4) وجود المحايد الجمعي: المتجه الصفري هو العنصر المحايد لعملية الجمع في المتجهات

ومعناه: إذا كان $\vec{A}$ أي متجه فان $\vec{A} + (0,0) = (0,0) + \vec{A} = \vec{A}$

(5) وجود النظير الجمعي: إذا كان $\vec{A}$ أي متجه فيوجد متجه آخر هو $\vec{B} = -\vec{A}$

بحيث $\vec{A} + (\vec{B}) = (\vec{B}) + \vec{A} = (0,0)$

(6) خاصية الحذف: اذا كان $\vec{B}$ ، $\vec{A}$ متجهاً وكان $\vec{A} + \vec{B} = \vec{A} + \vec{C}$ فان $\vec{B} = \vec{C}$

مثال :- جد النظير الجمعي للمتجه $(-2,3)$

الحل :-

النظير الجمعي للمتجه $(-2\,,3)$ هو $(2\,,-3)$ لأن :

$$(-2\,,3) + (2\,,-3) = (-2+2,\ 3+(-3)) = (0\,,0)$$

ضرب المتجه بعدد حقيقي:

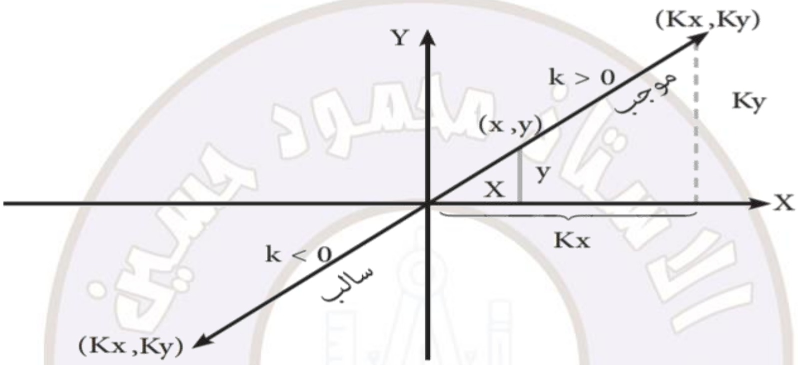
تعريف(6 - 5)

إذا كان $\overrightarrow{A} = (x , y)$ وكان K أي عدد حقيقي فإن $K\overrightarrow{A} = \overrightarrow{A}K = (Kx , Ky)$ ويمكن توضيح هذا التعريف هندسياً كما يلي :

نفرض أن $\overrightarrow{A} = (x , y)$ فإن $\overrightarrow{KA}$ يمثل متجهاً على إستقامة $\overrightarrow{A}$ وطوله يساوي $K \|\overrightarrow{A}\|$ أي K مرة بقدر طول المتجه $\overrightarrow{A}$ عندما يكون $K > 0$ وله اتجاه المتجه $\overrightarrow{A}$ نفسه .

لاحظ الشكل (13 - 5) أما إذا كانت $K < 0$ (سالبة) فان المتجه $K\overrightarrow{A}$ يقع على إستقامة $\overrightarrow{A}$ وطوله يساوي $K \|\overrightarrow{A}\|$.

أي K مرة بقدر طول $\overrightarrow{A}$ وله إتجاه معاكس لاتجاه $\overrightarrow{A}$.



مثال :- أذا كان $\overrightarrow{C} = (3,-1)$ فجد $-3\overrightarrow{C}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{C}$, $2\overrightarrow{C}$

الحل :-

$$2\overrightarrow{C} = 2(3,-1) = (6,-2)$$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{C} = \frac{1}{2}(3,-1) = \left(\frac{3}{2},\frac{-1}{2}\right)$$

$$-3\overrightarrow{C} = -3(3,-1) = (-9,3)$$

مثال :- اذا كان $\overrightarrow{B} = (4,3)$, $\overrightarrow{A} = (3,-2)$ وكان $K = 3$, $L = -2$

جد $(1)\ \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$ $(2)\ K\overrightarrow{A}$ $(3)\ L\overrightarrow{B}$ $(4)\ K\overrightarrow{A} + L\overrightarrow{B}$

الحل :-

1) $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = (3+4, -2+3) = (7,1)$

2) $K\overrightarrow{A} = 3(3,-2) = (9,-6)$

3) $L\overrightarrow{B} = -2(4,3) = (-8,-6)$

4) $K\overrightarrow{A} + L\overrightarrow{B} = (9,-6) + (-8,-6) = (1,-12)$

خواص عملية ضرب المتجهات بعدد حقيقي:

(1) خاصية التوزيع: لكل $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}$ متجه ، K عدد حقيقي يكون :

$$K(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}) = K\overrightarrow{A} + K\overrightarrow{B}$$

كذلك $(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B})K = \overrightarrow{A}K + \overrightarrow{B}K$

(2) خاصية التجميع: لكل $\overrightarrow{A}$ متجه وكل من $K , L \in R$ يكون:

$$(K \times L)\overrightarrow{A} = K(L\overrightarrow{A}) = L(K\overrightarrow{A})$$

(3) خاصية الحذف: لكل $\overrightarrow{A} , \overrightarrow{B}$ متجه، $K \in R$ حيث $K \neq$ صفر

فاذا كان $K\overrightarrow{A} = K\overrightarrow{B}$ فان $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B}$ وبالعكس .

(4) $1 \times \overrightarrow{A} = \overrightarrow{A} \times 1 = \overrightarrow{A}$

(5) $0 \times \overrightarrow{A} = \overrightarrow{A} \times 0 = \overrightarrow{0}$

س :- اذا كان $\overrightarrow{B} = (5,-2)$, $\overrightarrow{A} = (-4,3)$ فأوجد $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$ موضحا ذلك بالرسم

من أسئلة التلفزيون التربوي

واجب

يشبه المثال الاول ص 13

طرح متجهين:

اذا كان كل من $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{A}$ متجهاً فان $\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}$ يعرف أنه $\overrightarrow{A} + (-\overrightarrow{B})$

نضع المتجه الأول كما هو وثم نحول عملية الطرح الى الجمع مع قلب إشارات المتجه الثاني

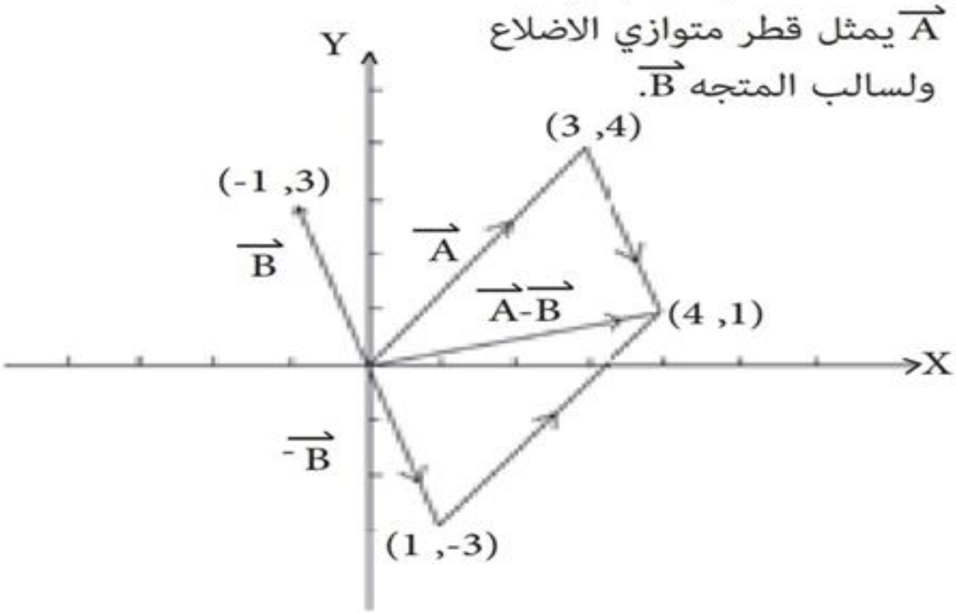
مثال :- اذا كان $\overrightarrow{A} = (3,4)$, $\overrightarrow{B} = (-1,3)$ جد $\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}$

الحل :-

$\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} = \overrightarrow{A} + (-\overrightarrow{B}) = (3 , 4) + (1 , -3) = (4 , 1)$

ويمكن توضيح ذلك هندسياً كما يأتي:

أي أنه: $\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}$ يمثل قطر متوازي الاضلاع للمتجه $\overrightarrow{A}$ ولسالب المتجه $\overrightarrow{B}$.



"عزيزي الطالب أسئلة الواجبات هي أسئلة مشابهه لأسئلة محلولة"

من أسئلة التلفزيون التربوي

س :- اذا كان $\overrightarrow{A} = (4 , 1)$, $\overrightarrow{B} = (2 , 3)$ فأوجد $\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}$ موضحا ذلك بالرسم

الحل :-

واجب

يشبه المثال السابق

مثال :- اذا كان $\overrightarrow{A} = (2,3)$, $\overrightarrow{B} = (-2,-1)$, $K = 2$, $L = -1$

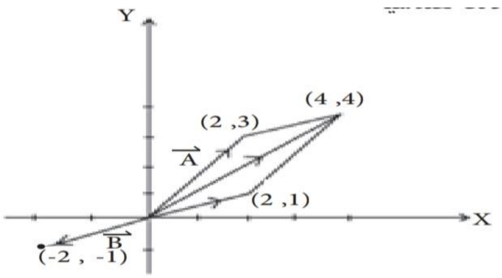
(1) $\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}$ $(2) K\overrightarrow{A} - L\overrightarrow{B}$ ووضح ذألك هندسياً

الحل:-

(1) $\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} = (2,3) - (-2,-1)$

$= (2,3) + (2,1) = (4,4)$

والشكل يوضح ذلك:

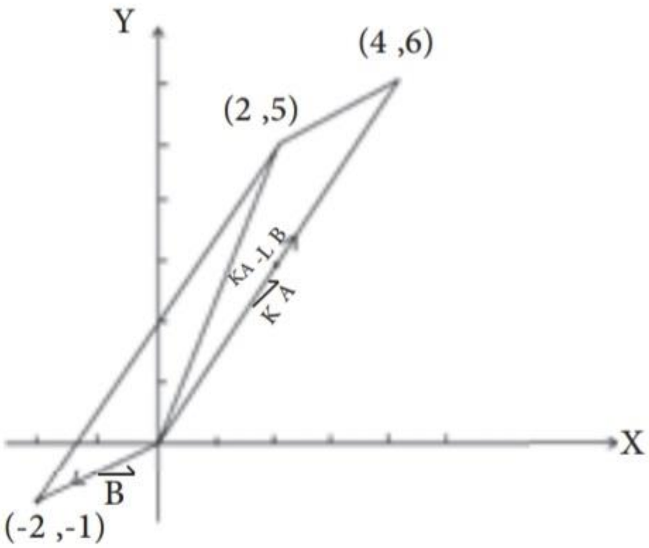


(2) $K\overrightarrow{A} - L\overrightarrow{B} = 2(2,3) - (-1)(-2,-1)$

$= (4,6) + (-2,-1)$

$= (2,5)$

ويوضح ذلك بالرسم الآتي:



نرسم $\overrightarrow{A}$ ثم نمدّه بقدر طوله فنحصل على $2\overrightarrow{A}$ ثم نرسم B ونجد $-\overrightarrow{B}$

ثم $\overrightarrow{B} = -\overrightarrow{B} \times -1$ أي اننا نعود

الى $\overrightarrow{B}$ ثانية ثم نجمع $2\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$

كما فعلنا في السؤال السابق .

إعطاء المتجه بدلالة متجهي الوحدة في المستوي

متجه الوحدة : Unit Vector

(1) متجه الوحدة الاساسي $\overrightarrow{U_1}$ هو القطعة المستقيمة الموجهه التي بدايتها نقطة الاصل وطولها وحدة واحدة واتجاهها هو الاتجاه الموجب لمحور السينات ويرمز له $\overrightarrow{U_1} = (1,0)$

(2) متجه الوحدة الأساسي $\overrightarrow{U_2}$ هو القطعة المستقيمة الموجهه التي بدايتها نقطة الأصل وطولها وحدة واحده واتجاهها هو الاتجاه الموجب لمحور الصادات ويرمز له $\overrightarrow{U_2} = (1,0)$

$$\overrightarrow{C} = (x,y)$$

$$\overrightarrow{C} = x\overrightarrow{U_1} + y\overrightarrow{U_2}$$

بدلالة متجه الوحدة	المتجه $(x.y)$
$2\overrightarrow{U_1} + 5\overrightarrow{U_2}$	$(2,5)$
$-2\overrightarrow{U_1} - 3\overrightarrow{U_2}$	$(-2,-3)$
$-4\overrightarrow{U_1} + 2\overrightarrow{U_2}$	$(-4,2)$
$6\overrightarrow{U_2}$	$(0,6)$
$9\overrightarrow{U_1}$	$(9,0)$
$-3\overrightarrow{U_1}$	$(-3,0)$
$-2\overrightarrow{U_2}$	$(0,-2)$
$-3\overrightarrow{U_1} + 5\overrightarrow{U_2}$	$(-3,5)$ من أسئلة التلفزيون التربوي

مثال :- إذا كان $\overrightarrow{B} = (-5,3)$, $\overrightarrow{A} = (4,7)$ جد $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$ وعبر عن الناتج بدلالة متجهي الوحدة.

الحل :-

$$\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = (4,7) + (-5,3) = (-1,10) = -1\overrightarrow{U_1} + 10\overrightarrow{U_2}$$

مثال :- اذا كان $\overrightarrow{B} = 2\overrightarrow{U_1} + \overrightarrow{U_2}$, $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{U_1} - 3\overrightarrow{U_2}$ جد $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$

الحل:-

$$\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = \left(\overrightarrow{U_1} - 3\overrightarrow{U_2}\right) + \left(2\overrightarrow{U_1} + \overrightarrow{U_2}\right) = 3\overrightarrow{U_1} - 2\overrightarrow{U_2} = (3,-2)$$

مثال :- إذا كان $\overrightarrow{A} = (5,-3)$ وكان $\overrightarrow{B} = (-3,4)$ وكان $K = 2, L = 3$ جد $K\overrightarrow{A} - L\overrightarrow{B}$ ثم عبر عنه بدلالة متجهي الوحدة.

الحل:-

$$K\overrightarrow{A} - L\overrightarrow{B} = 2(5,-3) - 3(-3,4)$$
$$= (10,-6) - (-9,12)$$
$$= (10,-6) + (9,-12)$$
$$= (19,-18)$$
$$= 19\overrightarrow{U_1} - 18\overrightarrow{U_2}$$

مثال :- إذا كان $\overrightarrow{A} = (-3,2)$ وكان $\overrightarrow{B} = (1,-4)$ وكان $K = 2, L = -1$ جد $K\overrightarrow{A} - L\overrightarrow{B}$ ثم عبر عنه بدلالة متجهي الوحدة.

من أسئلة التلفزيون التربوي

واجب

س جد مقدار واتجاه المتجه التالي موضحا ذلك بالرسم $2\overrightarrow{U_1} + 2\overrightarrow{U_2}$

واجب

الحل :-

تمرينات (2 - 5)

س 1 / جد مقدار واتجاه كلّ من المتجهات الآتية موضحاً بالرسم:

1) (-2 , -2)

الحل :-

$$\vec{A} = (-2, -2)$$

$$\left\| \vec{A} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

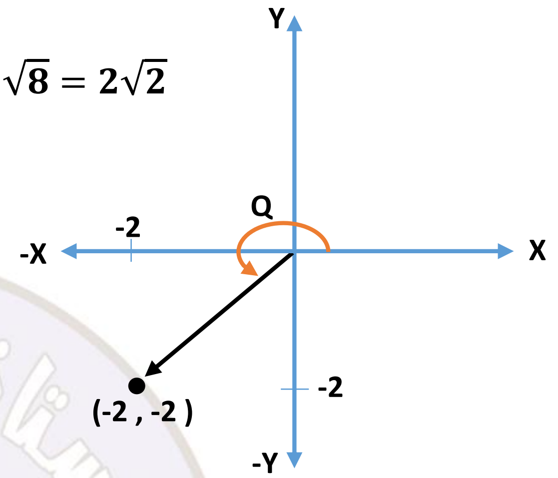
$$\cos Q = \frac{x}{\|\vec{A}\|} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin Q = \frac{y}{\|\vec{A}\|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

الزاوية $\frac{\pi}{4}$

تقع في الربع الثالث

$$Q = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi + \pi}{4} = \frac{5\pi}{3}$$



2) (3 , 0)

الحل :-

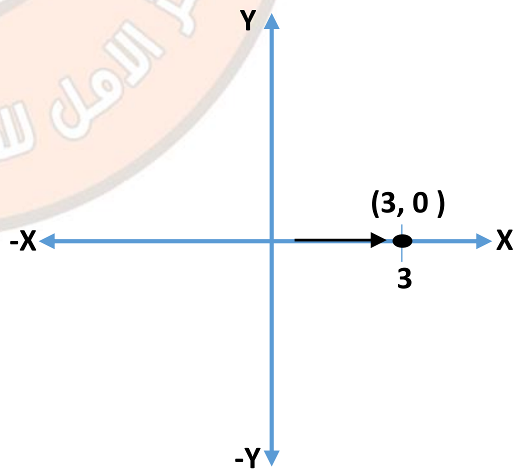
$$\vec{A} = (3, 0)$$

$$\left\| \vec{A} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3)^2 + (0)^2} = \sqrt{9 + 0} = \sqrt{9} = 3$$

$$\cos Q = \frac{x}{\|\vec{A}\|} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\sin Q = \frac{y}{\|\vec{A}\|} = \frac{0}{3} = 0$$

$$Q = 0^\circ$$



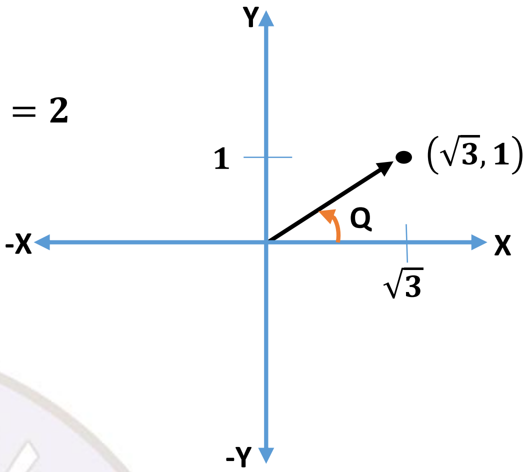
3) $\sqrt{3}\,\overrightarrow{U_1} + \overrightarrow{U_2}$

الحل :-

$\sqrt{3}\,\overrightarrow{U_1} + \overrightarrow{U_2} = (\sqrt{3}, 1)$

$\overrightarrow{A} = (\sqrt{3}, 1)$

$\left|\left|\overrightarrow{A}\right|\right| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$



$$\left.\begin{array}{l} \cos Q = \dfrac{x}{||\overrightarrow{A}||} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \\ \sin Q = \dfrac{y}{||\overrightarrow{A}||} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \text{الزاوية } \frac{\pi}{6}$$

$Q = \dfrac{\pi}{6}$

تقع في الربع الاول

4) $-1\,\overrightarrow{U_1} - 2\overrightarrow{U_2}$

الحل :-

$-1\overrightarrow{U_1} - 2\overrightarrow{U_2} = (-1, -2)$

$\overrightarrow{A} = (-1, -2)$

$\left|\left|\overrightarrow{A}\right|\right| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$\cos Q = \dfrac{x}{||\overrightarrow{A}||} = \dfrac{-1}{\sqrt{5}}$

$\sin Q = \dfrac{y}{||\overrightarrow{A}||} = \dfrac{-2}{\sqrt{5}}$

الزاوية غير قياسية

س 2 \ بسط مايأتي :

1) $4(1,-1) = (4,-4)$

2) $2(1,-1) = (2,-2)$

3) $-7(1,5) = (-7,-35)$

4) $3(2,-1) + 4(-1,5) = (6,-3) + (-4,20) = (2,17)$

5) $4(-1,5) = (-4,20)$

6) $7(3\vec{U}_1, 2\vec{U}_2) = 7(3,2) = (21,14)$

7) $-4(2\vec{U}_1, -\vec{U}_2) = -4(2,-1) = (-8,4)$

س 3 \ عبرّ عن كل من المتجهات الآتية بواسطة متجهي الوحدة $\vec{U}_1 . \vec{U}_2$

بدلالة متجه الوحدة	المتجه$(x.y)$
$-\vec{U}_1 + 4\vec{U}_2$	$(-1,4)$
$-3\vec{U}_1 - 5\vec{U}_2$	$(-3,-5)$
$-\vec{U}_2$	$(0,-1)$
$5\vec{U}_1 + 3\vec{U}_2$	$(5,3)$
$2\vec{U}_1$	$(2,0)$
$2\vec{U}_1 + 3\vec{U}_2$	$(2,3)$

س 4 \ اذا كان $\vec{E} = (x,y)$ حيث $x . y \in R$ وكان $\vec{A}$ أي متجه بحيث $\vec{A} + \vec{E} = \vec{E} + \vec{A} = \vec{A}$

برهن على ان $\vec{E} = (0,0)$

الحل :-

$$\vec{A} + \vec{E} = \vec{A} \Rightarrow \vec{E} = \vec{A} + (\overrightarrow{-A}) \Rightarrow \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = (0,0)$$

$$\vec{E} + \vec{A} = \vec{A} \Rightarrow \vec{E} = \vec{A} + (\overrightarrow{-A}) \Rightarrow \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = (0,0)$$

س 5 \ اذا كان $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} = (0,0)$ اثبت ان $\vec{A} = \overrightarrow{-B}$

الحل :-

$$\vec{A} + \vec{B} = (0,0) \Rightarrow \vec{A} = (0,0) + (\overrightarrow{-B}) \Rightarrow \vec{A} = \overrightarrow{-B}$$

$$\vec{B} + \vec{A} = (0,0) \Rightarrow \vec{A} = (0,0) + (\overrightarrow{-B}) \Rightarrow \vec{A} = \overrightarrow{-B}$$

س 7+6 \ إذا كان $\overrightarrow{A} = (\sqrt{3},1)$ وكان $\overrightarrow{B} = (\sqrt{2},\sqrt{3})$ وكان $L=-2$, $K=3$ جد مما كلاً مما يأتي ثم عبر عنه بدلالة متجهي الوحدة.

1) $K\overrightarrow{B} = 3(\sqrt{2},\sqrt{3}) = (3\sqrt{2},3\sqrt{3}) = 3\sqrt{2}\,\overrightarrow{U_1} + 3\sqrt{3}\,\overrightarrow{U_2}$

2) $L\overrightarrow{A} = -2(\sqrt{3},1) = (-2\sqrt{3},-2) = -2\sqrt{3}\,\overrightarrow{U_1} - \overrightarrow{U_2}$

3) $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = (\sqrt{3},1) + (\sqrt{2},\sqrt{3}) = (\sqrt{3}+\sqrt{2}, 1+\sqrt{3}) = (\sqrt{3}+\sqrt{2})\,\overrightarrow{U_1} + (1+\sqrt{3})\,\overrightarrow{U_2}$

4) $K\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = 3(\sqrt{3},1) + (\sqrt{2},\sqrt{3}) = (3\sqrt{3},3) + (\sqrt{2},\sqrt{3}) = (3\sqrt{3}+\sqrt{2}, 3+\sqrt{3})$
$= (3\sqrt{3}+\sqrt{2})\,\overrightarrow{U_1} + (3+\sqrt{3})\,\overrightarrow{U_2}$

5) $K\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} = 3(\sqrt{3},1) - (\sqrt{2},\sqrt{3}) = (3\sqrt{3},3) - (\sqrt{2},\sqrt{3}) = (3\sqrt{3}-\sqrt{2}, 3-\sqrt{3})$
$= (3\sqrt{3}-\sqrt{2})\,\overrightarrow{U_1} + (3-\sqrt{3})\,\overrightarrow{U_2}$

6) $K\overrightarrow{A} + L\overrightarrow{B} = 3(\sqrt{3},1) + (-2)(\sqrt{2},\sqrt{3}) = (3\sqrt{3},3) + (-2\sqrt{2},-2\sqrt{3})$

$= (3\sqrt{3}-2\sqrt{2}, 3-2\sqrt{3}) = (3\sqrt{3}-2\sqrt{2})\,\overrightarrow{U_1} + (3-2\sqrt{3})\,\overrightarrow{U_2}$

7) $K\overrightarrow{A} - L\overrightarrow{B} = 3(\sqrt{3},1) - (-2)(\sqrt{2},\sqrt{3}) = (3\sqrt{3},3) + (2\sqrt{2},2\sqrt{3}) = (3\sqrt{3}+2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{3})$

$= (3\sqrt{3}+2\sqrt{2})\,\overrightarrow{U_1} + (3+2\sqrt{3})\,\overrightarrow{U_2}$

8) $K(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}) = 3[(\sqrt{3},1) + (\sqrt{2},\sqrt{3})] = (3\sqrt{3}+3\sqrt{2}, 3+3\sqrt{3})$

$= (3\sqrt{3}+3\sqrt{2})\overrightarrow{U_1} + (3+3\sqrt{3})\overrightarrow{U_2}$

9) $(L+K)\overrightarrow{A} = (-2+3)(\sqrt{3}.1) = (\sqrt{3},1) = \sqrt{3}\,\overrightarrow{U_1} + \overrightarrow{U_2}$

10) $(L+K)(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}) =$ واجب

11) $K(L\overrightarrow{A} + K\overrightarrow{B}) =$ واجب

12) $KL(\overrightarrow{A}, -\overrightarrow{B}) =$ واجب

عزيزي الطالب
ارسل حل الواجب
على التليكرام للتأكد من صحة الحل
gl_gtt

عزيزي الطالب أسئلة الواجبات هي أسئلة مشابهه لأسئلة محلولة

س 8 \ عبرّ عن كل من المتجهات الآتية بواسطة متجهي الوحدة $\overrightarrow{U_1}$, $\overrightarrow{U_2}$

أ) متجه الذي طوله = 3 واتجاهه $\frac{\pi}{3}$

الحل:-

$$\left|\left|\overrightarrow{B}\right|\right| = 3 \quad , \quad Q = \frac{\pi}{3}$$

$$\cos Q = \frac{x}{||\overrightarrow{B}||} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{3} = \frac{x}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{3} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\sin Q = \frac{y}{||\overrightarrow{B}||} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{3} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{3} \Rightarrow y = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

المتجه : $\overrightarrow{B} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \frac{2}{3}\overrightarrow{U_1} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{U_2}$

ب) متجه الذي طوله = 10 واتجاهه $\frac{\pi}{6}$

الحل :-

$$\left|\left|\overrightarrow{B}\right|\right| = 10 \quad , \quad Q = \frac{\pi}{6}$$

$$\cos Q = \frac{x}{||\overrightarrow{B}||} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{6} = \frac{x}{10} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{10} \Rightarrow x = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

$$\sin Q = \frac{y}{||\overrightarrow{B}||} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{6} = \frac{y}{10} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{10} \Rightarrow y = \frac{10}{2} = 5$$

المتجه : $\overrightarrow{B} = (5\sqrt{3}, 5) \Rightarrow 5\sqrt{3}\,\overrightarrow{U_1} + 5\overrightarrow{U_2}$

ج) متجه الذي طوله = 5 واتجاهه $\frac{\pi}{4}$

الحل:-

$$\left|\left|\overrightarrow{B}\right|\right| = 5 \quad , \quad Q = \frac{\pi}{4}$$

$$\cos Q = \frac{x}{||\overrightarrow{B}||} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{4} = \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x}{5} \Rightarrow x = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$\sin Q = \frac{y}{||\overrightarrow{B}||} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{4} = \frac{y}{5} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{y}{5} \Rightarrow y = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

المتجه : $\overrightarrow{B} = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{2}}\overrightarrow{U_1} + \frac{5}{\sqrt{2}}\overrightarrow{U_2}$

د) متجه الذي طوله = $\frac{3}{4}$ واتجاهه π

الحل :-

$$\left\|\overrightarrow{B}\right\| = \frac{3}{4} \quad , \quad Q = \pi$$

$$\cos Q = \frac{x}{\|\overrightarrow{B}\|} \Rightarrow \cos\pi = \frac{x}{\frac{3}{4}} \Rightarrow -1 = \frac{x}{\frac{3}{4}} \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$$

$$\sin Q = \frac{y}{\|\overrightarrow{B}\|} \Rightarrow \sin\pi = \frac{y}{\frac{3}{4}} \Rightarrow 0 = \frac{y}{\frac{3}{4}} \Rightarrow y = 0$$

$\overrightarrow{B} = \left(-\frac{3}{4}, 0\right)$: المتجه $\Rightarrow -\frac{3}{4}\overrightarrow{U_1}$

س 9 \ اذا كان $\overrightarrow{A} = (5,2), \overrightarrow{B} = (2,-4)$ جد x بحيث : $2\overrightarrow{A} + 3x = 5\overrightarrow{B}$

الحل :-

$$2\overrightarrow{A} + 3x = 5\overrightarrow{B}$$

$$\Rightarrow 2(5,2) + x = 5(2-4)$$

$$\Rightarrow (10,4) + 3x = (10,-20)$$

$$\Rightarrow 3x = (10,-20) + (-10,-4)$$

$$\Rightarrow 3x = (0,-24) \Rightarrow x = (0,-8)$$

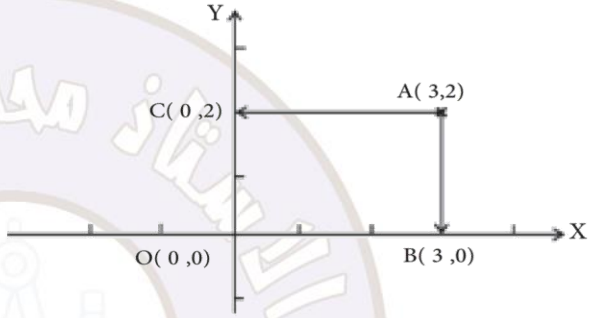
الفصل السادس

النظام الاحداثي في المستوي:

تعلم أنه إذا رسمنا في المستوي مستقيمين $\overleftrightarrow{yy}$, $\overleftrightarrow{xx}$ متعامدين ومتقاطعين في (O) ومثلنا الأعداد الحقيقية (R) على كل من هذين المستقيمين وافترضنا أنه O تمثل نقطة الأصل فأننا بذلك نكون قد أنشأنا نظاماً أحداثياً في المستوي ونسمي $\overleftrightarrow{xx}$ محور السينات ، $\overleftrightarrow{yy'}$ محور الصادات وعندما نأخذ أية نقطة في هذا المستوي مثل A ونرسم منها عمودين الأول على محور السينات

والآخر على محور الصادات وليكونا $\overline{AC}$، $\overline{AB}$ على الترتيب لاحظ الشكل وعندما نكتب A (3 , 2) عبارة عن زوج مرتب من الأعداد الحقيقية يأتي الاحداثي السيني أولاً ثم الأحداثي الصادي.

في هذا الفصل سنعتبر ان محوري الاحداثيات متعامدان وأن وحدة الطول المستخدمة في تدريج أحد المحورين هي نفسها المستخدمة في تدريج المحور الآخر.



المسافة بين نقطتين معلومتين

قانون المسافة بين نقطتين

$$||\overrightarrow{A\,B}|| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال :- أثبت أنه النقاط A (-2 , 7)، B (-3, 4)، C (1, 16) تنتمي لمستقيم واحد.

تذكر

x_2, y_2 $B = (-3, 4)$

x_1, y_1 $A = (-2\ , 7\ )$

$$||\vec{D}|| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$A\,B = \sqrt{(-2-(-3))^2 + (7-4)^2} = \sqrt{(1)^2 + (3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$B\,C = \sqrt{(-3-1)^2 + (4-16)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-12)^2} = \sqrt{16+144} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$$

$$A\,C = \sqrt{(-2-1)^2 + (7-16)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-9)^2} = \sqrt{9+81} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

$$B\,C = A\,B + A\,C$$

$$4\sqrt{10} = \sqrt{10} + 3\sqrt{10} = 4\sqrt{10}$$

A , B , C تنتمي لمستقيم واحد وإلاّ لكانت رؤوس مثلث إذ أن مجموع أي ضلعين في أي Δ أكبر من الضلع الثالث.

مثال :- برهن أن ال Δ الذي رؤوسه النقاط A (1 , 1)، B (2 , 2)، C (5 , -1) هو مثلث قائم الزاوية

الحل :-

$$A\,B = \sqrt{(1-2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$A\,C = \sqrt{(1-5)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

$$B\,C = \sqrt{(2-5)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

$$(AC)^2 = (A\,B)^2 + (B\,C)^2$$

$$\left(\sqrt{20}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{18}\right)^2 \implies 20 = 2 + 18 = 20$$

∴ Δ ABC قائم الزاوية

مثال :- بين أن النقاط A(-3, -1)، B (1 , -4) ، C (10, -5)، D (6 , -2) تمثل رؤوس متوازي أضلاع.

الحل :-

$$A\,B = \sqrt{(-3-1)^2 + (-1+4)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$B\,C = \sqrt{(1-10)^2 + (-4+5)^2} = \sqrt{(-9)^2 + (1)^2} = \sqrt{81+1} = \sqrt{82}$$

$$C\,D = \sqrt{(10-6)^2 + (-5+2)^2} = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$A\,D = \sqrt{(-3-6)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{(-9)^2 + (1)^2} = \sqrt{81+1} = \sqrt{82}$$

وحيث أن AB = CD ، BC = AD

الشكل *ABCD* يمثل متوازي أضلاع (لان كل ضلعين متقابلين متساويين).

مثال :- اذا كانت النقط C(4, 1)، B (a,1)، A (3, 2a) هي رؤوس مثلث متساوي الساقين فيه

AB=AC جد قيمة $a \in R$.

الحل :-

معطى $AB = AC$

$$\to \sqrt{(3-a)^2 + (2a-1)^2} = \sqrt{(3-4)^2 + (2a-1)^2}$$

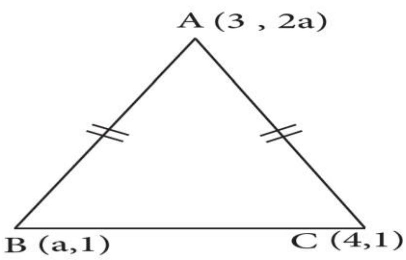
$$\to (3-a)^2 + \cancel{(2a-1)^2} = (3-4)^2 + \cancel{(2a-1)^2}$$ بتربيع الطرفين

$$\to (3-a)^2 = 1$$ نجذر الطرفين

$$\to 3 - a = \mp 1$$

أما $3 - a = 1 \Rightarrow a = 3 - 1 \Rightarrow a = 2$

أو $3 - a = -1 \Rightarrow a = 3 + 1 \Rightarrow a = 4$ تهمل



تمرينات (1 - 6)

س 1 \ جد المسافة بين كل زوج من النقاط الأتية:

أ) $(3, 4)$ ، $(0, 0)$

$$||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

ب) $(6, 4)$ ، $(1, 2)$

$$AB = \sqrt{(6-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{(5)^2 + (2)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$$

ج) $(-3, -5)$ ، $(5, -1)$

$$AB = \sqrt{(-3-5)^2 + (-5+1)^2} = \sqrt{(-8)^2 + (-4)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80}$$

د) $(-1, 4)$ ، $(-2, 3)$

$$AB = \sqrt{(-1+2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

س 2 \ جد محيط المثلث الذي رؤوسه النقاط $A(5,7)$,$B(1,10)$,$C(-3,-8)$

الحل :-

$$||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(5-1)^2 + (7-10)^2} = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

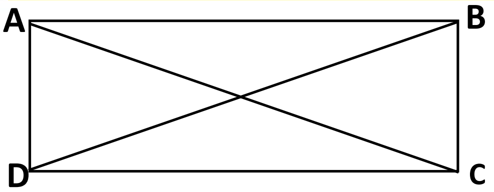
$$AC = \sqrt{(5+3)^2 + (7+8)^2} = \sqrt{(8)^2 + (15)^2} = \sqrt{64+225} = \sqrt{289} = 17$$

$$BC = \sqrt{(1+3)^2 + (10+8)^2} = \sqrt{(4)^2 + (18)^2} = \sqrt{16+324} = \sqrt{340} = 2\sqrt{85}$$

محيط المثلث $= AB + AC + BC = 5 + 17 + 2\sqrt{85} = 22 + 2\sqrt{85}$

س 3 \ رؤوس شكل رباعي هي $A(4,-3)$,$B(7,10)$,$C(-8,2)$,$D(-1,-5)$ جد طول قطريه.

الحل :-



القطر الاول $AC = \sqrt{(4+8)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{(12)^2 + (-5)^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$

القطر الثاني $\underline{BD} = \sqrt{(7+1)^2 + (10+5)^2} = \sqrt{(8)^2 + (15)^2} = \sqrt{64+225} = \sqrt{289} = 17$

س 4 \ أثبت أن النقاط $D\ (8,-9)$, $C\ (0,-7)$, $B\ (-5,0)$, $A\ (3,-2)$ هي رؤوس متوازي الاضلاع.

الحل :-

من أسئلة التلفزيون التربوي

$$A\,B = \sqrt{(3+5)^2+(-2+0)^2} = \sqrt{(8)^2+(-2)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$$

$$B\,C = \sqrt{(-5-0)^2+(0+7)^2} = \sqrt{(-5)^2+(7)^2} = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$$

$$C\,D = \sqrt{(0-8)^2+(-7+9)^2} = \sqrt{(8)^2+(2)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$$

$$A\,D = \sqrt{(3-8)^2+(-2+9)^2} = \sqrt{(-5)^2+(7)^2} = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$$

وحيث أن $AB = CD$ ، $BC = AD$ ، الشكل $ABCD$ يمثل متوازي أضلاع (لان كل ضلعين متقابلين متساويين).

س 5 \ إذا كانت $A(-2,5)$, $B(3,3)$, $C(-4,2)$ ثلاث رؤوس من متوازي الاضلاع ABCD جد إحداثي نقطة D.

الحل :-

واجب

س6 \ بين أن المثلث الذي رؤوسه $C\ (3,-4)$, $B\ (-1,-1)$, $A\ (2,3)$ هو مثلث متساوي الساقين.

$$A\,B = \sqrt{(2+1)^2+(3+1)^2} = \sqrt{(3)^2+(4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$A\,C = \sqrt{(2-3)^2+(3+4)^2} = \sqrt{(-1)^2+(7)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$$

$$B\,C = \sqrt{(-1-3)^2+(-1+4)^2} = \sqrt{(-4)^2+(3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$\therefore\ A\,B = BC = 5$ المثلث متساوي الساقين

س7 \ أثبت ان النقط (0 , 0) ، (8 , 6) ، (4 - , 3-) تقع على استقامة واحدة .

الحل :- افرض C B A

$$A\,B = \sqrt{(-3-6)^2+(-4-8)^2} = \sqrt{(-9)^2+(-12)^2} = \sqrt{81+144} = \sqrt{225} = 15$$

$$A\,C = \sqrt{(-3-0)^2+(-4-0)^2} = \sqrt{(-3)^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$B\,C = \sqrt{(6-0)^2+(8-0)^2} = \sqrt{(6)^2+(8)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$$

$$\therefore A\,B = A\,C + B\,C$$

$$15 = 5 + 10 = 15$$

النقاط تقع على استقامة واحدة

إحداثيات نقطة تقسيم معلوم (من الداخل)

يقصد بتقسيم قطعة مستقيم من الداخل إيجاد احداثيات نقطة تقع بين نقطتي نهايتيها بحيث تقسمها بنسبة معلومة.

ملاحظة:- اذا طلب إحداثيات النقطة التي تقسم قطعة المستقيم واعطى بالسؤال النسبة . نستخدم القانون الاتي

نقطة التقسيم C

$$\left(\frac{n_1x_2+n_2x_1}{n_1+n_2}, \frac{n_1y_2+n_2y_1}{n_1+n_2}\right)$$

حيث ان النسبة = $\frac{n_1}{n_2}$

و النقطة الأولى $A(x_1, y_1)$

والنقطة الثانية $B(x_2, y_2)$

مثال :- جد إحداثيات النقطة التي تقسم قطعة المستقيم الواصلة بين النقطتين $A\ (4 , -3)$ ، $B\ (-5, 0)$ بنسبة $\frac{1}{2}$. $\frac{n_1}{n_2}$

x_1 , y_1 x_2 , y_2

الحل :-

نقطة التقسيم C $\left(\frac{n_1x_2+n_2x_1}{n_1+n_2}, \frac{n_1y_2+n_2y_1}{n_1+n_2}\right)$

نقطة التقسيم C $\left(\frac{(1)(-5)+(2)(4)}{1+2}, \frac{(1)(0)+(2)(-3)}{1+2}\right)$

نقطة التقسيم C $\left(\frac{-5+8}{3}, \frac{0-6}{3}\right)$

نقطة التقسيم C $\left(\frac{3}{3}, \frac{\cancel{-6}}{\cancel{3}}\right)$

نقطة التقسيم C $(1, -2)$

حل بطريقة اخرى

ملاحظة: - إذا طلب إحداثيات النقطة التي تنصف او منتصف قطعة المستقيم. نستخدم القانون الاتي

حيث ان

النقطة الأولى $A(x_1, y_1)$

والنقطة الثانية $B(x_2, y_2)$

نقطة المنتصف $C = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

مثال :- إذا كانت C منتصف $\overline{AB}$ حيث A(-3 , 2) ، B (7 , -8) جد إحداثيات النقطة C

x_1, y_1 x_2, y_2

الحل :-

$$C = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$C = \left(\frac{-3+7}{2}, \frac{2+(-8)}{2}\right)$$

$$C = \left(\frac{4}{2}, \frac{-\cancel{6}}{\cancel{2}}\right)$$

$$C = (2, -3)$$

تمرينات (2 - 6)

س 1 \ جد إحداثيات النقطة التي تقسم القطعة المستقيمة A B ، حيث A (1 , 3) ، B (4 , 6) بنسبة $\frac{2}{1}$.

من أسئلة التلفزيون التربوي لكن بنسبة $\frac{1}{2}$

الحل :-

نقطة التقسيم $C \left(\frac{n_1x_2+n_2x_1}{n_1+n_2}, \frac{n_1y_2+n_2y_1}{n_1+n_2}\right)$

نقطة التقسيم $C \left(\frac{(2)(4)+(1)(1)}{2+1}, \frac{(2)(6)+(1)(3)}{2+1}\right)$

نقطة التقسيم $C \left(\frac{8+1}{3}, \frac{12+3}{3}\right)$

نقطة التقسيم $C \left(\frac{9}{3}, \frac{\cancel{15}}{\cancel{3}}\right)$

نقطة التقسيم $C\ (3, 5)$

س 2 \ جد إحداثيات النقطة التي تنصف قطعة المستقيم AB حيث أن (4- , 2) A ، (6- , 3-) B .

الحل :-

$$C = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$C = \left(\frac{2+(-3)}{2}, \frac{(-4)+(-6)}{2}\right)$$

$$C = \left(\frac{-1}{2}, \frac{-\cancel{10}}{\cancel{2}}\right)$$

$$C = \left(\frac{-1}{2}, -5\right)$$

س 3 \ جد إحداثيات النقطة C التي تقسم قطعة المستقيم AB بنسبة $\frac{3}{5}$ حيث أن (1 , 2) A ،(3- ,1) B

الحل :-

نقطة التقسيم C $\left(\frac{n_1x_2+n_2x_1}{n_1+n_2}, \frac{n_1y_2+n_2y_1}{n_1+n_2}\right)$

نقطة التقسيم C $\left(\frac{(3)(1)+(5)(2)}{3+5}, \frac{(3)(-3)+(5)(1)}{3+5}\right)$

نقطة التقسيم C $\left(\frac{3+10}{8}, \frac{-9+5}{8}\right)$

نقطة التقسيم C $\left(\frac{13}{8}, \frac{-4}{8}\right)$

نقطة التقسيم C $\left(\frac{13}{8}, \frac{-1}{2}\right)$

س 4 \ جد إحداثيات النقطة C التي تبعد عن A ثلاثة أمثال بعدها عن B حيث (6 , 2)A , (4- , 4) B

من أسئلة التلفزيون التربوي

الحل :- النسبة = $\frac{3}{1}$

نقطة التقسيم C $\left(\frac{n_1x_2+n_2x_1}{n_1+n_2}, \frac{n_1y_2+n_2y_1}{n_1+n_2}\right)$

نقطة التقسيم C $\left(\frac{(3)(4)+(1)(2)}{3+1}, \frac{(3)(-4)+(1)(6)}{3+1}\right)$

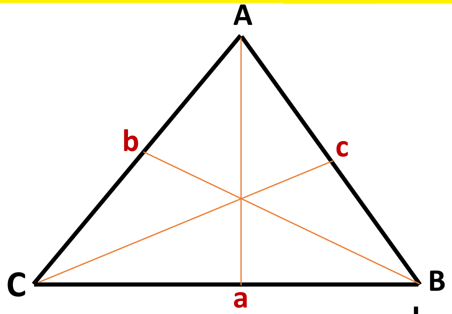
نقطة التقسيم C $\left(\frac{12+2}{4}, \frac{-12+6}{4}\right)$

نقطة التقسيم C $\left(\frac{14}{4}, \frac{-6}{4}\right)$

نقطة التقسيم C $\left(\frac{7}{2}, \frac{-3}{2}\right)$

س 5 \ جد إحداثيات منتصفات أضلاع ΔABC حيث : $A(4 , 0)$، $B(5 , 2)$، $C(2 , -3)$ ثم جد أطوال المستقيمات الواصله بين رؤوس المثلث ومنتصفات الاضلاع المقابلة.

الحل :-



c: $C(AB) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$C(AB) = \left(\frac{4+5}{2}, \frac{0+2}{2}\right)$

$C(AB) = \left(\frac{9}{2}, \frac{2}{2}\right)$

$C(AB) = \left(\frac{9}{2}, 1\right)$

a: $C(BC) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$C(BC) = \left(\frac{5+2}{2}, \frac{2+(-3)}{2}\right)$

$C(BC) = \left(\frac{7}{2}, \frac{-1}{2}\right)$

b: $C(AC) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$C(AC) = \left(\frac{4+2}{2}, \frac{0+(-3)}{2}\right)$

$C(AC) = \left(\frac{6}{2}, \frac{-3}{2}\right)$

$C(AC) = \left(3, \frac{-3}{2}\right)$

$$Aa = \sqrt{\left(4-\frac{7}{2}\right)^2 + \left(0+\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{8-7}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}}\ unit$$

$$Bb = \sqrt{(5-3)^2 + \left(2+\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{(2)^2 + \left(\frac{4+3}{2}\right)^2} = \sqrt{4+\frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{16+49}{4}} = \sqrt{\frac{65}{4}}\ unit$$

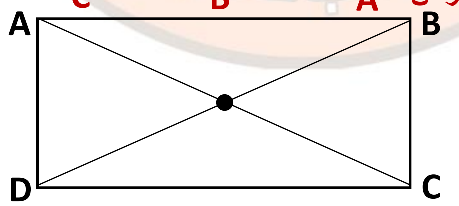
$$Cc = \sqrt{\left(2-\frac{9}{2}\right)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{\left(\frac{4-9}{2}\right)^2 + (-4)^2} = \sqrt{\frac{25}{4}+16} = \sqrt{\frac{25+64}{4}} = \sqrt{\frac{89}{4}}\ \text{unit}$$

س6 \ بين أن قطري الشكل الرباعي الذي رؤوسة $(-8 , -5)$ ، $(-3 , -3)$ ، $(3 , 1)$ ، $(-2 , -1)$ ينصف أحدهما الآخر.

افرض A B C D

الحل:-

من أسئلة التلفزيون التربوي



$C(AC) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$C(AC) = \left(\frac{-5+1}{2}, \frac{(-8)+(3)}{2}\right)$

$C(AC) = \left(\frac{-4}{2}, \frac{-5}{2}\right)$

$C(AC) = \left(-2, \frac{-5}{2}\right)$

$C(BD) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$C(BD) = \left(\frac{-3+(-1)}{2}, \frac{-3+(-2)}{2}\right)$

$C(BD) = \left(\frac{-4}{2}, \frac{-5}{2}\right)$

$C(BD) = \left(-2, \frac{-5}{2}\right)$

$\therefore$ قطري الشكل الرباعي ينصف أحدهما الآخر

مَيْل المستقيم Slope of The Lin

اذا كانت $A\ (x_1\ ,y_1)\ ,B\ (x_2\ ,y_2)$ فان

ميل المستقيم $AB = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ بشرط $x_1 \neq x_2$

ملاحظات

1- اذا كان $y_2 - y_1 = 0$ يعني ان ميل $\overleftrightarrow{AB}$ = صفراً . أي ان $\overleftrightarrow{AB}$ // محور السينات .
بمعنى أن ميل محور السينات = ميل كل مستقيم موازٍ لهُ = صفر.

2 - اذا كان $x_2 - x_1 = 0$ يعني ان ميل $\overleftrightarrow{AB}$ غير معرف أي ان $\overleftrightarrow{AB}$ // محور الصادات .
بمعنى أن ميل محور الصادات = ميل كل مستقيم موازياً له ويكون غير معرف.

3 - إذا كانت Q قياساً للزاوية الموجبة التي يصنعها AB مع الأتجاه الموجب لمحور السينات فان ميل $\overleftrightarrow{AB}$ يساوي tanQ حيث $Q \in [\,0\,,180^\circ)/\{90^\circ\}$.

مثال :- جد ميل المستقيم المار بالنقطتين $A\ (2\ ,3)\ ,B\ (5\ ,1)$

الحل :-

$$m\ \overleftrightarrow{AB} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{1-3}{5-2} = \frac{-2}{3}$$

شرط التوازي Parallel Conditio

المستقيمان المتوازيان لهما الميل نفسه وبالعكس أي $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$ اذا وفقط اذا $m_1 = m_2$

مثال :- بين ان النقاط $C\ (1,0)\ ,B\ (2,1)\ ,A\ (4,3)$ تنتمي لمستقيم واحد.

الحل :-

$$m\ \overline{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-3}{2-4} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$m\ \overline{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-1}{1-2} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$\because\ m\ \overline{AB} = m\ \overline{BC}$$

$\therefore$ A , B , C *تنتمي لمستقيم واحد.*

شرط التعامد Perpendicular Condition

إذا تعامد مستقيمان فان حاصل ضرب ميلاهما = -1 وبالعكس أي $\overleftrightarrow{L_2} \perp \overleftrightarrow{L_1}$ اذا وفقط اذا $m_1 \times m_2 = -1$

او $m_1 = \frac{-1}{m_2}$ اي ميل أحدهما يساوي مقلوب الآخر بعكس الاشارة

مثلاً إذا كان ميل مستقيم يساوي $\frac{-3}{4}$

فاي مستقيم يوازيه يكون ميله $= \frac{-3}{4}$ (المستقيمان المتوازيان لهما الميل نفسه)

وأي مستقيم عمود عليه يكون ميله $= \frac{4}{3}$ (اي ميل أحدهما يساوي مقلوب الآخر بعكس الاشارة)

مثال :- برهن باستخدام الميل أن المثلث الذي رؤوسه $A(3,-1)$, $B(10,4)$, $C(5,11)$ هو قائم الزاوية في B ؟

الحل:-

$$m\,\overline{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-(-1)}{10-3} = \frac{5}{7}$$

$$m\,\overline{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{11-4}{5-10} = \frac{7}{-5}$$

لاحظ ميل أحدهما يساوي مقلوب الآخر بعكس الاشارة

$$\therefore m\,\overline{AB} \times m\,\overline{BC} = \frac{5}{7} \times \frac{7}{-5} = -1$$

$$\therefore \overline{AB} \perp \overline{BC}$$

$\therefore$ $\Delta\, ABC$ قائم الزاوية في B

مثال :- اذا كانت النقط $A(0,b)$, $B(-1,2)$, $C(-2,b-4)$ على استقامة واحدة جد قيمة $b \in R$.

الحل :-

$\therefore$ A , B , C على استقامة واحدة

$$\Rightarrow m\,\overline{AB} = m\,\overline{BC}$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{2-b}{-1-0} = \frac{b-4-2}{-2-(-1)}$$

$$\frac{2-b}{\cancel{-1}} = \frac{b-6}{\cancel{-1}}$$

$$= 2 - b = b - 6 \Rightarrow b + b = 6 + 2 \Rightarrow 2b = 8 \Rightarrow b = 4$$

تمرينات (3 - 6)

س 1 \

1 - جد ميل المستقيم المار بالنقطتين (0 , 2) ، (0 , -2) .
B A

الحل :-

$$m\,\overline{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-(-2)}{2-0} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} = 1$$

2 - بين أن النقاط ، (6 , 7-) ، (4 , 1-) , (3 , 2) على استقامة واحدة.
C B A

الحل :-

$$m\,\overline{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-3}{-1-2} = \frac{1}{-3}$$

$$m\,\overline{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-4}{-7-(-1)} = \frac{2}{-6} = \frac{1}{-3}$$

$$\because\ m\,\overline{AB} = m\,\overline{BC}$$

∴ النقاط تقع على استقامة واحدة

3 - إذا كانت (h , 3-) B ، (3 , 2) A جد قيمة h بحيث يكون $m\,\overline{AB} = \frac{1}{2}$

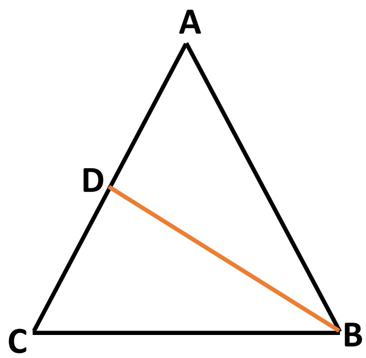
الحل :-

$$m\,\overline{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h-3}{-3-2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h-3}{-5}$$

$$\Rightarrow 1 \times -5 = (h-3) \times 2 \Rightarrow -5 = 2h - 6 \Rightarrow 2h = 6 - 5 \Rightarrow 2h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{2}$$

4 – ABC مثلث رؤوسه (6 , 1)A ، (8- , 2-) B ، (2- , 7) C جد ميل المستقيم المتوسط للمثلث ABC المار من B.

الحل :-



$$D = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$D = \left(\frac{1+7}{2}, \frac{6+(-2)}{2}\right) = \left(\frac{8}{2}, \frac{4}{2}\right)$$

$$D = (4, 2)$$

$$m\,\overline{BD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-(-8)}{4-(-2)} = \frac{10}{6}$$

$$m\,\overline{BD} = \frac{5}{3}$$

س 2 \ لكل فقرةً فيما يأتي أربع إجابات واحدة فقط منها صحيحة ، حدد الاجابة الصحيحة لكل فقرةً:

1 - اذا كان $\overleftrightarrow{H} \perp \overleftrightarrow{L}$, $\overleftrightarrow{H}$ يمر بالنقطتين (3 , 2) , (5 , 1) فان ميل $\overleftrightarrow{L}$ يساوي

أ) $\frac{1}{2}$ ب) -2 ج) $\frac{2}{3}$ د) $\frac{-2}{3}$

التوضيح :- واجب

2 - أذا كان $\overleftrightarrow{H} // \overleftrightarrow{L}$, $\overleftrightarrow{H}$ يمر بالنقطتين (2- , 3) , (2 , 3-) فان ميل $\overleftrightarrow{L}$ يساوي

أ) $\frac{3}{2}$ ب) $\frac{-3}{2}$ ج) $\frac{2}{3}$ د) $\frac{-2}{3}$

التوضيح :- واجب

3 - أذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{H} // \overleftrightarrow{L}$, $(-1,5), (-1,3) \in \overleftrightarrow{L}$, $(x,6), (3,4) \in \overleftrightarrow{H}$ فان قيمة x يساوي

أ) -3 ب) 3 ج) 1 د) ليس اياً مما سبق صحيح.

التوضيح :- واجب

عزيزي الطالب
ارسل حل الواجب
على التليكرام
للتأكد من صحة
الحل
gl_gtt

عزيزي الطالب أسئلة
الواجبات هي أسئلة
مشابهه لأسئلة محلولة

س 3

1- باستخدام الميل بين ان النقاط (2- ,C(2 ،(1 , 2-) B ، (5,2) A هي رؤوس Δ قائم الزاوية.

الحل:-

$$m\,\overline{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-2}{-2-5} = \frac{-1}{-7} = \frac{1}{7}$$

$$m\,\overline{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-2}{2-5} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

$$m\,\overline{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-1}{2-(-2)} = \frac{-3}{4}$$

$$m\,\overline{AC} \times m\,\overline{BC} = \frac{4}{3} \times \frac{-3}{4} = -1$$

2 - لتكن$D(0,2)$, $C\ (6,-2)$, $B\ (5,1)$, $A\ (-1,5)$ بين ان الشكل ABCD متوازي اضلاع.

الحل :-

$$m\,\overline{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-5}{5-(-1)} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$$

$$m\,\overline{DC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-(-2)}{0-6} = \frac{4}{-6} = \frac{-2}{3}$$

$$m\,\overline{AD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-5}{0-(-1)} = \frac{-3}{1} = -3$$

$$m\,\overline{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-1}{6-5} = \frac{-3}{1} = -3$$

$$\therefore\ m\,\overline{AB} \,//\, m\,\overline{DC}\ ,\ m\,\overline{AD} \,//\, m\,\overline{BC}$$

∴الشكل ABCD متوازي اضلاع.

3 - لتكن $A\ (5,2)\quad ,B\ (2,-1)\quad ,C\ \ (-1,2)\ ,D(2,5)$ بين ان الشكل ABCD مربع.

الحل :-

$$D=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$A\,B=\sqrt{(2-5)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}$$

$$B\,C=\sqrt{(-1-2)^2+(2+1)^2}=\sqrt{(-3)^2+(3)^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}$$

$$C\,D=\sqrt{(2+1)^2+(5-2)^2}=\sqrt{(3)^2+(3)^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}$$

$$A\,D=\sqrt{(2-5)^2+(5-2)^2}=\sqrt{(-3)^2+(3)^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}$$

∴اضلاع الشكل ABCD متساوية

$$m\ \overline{AD}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{5-2}{2-5}=\frac{3}{-3}=-1$$

$$m\ \overline{DC}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{5-2}{2+1}=\frac{3}{3}=1$$

$$m\ \overline{AD}\times m\ \overline{DC}=-1\times 1=-1$$

$$\therefore\ AD\perp DC$$

∴الشكل ABCD مربع.

4 – ABC مثلث رؤوسه $(-2,-3)\ \ C,\quad (6,0)\ B,\quad (2,4)\ A$ جد:

أ) ميل العمود المرسوم من A على $\overline{BC}$ ب) ميل المستقيم المرسوم من B وموازياً $\overline{AC}$

الحل :-

أ)

$$m\ \overline{BC}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-3-0}{-2-6}=\frac{-3}{-8}=\frac{3}{8}$$

∴ ميل العمود المرسوم من A على $\overline{BC}$ هو $\frac{-8}{3}$

ب)

$$m\ \overline{AC}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-3-4}{-2-2}=\frac{-7}{-4}=\frac{7}{4}$$

∴ميل المستقيم المرسوم من B وموازياً $\overline{AC}$ هو $\frac{7}{4}$

5 - بين ان الشكل الرباعي الذي رؤوسه $D(2\,,4)\,,C\;(4,2)\,,B\,(2,-2)\,,A\,(-2,2)$ يمثل شبه منحرف متعامد القطرين.

من أسئلة التلفزيون التربوي

الحل :-

يجب ان تحقق $m\,\overline{AB} = m\,\overline{DC}$ و $m\,\overline{AD} \neq m\,\overline{BC}$

$$m\,\overline{AD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-2}{2+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$m\,\overline{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2+2}{4-2} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{2}} = 2$$

$$\therefore m\,\overline{AD} \neq m\,\overline{BC}$$

$$m\,\overline{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-2}{2+2} = \frac{-4}{-4} = -1$$

$$m\,\overline{DC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-2}{2-4} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{-2}} = -1$$

$$\therefore m\,\overline{AB} = m\,\overline{DC}$$

∴ الشكل شبه منحرف

لكي نثبت متعامد يجب ان نحقق شرط التعامد

$$m\,\overline{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-2}{4+2} = \frac{0}{6} = 0$$

$m\,\overline{BD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4+2}{2-2} = \frac{6}{0} =$ غير معرف

∴ القطران متعامدان

6 - جد قيمة x التي تجعل المستقيم المار بالنقطتين $(-2\,,-9)\,,(x,4)$ عموداً على المستقيم المار بالنقطتين $(0\,,3)\,,(4,1)$

من أسئلة التلفزيون التربوي

الحل :- بما ان المستقيمان متعامدين

$$\therefore\; m_1 \times m_2 = -1$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \times \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{-9-4}{-2-x} \times \frac{3-1}{0-4} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{-13}{-2-x} \times \frac{2}{-4} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{-13}{-2-x} \times \frac{-1}{2} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{13}{-4-2x} = -1 \Rightarrow 13 = 4 + 2x \Rightarrow 2x = 13 - 4 \Rightarrow 2x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$$

بعض أسئلة التلفزيون التربوي (واجب بيتي)

س 1 \ باستخدام قانون المسافة بين ان النقط A (3 , 4) ،B (-1 , 1) ، C (-5 , -2) تقع على استقامة واحدة موضحا ذلك بيانيا .

س 2 \ بين أن المثلث الذي رؤوسه النقاط $A\ (1,2)\ \ ,B\ (-2,-2)\ \ ,C\ \ (2,-5)$ هو مثلث متساوي الساقين.

س 3 \ بين أن المثلث الذي رؤوسه النقاط $A\ (-1,3)\ \ ,B\ (-3,-2)\ \ ,C\ \ (4,1)$ هو مثلث قائم الزاوية باستخدام قانون المسافة موضحا ذلك بالرسم .

س 4 \ اذا كانت النقط A (a, 3)، B (-1,-1) ،C(3, -2a) هي رؤوس مثلث متساوي الساقين فيه AB=AC جد القيم الممكنة ل $\in R$.

س 5 \ اذا كانت النقطة $C\left(\frac{-1}{2},-5\right)$ هي منتصف القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ جد احداثي النقطة B اذا علمت ان النقطة $A\ (2,-4)$

س 6 \ ABC مثلث فيه $A\ (4,3)\ \ ,B\ (6,1)\ \ ,C\ \ (2,-3)$ تحقق من ان طول القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي الضلعين AC , BC تساوي نصف طول الضلع الثالث AB

س 8 \ باستخدام قانون الميل اثبت ان النقاط A (5,4)، B (3 , 2)، C(2, 1) تقع على إستقامة واحدة

س 9 \ باستخدام قانون الميل اثبت ان الشكل الرباعي ABCD هو متوازي اضلاع حيث ان $A\ (3,-2)\ \ ,B\ (-5,0)\ \ ,C\ \ (0,-7)\ ,D(8\ ,-9\ )$

س 10 \ برهن باستخدام الميل ان المثلث الذي رؤوسه $A\ (2,-2)\ \ ,B\ (9,3)\ \ ,C\ \ (4,10)$ هو قائم الزاوية في B

عزيزي الطالب

ارسل حل الواجب

على التليكرام للتأكد من صحة الحل

gl_gtt

معادلة المستقيم Equation of The Lin

اذا كانت (x , y) اية نقطة من نقاط أي مستقيم فان العلاقة بين y ، x تسمى معادلة ذلك المستقيم.

والمعادلة القياسية العامة للمستقيم هي : $a x + b y + c = 0$

1- المستقيم الذي يقطع المحورين يمكن تمثيله بيانياً بوضع $x = 0$

$$\therefore \; y = \frac{-c}{b}$$

بوضع $y = 0 \Leftarrow x = \frac{-c}{a}$

2 - وعندما يكون $b = 0$ يكون $ax + c = 0$ تمثل معادلة مستقيم يوازي المحور الصادي ومنها $x = 0$ تمثل معادلة المحور الصادي.

3 - وعندما يكون $a = 0$ يكون $b y + c = 0$ تمثل معادلة مستقيم يوازي المحور السيني ومنها $y = 0$ تمثل معادلة المحور السيني.

4 - وعندما يكون $c = 0$ يكون $ax + by = 0$ تمثل معادلة مستقيم يمر من نقطة الأصل.

كيفية إيجاد معادلة المستقيم :

الحالة الأولى :- اذا علمت منه نقطتان

معادلة المستقيم AB حيث $A\,(x_1\,,y_1)\,,B\,(x_2\,,y_2)$: لتكن $C\,(x\,,y) \in \overleftrightarrow{AB}$ فأن

قانون إيجاد معادلة المستقيم بدلالة نقطتين.

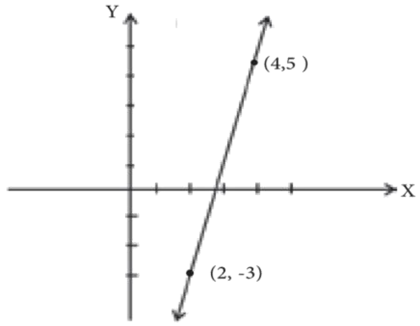
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

الحالة الثانية :- اذا علمت منه نقطة وميل

قانون إيجاد معادلة المستقيم بدلالة نقطة وميل.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال :- جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (5 , 4) ،(3- , 2) .
x_1, y_1 x_2, y_2



الحل :-

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\Rightarrow \frac{y+3}{x-2}=\frac{5+3}{4-2}$$

$$\frac{y+3}{x-2}=\frac{\cancel{8}\ 4}{\cancel{2}\ 1}$$

نضرب طرفين × وسطين

$$\Rightarrow y+3=4x-8 \qquad \Rightarrow 4x-y-3-8=0$$

$\therefore 4x-y-11=0$ معادلة المستقيم

مثال :- جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (3 , 0) ،(1 ,7) ، وهل ان النقطة (4 , 3) تنتمي اليه ام لا؟

الحل :-

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\Rightarrow \frac{y-1}{x-7}=\frac{3-1}{0-7}$$

$$\Rightarrow \frac{y-1}{x-7}=\frac{2}{-7}$$

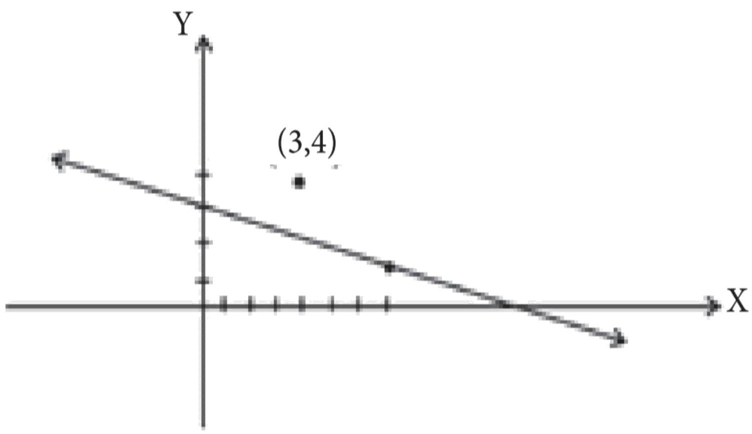
$$\Rightarrow -7y+7=2x-14 \qquad \Rightarrow 2x+7y-7-14=0$$

$\therefore 2x+7y-21=0$ معادلة المستقيم

لكي نتأكد ان (4 , 3) تنتمي للمستقيم ام لا، نعوض عن x = 3 ، y = 4 في معادلة المستقيم.

$$2(3)+7(4)-21=0 \Rightarrow 6+28-21=0 \Rightarrow \therefore 13\neq 0$$

∴ النقطة (4 , 3) لاتنتمي للمستقيم.

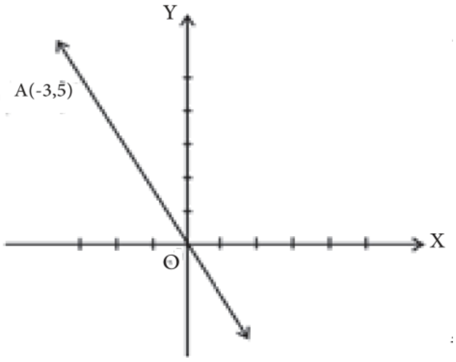


مثال :- جد معادلة المستقيم المار بنقطة الاصل والنقطة. (5 , 3-) .

الحل :-

نقطة الأصل هي (0,0)

. O (0 ,0) , A (-3 , 5)



$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\Rightarrow \frac{y-0}{x-0}=\frac{5-0}{-3-0}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{5}{-3}$$

$\Rightarrow -3y=5x \quad \Rightarrow \therefore 5x+3y=0$ معادلة المستقيم

مثال :- جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (5 , 2-) A ونقطة تنصيف القطعة المستقيمة التي نهايتاها النقطتان $\mathbf{C}\ (-2,3)$, $\mathbf{B}\ (4,-1)$

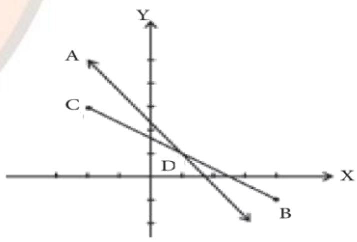
الحل :-

لتكن D هي منتصف BC

$$D=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right) \Rightarrow D=\left(\frac{4-2}{2},\frac{-1+3}{2}\right)=\left(\frac{2}{2},\frac{2}{2}\right) \Rightarrow D=(1,2)$$

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\Rightarrow \frac{y-5}{x+2}=\frac{1-5}{1+2}$$



$$\Rightarrow \frac{y-5}{x+2}=\frac{-4}{3}$$

$$\Rightarrow 3y-15=-4x-8 \quad \Rightarrow 4x+3y+8-15=0$$

$\therefore 4x+3y-7=0$ معادلة المستقيم

مثال :- جد معادلة المستقيم المار من النقطة (‎-3 , 1‎) وميله $\frac{1}{2}$.

الحل :-

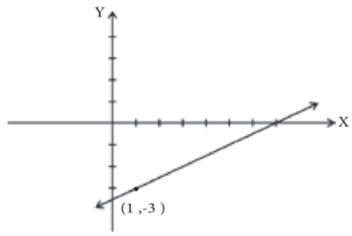
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 3 = \frac{1}{2}(x - 1)$$

نضرب وسطين × طرفين

$$\Longrightarrow 2y + 6 = x - 1 \Longrightarrow x - 2y - 6 - 1$$

$$\therefore x - 2y - 7 = 0$$ *معادلة المستقيم*



ملاحظة :- يمكن ايجاد ميل المستقيم من معادلته من القانون الاتي

ميل المستقيم = $\frac{-\,\text{معامل } x}{\text{معامل } y}$ **بشرط** x ، y **في طرف واحد من المعادلة و** $b \neq 0$

$$m = \frac{-a}{b}$$

مثال :- جد الميل والمقطع الصادي للمستقيم الذي معادلته : $3x - 4y - 12 = 0$

الحل :-

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

المقطع الصادي: نعوض عن $x = 0$

$$-4y - 12 = 0 \Longrightarrow -4y = 12 \Longrightarrow y = -3$$

مثال :- جد معادلة المستقيم الذي يمر من النقطة (‎-2,1‎) وعمودياً على المستقيم الذي معادلته $2x - 3y - 7 = 0$

الحل :-

من المستقيم $2x - 3y - 7 = 0$

$$\therefore m = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

∴ ميل المستقيم المطلوب = $\frac{-3}{2}$ (لان عمودياً عليه)

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{-3}{2}(x + 2) \Longrightarrow 2y - 2 = -3x - 6 \Longrightarrow 3x + 2y - 2 + 6$$

$$\therefore 3x + 2y + 4 = 0$$ *معادلة المستقيم*

قانون إيجاد الميل من الزاوية $m = \tan\theta$
حيث θ هي الزاوية المعطاة في السؤال

مثال :- جد معادلة المستقيم الذي يصنع من الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها 150°
ويمر بالنقطة $(1, -4)$.

الحل :-

$$m = \tan 150^\circ$$

$$= \tan(180^\circ - 30^\circ) \Rightarrow -\tan 30^\circ$$

$$m = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 4 = \frac{-1}{\sqrt{3}}(x - 1) \Rightarrow \sqrt{3}y + 4\sqrt{3} = -x + 1$$

$$\therefore x + \sqrt{3}y + 4\sqrt{3} - 1 = 0$$ *معادلة المستقيم*

الخلاصة

1 - ميل المستقيم المار بالنقطتين (x_1, y_1) , (x_2, y_2) هو $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

2 - ميل المستقيم $a x + b y + c = 0$ هو $m = \frac{-a}{b}$

3 - ميل المستقيم الذي يصنع الزاوية مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هو $m = \tan\theta$

4 - معادلة المستقيم المار بالنقطتين (x_1, y_1) , (x_2, y_2) هو $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

5 - معادلة المستقيم المار بالنقطة (x_1, y_1) وميل m هو

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

ملاحظة :- 1 - المستقيم الموازي لمحور السينات ميله = 0 أي يكتب $m = 0$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$\Rightarrow y - y_1 = 0$ ثم تعوض بدل y_1 وتحصل على معادلة المستقيم

2 - المستقيم الموازي لمحور الصادات ميله غير معرف

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$x - x_1 = 0$$

ثم تعوض بدل x_1 وتحصل على معادلة المستقيم

تمرينات (4 – 6)

س1

1 - جد معادلة المستقيم الذي ميله = $\frac{-1}{2}$ ويمر بالنقطة (0 , 4-) .

الحل :-

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{-1}{2}(x + 4)$$

$$\Rightarrow y = \frac{-1}{2}(x + 4)$$

$$\Rightarrow 2y = -x - 4$$

$\therefore x + 2y + 4 = 0$ معادلة المستقيم

2 - جد معادلة المستقيم الموازي لمحور السينات ويمر بالنقطة (1- , 2) .

الحل :-

$$\therefore m = 0$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 1 = 0(x + 2)$$

$\therefore y + 1 = 0$ معادلة المستقيم

3 - جد معادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات ويمر بالنقطة (1- , 2) .

الحل :-

$$\mathrm{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

$$\mathrm{x - x_1 = 0}$$

$\therefore \mathrm{x - 2 = 0}$ *معادلة المستقيم*

4 - جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (3 , 1-) ، (5 , 1-) .

الحل :-

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\Rightarrow \frac{y-5}{x+1}=\frac{3-5}{-1+1}$$

$$\Rightarrow \frac{y-5}{x+1}=\frac{-2}{0}$$

$$\Rightarrow 0=-2x-2 \qquad \Rightarrow 2x+2=0$$

$\therefore x+1=0$ معادلة المستقيم

5 - جد معادلة المستقيم L المار بالنقطة (2, -1) والموازي الى $\overleftrightarrow{L_1}$ الذي ميله $\frac{2}{3}$

الحل :-

المستقيمان المتوازيان لهما الميل نفسه

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y+1=\frac{2}{3}(x-2)$$

$$\Rightarrow 3y+3=2x-4$$

$$\Rightarrow 2x-3y-3-4=0$$

$\therefore 2x-3y-7=0$ معادلة المستقيم

6 - جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (0, -2) وعمودياً على المستقيم الذي ميله = $\frac{-3}{5}$

الحل :-

مستقيم عمود عليه اي ميل أحدهما يساوي مقلوب الآخر بعكس الاشارة = $\frac{5}{3}$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$\Rightarrow y+2=\frac{5}{3}(x-0)$$

$$\Rightarrow 3y+6=5x-0$$

$\therefore 5x-3y-6=0$ معادلة المستقيم

-7 جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (3,-4) وعمودياً على المستقيم المار بالنقطتين $(2.-2)$. (0.3)

الحل :-

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-3}{2-0} = \frac{-5}{2}$$

مستقيم عمود عليه اي ميل أحدهما يساوي مقلوب الآخر بعكس الاشارة $= \frac{2}{5}$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 4 = \frac{2}{5}(x-3)$$

$$\Rightarrow 5y + 20 = 2x - 6$$

$$\Rightarrow 2x - 5y - 20 - 6 = 0$$

$\therefore 2x - 5y - 26 = 0$ معادلة المستقيم

8 - لتكن $A\ (4,-2)\ ,\ B(1,2)$ جد معادلة المستقيم العمود الذي ينصف AB

الحل :-

$$D = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \Rightarrow D = \left(\frac{1+4}{2}, \frac{2-2}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{0}{2}\right) \Rightarrow D = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$$

$$m\ \overline{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2+2}{1-4} = \frac{4}{-3}$$

مستقيم عمود عليه اي ميل أحدهما يساوي مقلوب الآخر بعكس الاشارة $= \frac{3}{4}$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{3}{4}\left(x - \frac{5}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 4y + 0 = 3x - \frac{15}{2}$$

$\therefore 3x - 4y - \frac{15}{2} = 0$ معادلة المستقيم

س 2

1 - جد معادلة المستقيم الذي ميله = -3 ويقطع جزءاً موجباً من محور الصادات طوله 7 وحدات .

الحل:-

النقطة مع محور الصادات الموجب هي (0.7) والميل = -3

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 7 = -3(x - 0)$$
$$\Rightarrow y - 7 = -3x - 0$$
$$\therefore 3x + y - 7 = 0$$ معادلة المستقيم

2 -جد معادلة المستقيم الذي ميله = 2 ويقطع جزءاً سالباً من محور السينات طوله 6 وحدات.

الحل :-

النقطة مع محور السينات السالب هي $(-6, 0)$ والميل = 2

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 0 = 2(x + 6)$$
$$\Rightarrow y - 0 = 2x + 12$$
$$\therefore 2x - y + 12 = 0$$ معادلة المستقيم

-3 جد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات لكل مستقيم فيما ياتي:

أ) $\overleftrightarrow{L_1}: 2x - 3y + 5 = 0$

الحل :-

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

مع محور الصادات $x = 0$ ثم نجد قيمة y من المعادلة

$$2(0) - 3y + 5 = 0 \Rightarrow -3y + 5 = 0 \Rightarrow 3y = 5 \Rightarrow y = \frac{5}{3}$$

ب) $\overleftrightarrow{L_2}: 8y = 4x + 16$

الحل :-

نرتب المعادلة اولاً تصبح $4x - 8y + 16 = 0$

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$$

مع محور الصادات $x = 0$ ثم نجد قيمة y من المعادلة

$$4(0) - 8y + 16 = 0 \Rightarrow -8y + 16 = 0 \Rightarrow 8y = 16 \Rightarrow y = \frac{16}{8} \Rightarrow y = 2$$

ج) $\overleftrightarrow{L_3}: 3y = -4$

الحل :-

نرتب المعادلة اولاً تصبح $3y + 4 = 0$

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{0}{3} = 0$$

مع محور الصادات $x = 0$ ثم نجد قيمة y من المعادلة

$$3y + 4 = 0 \Rightarrow 3y = -4 \Rightarrow y = \frac{-4}{3}$$

4 - جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (5- , 2) ويوازي المستقيم الذي معادلته: $2x - y + 3 = 0$

الحل :-

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{-1} = 2$$

المستقيمان المتوازيان لهما الميل نفسه

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 5 = 2(x - 2)$$

$$\Rightarrow y + 5 = 2x - 4$$

$$\Rightarrow 2x - y - 5 - 4 = 0$$

$\therefore 2x - y - 9 = 0$ معادلة المستقيم

5 - جد معادلة المستقيم L الذي يقطع جزءاً سالباً من محور الصادات طوله 4 وحدات وعمودياً

على المستقيم $2y = 4x - 1$

الحل :-

النقطة مع محور الصادات السالب هي $(0, -4)$ ثم نجد الميل

نرتب المعادلة اولاً تصبح $4x - 2y - 1 = 0$

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{-2} = 2$$

مستقيم عمود عليه اي ميل أحدهما يساوي مقلوب الآخر بعكس الاشارة $= \frac{-1}{2}$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 4 = \frac{-1}{2}(x - 0)$$

$$\Longrightarrow 2y + 8 = -x$$

معادلة المستقيم $\therefore x + 2y + 8 = 0$

6 - ليكن $\overleftrightarrow{L}$ مستقيماً معادلته : $x + y - 2 = 0$ جد ميله ونقطة تقاطعه مع محور الصادات ثم ارسم $\overleftrightarrow{L}$

الحل :-

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-1}{1} = -1$$

مع محور الصادات $x = 0$ ثم نجد قيمة y من المعادلة

$$(0) + y - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y - 2 = 0 \quad \Longrightarrow y = 2$$

النقطة $(0,2)$

الرسم :-

واجب

7 - جد معادلة المستقيم L المار بالنقطة (2- , 2) وعمودياً على المستقيم الذي معادلته $x + y = 0$

ثم جد نقطة تقاطع المستقيم L مع المحورين الاحداثيين.

الحل :-

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-1}{1} = -1$$

مستقيم عمود عليه اي ميل أحدهما يساوي مقلوب الآخر بعكس الاشارة $= 1$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y + 2 = 1(x - 2)$$
$$\Rightarrow y + 2 = x - 2$$
$$\Rightarrow x - y - 2 - 2 = 0$$

معادلة المستقيم L هي $\therefore x - y - 4 = 0$

التقاطع مع محور الصادات $x = 0$ ثم نجد قيمة y من المعادلة

$$(0) - y - 4 = 0 \Rightarrow -y - 4 = 0 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow (0, -4)$$

التقاطع مع محور السينات $y = 0$ ثم نجد قيمة x من المعادلة

$$x - (0) - 4 = 0 \Rightarrow x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow (4, 0)$$

8 - المستقيم $\overleftrightarrow{L} : 2x - y = 3$ و المستقيم $\overleftrightarrow{H} : 3x + 6y = -3$

أ) بين ان $\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{H}$

الحل :-

$$m\overleftrightarrow{L} = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$m\overleftrightarrow{H} = \frac{-a}{b} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$$

$m\overleftrightarrow{L} \times m\overleftrightarrow{H} = -1$ *شرط التعامد*

$$2 \times \frac{-1}{2} = -1 \Rightarrow \therefore \overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{H}$$

ب - جد جبرياً نقطة تقاطع المستقيمين $\overleftrightarrow{H}, \overleftrightarrow{L}$

الحل :-

$2x - y = 3 \quad \times 6$

$3x + 6y = -3$

$12x - 6y = 18 \quad \ldots\ldots 1$

$3x + 6y = -3 \quad \ldots\ldots 2$ بالجمع

$15x = 15 \Rightarrow x = 1$

نعوض قيمة x=1 في معادلة 2

$3(1) + 6y = -3 \Rightarrow 3 - 6y = -3 \Rightarrow 6y = -3 - 3 \Rightarrow 6y = -6 \Rightarrow y = -1$

$\therefore$ نقطة التقاطع هي $(1, -1)$

9 - جد معادلة المستقيم الذي يصنع ° 135 مع الاتجاه الموجب لمحور السينات والمار بنقطة الاصل.

الحل :-

نقطة الأصل هي (0,0) نجد الميل من خلال الزاوية

$$m = \tan 135^\circ$$
$$= \tan(180^\circ - 45^\circ) \Rightarrow -\tan 45^\circ$$
$$m = -1$$
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y + 0 = -1(x - 0) \Rightarrow y = -x$$

$\therefore x + y = 0$ *معادلة المستقيم*

10 - المستقيم $\overleftrightarrow{H} : 2y = ax + 1$ يمر بالنقطة (1 , 2) جد:

$1 - a \in R$ قيمة $\quad 2 - L$ ميل المستقيم $\quad 3 -$ مقطعه الصادي

الحل :-

بما ان المستقيم يمر بالنقطة فهي تحقق معادلته

$2y = ax + 1 \Rightarrow 2(2) = a + 1 \Rightarrow a = 4 - 1 \Rightarrow a = 3$

نعدل شكل المعادلة $3x - 2y + 1 = 0$

$$m\overleftrightarrow{H} = \frac{-a}{b} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

التقاطع مع محور الصادات $x = 0$ ثم نجد قيمة y من المعادلة

$3(0) - 2y + 1 = 0 \Rightarrow -2y + 1 = 0 \Rightarrow 2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow (0, \frac{1}{2})$

بعد نقطة معلومة عن مستقيم معلوم

اذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{L}: ax + b\,y + c = 0$ والنقطة $N(x_1 , y_1)$ معلومة فيعرف بعد النقطة N عن المستقيم L بانه المسافة العمودية (D) بين النقطة N والمستقيم L

قانون بعد النقطة عن المستقيم

$$D = \frac{|\, ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

حيث
a : هو معامل x
b : هو معامل y
c : هو الحد الخالي من x و y

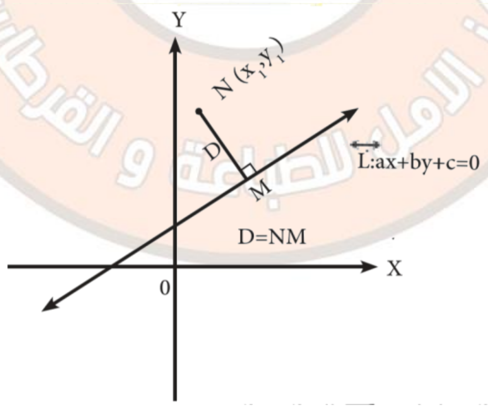
ملاحظة مهمة جدا يجب ان نضع معادلة المستقيم بالصيغة القياسية قبل البدء بالحل ax + b y + c = 0

مثال :- جد بُعد النقطة $A(1,3)$ عن المستقيم : $2y + x = 2$.

الحل :-

نضع معادلة المستقيم بالصيغة القياسية قبل البدء بالحل $x + 2y - 2 = 0$

$$D = \frac{|\, ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|\, 1(1) + 2(3) + (-2)|}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2}} = \frac{|\, 1 + 6 - 2|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{|\, 5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}\ \text{unit}$$



قانون البعد بين المستقيمين المتوازيين $\overleftrightarrow{L_1}, \overleftrightarrow{L_2}$

$$D = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

حيث

C_2: هو الحد الخالي من x و y للمستقيم L_2

C_1: هو الحد الخالي من x و y للمستقيم L_1

مثال :- جد البعد بين المستقيمين المتوازيين:

$\overleftrightarrow{L_1}: x - 3y = 1$, $\overleftrightarrow{L_2}: x - 3y = 4$

الحل :- نرتب المعادلات لتصبح

$\overleftrightarrow{L_1}: x - 3y - 1 = 0$, $\overleftrightarrow{L_2}: x - 3y - 4 = 0$

$a = 1$, $b = -3$, $C_1 = -1$, $C_2 = -4$

$$D = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-4 - (-1)|}{\sqrt{(1)^2 + (-3)^2}} = \frac{|-4 + 1|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{|-3|}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} unit$$

تذكر

1 - قيمة a , b يجب ان تكون متساوية بين المستقيمين المتوازيين

2 - المطلق يحذف السالب

مثال :- جد مساحة المثلث الذي رؤوسه النقاط $A(1,2)$، $B(3,5)$ ، $C(-1,3)$

الحل :-

نجد معادلة احد اضلاع المثلث وليكن المستقيم AB:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\Rightarrow \frac{y-2}{x-1}=\frac{5-2}{3-1}$$

$$\Rightarrow \frac{y-2}{x-1}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 2y-4=3x-3 \qquad \Rightarrow 3x-2y+4-3=0$$

$$\therefore 3x-2y+1=0$$ معادلة المستقيم

الآن بعد النقطة $C(-1,3)$ عن المستقيم AB يمثل ارتفاع ΔABC

$$D=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|3(-1)+(-2)(3)+1|}{\sqrt{(3)^2+(-2)^2}}=\frac{|-3-6+1|}{\sqrt{9+4}}=\frac{|-8|}{\sqrt{13}}=\frac{8}{\sqrt{13}}\ \text{unit}$$

نجد طول AB باستخدام قانون المسافة

$$AB=\sqrt{(3-1)^2+(5-2)^2}=\sqrt{(2)^2+(3)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$$

$$\text{Area}\ \Delta=\frac{1}{2}\times(AB)\times D$$

$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{13}\times\frac{8}{\sqrt{13}}=4\ \text{unit}^2$$

تمرينات (5 - 6)

س 1 \ ضع علامة صح اذا كانت العبارة صائبة وعلامة خطا اذا كانت العبارة خاطئة فيما يأتي:

1 - بعد نقطة الاصل عن المستقيم: y = 3 هو 3 وحدات. صح

2 - بعد نقطة الاصل عن المستقيم: y = -5 هو 5 وحدات.صح

3 - بعد نقطة الاصل عن المستقيم: x = -5 هو 5 وحدات.صح

4 - البعد بين المستقيمين المتوازيين: y = 4 ، y = -1 هو 3 وحدات. خطأ

س 2

1 - جد بعد النقطة (1 ,2-) عن المستقيم: 6x + 8y – 21 = 0

الحل :-

$$D=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|6(-2)+8(1)+(-21)|}{\sqrt{(6)^2+(8)^2}}=\frac{|-12+8-21|}{\sqrt{36+64}}=\frac{|-25|}{\sqrt{100}}=\frac{25}{10}=\frac{5}{2}\ unit$$

2 - جد بعد نقطة الاصل عن المستقيم الذي ميله $=\frac{1}{3}$ ويقطع جزءاً موجباً من محور الصادات طوله 4 وحدات.

الحل :-

نجد معادلة المستقيم الذي من الميل $=\frac{1}{3}$ والنقطة (0,4)

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-4=\frac{1}{3}(x-0)$$

$$\Rightarrow 3y-12=x$$

معادلة المستقيم هي $\therefore x-3y+12=0$

نجد بعد نقطة الأصل (0,0) عن المستقيم

$$D=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|1(0)+(-3)(0)+12|}{\sqrt{(1)^2+(-3)^2}}=\frac{|0+0+12|}{\sqrt{1+9}}=\frac{|12|}{\sqrt{10}}=\frac{12}{\sqrt{10}}\ unit$$

3 - جد البعد بين المستقيمين المتوازيين :

$$\overleftrightarrow{L_1} : 8x - 6y + 4 = 0$$

$$\overleftrightarrow{L_2} : 4x - 3y - 1 = 0$$

الحل :-

بقسمة طرفي معادلة $\overleftrightarrow{L_1}$ على 2 لتصبح $\overleftrightarrow{L_1} : 4x - 3y + 2 = 0$

$$D = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-1-2|}{\sqrt{(4)^2 + (3)^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|-3|}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}\text{unit}$$

4 - جد بعد النقطة (2- , 0) عن المستقيم المار بالنقطتين B (3,5) ، A (1, -1) .

من أسئلة التلفزيون التربوي

الحل :-

نجد معادلة المستقيم من النقطتين

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\Rightarrow \frac{y+1}{x-1} = \frac{5+1}{3-1}$$

$$\Rightarrow \frac{y+1}{x-1} = \frac{6}{2} \Rightarrow \frac{y+1}{x-1} = \frac{3}{1}$$

$$\Rightarrow y + 1 = 3x - 3 \quad \Rightarrow 3x - y - 1 - 3 = 0$$

$\therefore 3x - y - 4 = 0$ معادلة المستقيم

نجد بعد النقطة (0,-2) عن المستقيم

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3(0) + (-1)(-2) + (-4)|}{\sqrt{(3)^2 + (-1)^2}} = \frac{|0 + 2 - 4|}{\sqrt{9+1}} = \frac{|-2|}{\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}}\ unit$$

5 - جد مساحة المثلث الذي رؤوسه النقاط $A(-4,6)$، $B(-3,-1)$ ، $C(5,-2)$

الحل :-

نجد معادلة احد اضلاع المثلث وليكن المستقيم AB:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\Rightarrow \frac{y-6}{x+4}=\frac{-1-6}{-3+4}$$

$$\Rightarrow \frac{y-6}{x+4}=\frac{-7}{1}$$

$$\Rightarrow y-6=-7x-28 \qquad \Rightarrow 7x+y+28-6=0$$

معادلة المستقيم $\therefore\ 7x+y+22=0$

الآن بعد النقطة $C(5,-2)$ عن المستقيم AB يمثل ارتفاع ΔABC

$$D=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|7(5)+1(-2)+22|}{\sqrt{(7)^2+(1)^2}}=\frac{|35-2+22|}{\sqrt{49+1}}=\frac{|55|}{\sqrt{50}}=\frac{55}{\sqrt{50}}\text{ unit}$$

نجد طول AB باستخدام قانون المسافة

$$AB=\sqrt{(-3+4)^2+(-1-6)^2}=\sqrt{(1)^2+(-7)^2}=\sqrt{1+49}=\sqrt{50}$$

$$\text{Area }\Delta=\frac{1}{2}\times(AB)\times D$$

$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{50}\times\frac{55}{\sqrt{50}}=\frac{55}{2}\text{ unit}^2$$

بعض أسئلة التلفزيون التربوي (واجب بيتي)

س 1 \ جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(0,-2)$، $(6,1)$ ، وهل ان النقطة $(3,4)$ تنتمي اليه ؟

س 2 \ جد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(-3,1)$ وميله $\frac{1}{4}$.

س 3 \ جد معادلة المستقيم المار بنقطة الاصل ونقطة تنصيف القطعة المستقيمة التي نهايتاها النقطتان $B(4,3)$ ، $A(-2,5)$

س 4 \ جد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(2,-4)$ ويوازي المستقيم الذي معادلته: $2x-y+5=0$

الفصل السابع :الإحصاء

مقاييس النزعة المركزية

ومن خصائص البيانات، ان لها نزعة او ميلاً لأنها تتركز حول قيمة معينة متوسطة وهذه القيم التي تتركز حولها البيانات تسمى بالمتوسطات او مقاييس النزعة المركزية.

وسوف نتناول اهم مقاييس النزعة المركزية بشيء من التوسع بعد ان درستها في المرحلة المتوسطة بشكل بسيط وهي:

الوسط الحسابي – الوسيط - المنوال

الوسط الحسابي

يعرف الوسط الحسابي لمجموعة من القيم بانه القيمة التي لو حلت محل قيمة كل مفردة في المجموعة لكان مجموع هذه القيم الجديدة مساوياً لمجموع القيم الاصلية.

الوسط الحسابي يساوي مجموع القيم على عددها.

الطريقة الأولى

1) اذا كانت المعلومات الاحصائية البيانات غير مبوبة :

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$$

وبالرموز $\bar{X} = \frac{x_1+x_2+x_3+ \ldots\ldots\ldots\ldots +x_n}{n}$

في هذه الحالة يأتي السؤال بدون جدول

مثال: - إذا كانت اعمار خمسة اشخاص هي :12,11,9,8,5 سنة احسب الوسط الحسابي لأعمار هؤلاء الاشخاص.

الحل: -

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + x_n}{n} = \frac{12 + 11 + 9 + 8 + 5}{5} = \frac{\cancel{45}^{\,9}}{\cancel{5}_{\,1}} = 9 \text{ سنوات}$$

مثال: - البيانات التالية تمثل أعمار مجموعة من الطلاب:20,17,18,17,15,18,16,17,15 احسب الوسط الحسابي

الحل: -

واجب

من أسئلة التلفزيون التربوي

من أسئلة التلفزيون التربوي

مثال: - إذا كان الوسط الحسابي للدخل الشهري لسبعة أشخاص هو (600000) دينار فما مجموع دخولهم؟

الحل: -

واجب

2) اذا كانت البيانات مبوبة :

إذا كانت القيم الاحصائية متجمعة في توزيع تكراري فيمكن استخدام القانون الاتي:

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع حاصل ضرب كل مركز فئة في تكرارها}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

وبالرموز

$$\bar{X} = \frac{x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3+ \ldots\ldots\ldots\ldots +x_nf_n}{f_1+f_2+f_3+ \ldots +f_n}$$

في هذه الحالة يأتي في السؤال جدول

مثال: - من الجدول التالي احسب الوسط الحسابي

العمر	8	9	11	12
عدد الاشخاص	3	5	4	2

الحل: -

اذا رمزنا للعمر بالرمز x ولعدد الاشخاص او التكرار بالرمز f فان خطوات الحـــل يمكن تبسيطها كما في الجدول التالي :

العمر (x)	التكرار (f)	العمر × التكرار (x f)
8	3	8 × 3 = 24
9	5	9 × 5 = 45
11	4	11 × 4 = 44
12	2	12 × 2 = 24
المجموع	14	137

$$\therefore \quad \bar{X} = \frac{137}{14}$$

= 9.786 سنة

(الوسط الحسابي للعمر)

لاحظ هذه المثال جدوله بدون فئات

مثال: - الجدول التالي يبين توزيع مئة شخص حسب فئات الوزن بالكيلوغرام.

والمطلوب حساب الوسط الحسابي للوزن؟

فئات الوزن	30-	40-	50-	60-	70-	80-90	المجموع
عدد الاشخاص	9	15	22	25	18	11	100

لاحظ هذه المثال
جدوله يحتوي فئات

الحل: -

نجد مركز الفئة (x) : مركز الفئة الأولى = $\frac{30+40}{2} = 35$

مركز الفئة الثانية = 35 + 10 = 45.........وهكذا.

فئات الوزن	التكرار (f)	مراكز الفئات (x)	x × f
30-	9	35	315
40-	15	45	675
50-	22	55	1210
60-	25	65	1625
70-	18	75	1350
80- 90	11	85	935
المجموع	100		6110

$$\overline{X} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \dots\dots\dots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + \dots\dots + f_n}$$

$$\overline{X} = \frac{6110}{100}$$

$\overline{X} = 61.1$ كيلو غرام

خطوات حل جدول يحتوي على فئات هي:

1- حساب مراكز الفئات ونرمز لها (x) .
2- نضرب مركز الفئة (x) في تكرارها (f) .
3- نجد الوسط الحسابي
(من تقسيم مجموع الحقل الرابع على مجموع الحقل الثاني)

ملاحظة: - عندما نحسب مركز الفئات نقوم أولا بحساب مركز الفئة الأولى (من جمع الفئة الأولى مع الثانية ونقسم الناتج على 2)ثم باقي الفئات نقوم بتزويد مركز الفئة الأولى مقدار زيادة الفئات

مثلا في المثال السابق وجدنا مركز الفئة الأولى 35 ثم قمنا بتزويدها 10 للفئة الثانية وهكذا (لان لاحظ الجدول الأول الفئات تزيد 10)

مثال: - جد الوسط الحسابي من الجدول التكراري الاتي:

الفئات	8-	10-	12-	14-	16-	18-20	المجموع
التكرار	5	15	20	10	6	4	60

الحل: -

مركز الفئة الأولى $= \frac{8+10}{2} = 9$

مركز الفئة الثانية = 9+2=11 وهكذا

الفئات	التكرار (f)	مراكز الفئات (x)	x × f
8-	5	9	45
10-	15	11	165
12-	20	13	260
14-	10	15	150
16-	6	17	102
18- 20	4	19	76
المجموع	60		798

$$\bar{X} = \frac{798}{60}$$

$$\bar{X} = 13.3$$

الوسط الحسابي

لاحظ في هذه المثال

وجدنا مركز الفئة الأولى 9 ثم قمنا بتزويدها 2 للفئة الثانية وهكذا (لان لاحظ الجدول الأول الفئات تزيد 2)

الطريقة الثانية

طريقة الوسط الفرضي أو الانحرافات:

تعتمد هذه الطريقة على إختيار إحدى القيم (مراكز الفئات) بوصفها وسطاً فرضياً ثم إيجاد إنحراف كل فئة عن ذلك الوسط الفرضي ومن ثم نطبق القانون :

$$\text{الوسط الحسابي} = \text{الوسط الفرضي} + \frac{\text{مجموع (انحراف مركز فئة في تكرارها)}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

$$\bar{X} = \bar{X}_0 + \frac{\Sigma f.E}{\Sigma f}$$ حيث $\bar{X}_0$ = الوسط الفرضي

f = تكرار الفئة , $E = X - \bar{X}_0$ الانحراف , Σf = مجموع التكرارات .

خطوات الحل

1 - نستخرج مراكز الفئات.

2 - نختار الوسط الفرضي ($\overline{X}_0$) من بين مراكز الفئات الذي يقابل أكبر تكرار.

3 - نستخرج أنحراف مركز كل فئة عن الوسط الفرضي

الانحراف = مركز الفئة – الوسط الفرضي $E = X - \overline{X}_0$

4 - نستخرج حاصل ضرب تكرار كل فئة (f) × انحراف مركزها عن الوسط الفرضي.

5 - نستخرج المجموع الكلي للتكرارات والمجموع الكلي (f.E) Σ ،

نكتب المعلومات السابقة في الجدول كما موضح في المثال التالي

مثال:- الجدول التكراري التالي يبين أعمار 100 طالب جامعي .أوجد الوسط الحسابي للأعمار بطريقة الوسط الفرضي؟

الاعمار	18	20	22	24	26	28-30	المجموع
عدد الطلاب	20	44	18	13	3	2	100

الحل :-

الاعمار للفئات	عدد الطلاب التكرار (f)	مركز الفئة (X)	الانحراف $E = X - \overline{X}_0$	f.E
18-	20	19	19 - 21 = -2	20 × -2 = -40
20-	44	$21 = \overline{X}_0$	21 - 21 = 0	44 × 0 = 0
22-	18	23	23 - 21 = 2	18 × 2 = 36
24-	13	25	25 - 21 = 4	13 × 4 = 52
26-	3	27	27 - 21 = 6	3 × 6 = 18
28- 30	2	29	29 - 21 = 8	2 × 8 = 16
المجموع	100			82

$$\overline{X} = \overline{X}_0 + \frac{\sum f.E}{\sum f}$$

$$\overline{X} = 21 + \frac{82}{100} = 21 + 0.82$$

$\overline{X} = 21.82$ الوسط الحسابي للاعمار

مزايا الوسط الحسابي وعيوبه:

المزايا:

1 - يتميز بعملياته الحسابية البسيطة.

2 - تدخل جميع القيم في حسابه.

العيوب:

1- يتأثر بالقيم الشاذة او المتطرفة الكبيرة جداً او الصغيرة جداً.

2 - لا يمكن حسابه حساباً بيانياً

الوسيط ME :

يعرف الوسيط لمجموعة من القيم بأنه القيمة التي تتوسط المجموعة بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً وبالتالي فان عدد القيم الأصغر منه يكون مساوياً للقيم الاكبر منه.

طريقة حساب الوسيط:

1) البيانات غير المبوبة:

نرتب القيم ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً

إذا كان عدد القيم فردي نأخذ القيمة التي تقع في المنتصف لتكون هي الوسيط.

أما إذا كان عدد القيم زوجياً فنأخذ القيمتين اللتين في المنتصف ويكون الوسيط هو مجموع القيمتين مقسوماً على اثنين.

مثال :- احسب الوسيط لأوزان بعض الطلاب والتي هي : 52 كغم، 58 كغم، 50 كغم، 63 كغم، 55 كغم.

الحل :-

نرتب القيم تصاعديا: 63، 58 ، 55 ، 52 ،50

∴ الوسيط = 55

لاحظ هنا
عدد القيم فردي

مثال :- احسب الوسيط للأوزان التالية لبعض الطلاب : 52 كغم، 58 كغم، 50 كغم، 63 كغم، 57 كغم، 55 كغم.

الحل :-

نرتب القيم تصاعديا: 63، 58 ، 57 ، 55، 52 ،50

$$\therefore \text{الوسيط} = \frac{55+57}{2} = \frac{112}{2} = 56$$

لاحظ هنا
عدد القيم زوجي

مثال:- البيانات التالية تمثل أعمار مجموعة من الطلاب:20,17,18,17,15,18,16,17,15 احسب الوسيط

من أسئلة التلفزيون التربوي

واجب

الحل :-

2) البيانات المبوبة:

يمكن حساب الوسيط في حالة البيانات المبوّبة ذات الفئات : وتكون خطوات الحل كما يأتي:

1) نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد من الجدول التكراري.

2) حساب ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مجموعة التكرار}}{2}$

3) تحديد الفئة التي تحتوي على الوسيط من الجدول التكراري المتجمع الصاعد وتسمى الفئة الوسطية وهي الفئة التي تقابل أول تكرار أكبر أو يساوي ترتيب الوسيط .

ترتيب الوسيط- التكرار المجتمع الصاعد للفئة قبل الوسيطية

$$\text{الوسيط} = \text{الحد الأدنى للفئة الوسيطه} + \frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{التكرار المتجمع الصاعد للفئة قبل الوسيطية}}{\text{تكرار الفئة الوسيطية}} \times \text{طول الفئة}$$

$$ME = L + \frac{\frac{\sum f}{2} - fb}{fm} . W$$

حيث الوسيط = ME ، fb التكرار المتجمع الصاعد للفئة قبل الوسيطية ، fm : تكرار الفئة الوسيطية ، W:طول الفئة ، L: الحد الادنى للفئة الوسيطية .

عزيزي الطالب أسئلة الواجبات هي أسئلة مشابهه لأسئلة محلولة

عزيزي الطالب

ارسل حل الواجب

على التليكرام للتأكد من صحة الحل

gl_gtt

مثال :- جد وسيط الوزن من الجدول التالي:

فئات الوزن	-30	-40	-50	-60	-70	80 - 90	المجموع
التكرار عدد الاشخاص	9	15	22	25	18	11	100

الحل :-

فئات الوزن	التكرار عدد الاشخاص	التكرار المجتمع الصاعد
-30	9	9
-40	15	24
-50	22	46
-60	25	71
-70	18	89
80 - 90	11	100
المجموع	100	

ترتيب الوسيط $= \frac{100}{2} = 50$

∴ الفئة الوسيطية = (60 – 70)

$$ME = L + \frac{\frac{\Sigma f}{2} - fb}{fm} \times W$$

$$ME = 60 + \frac{50-46}{25} \times 10 \Rightarrow ME = 60 + \frac{8}{5}$$

$$ME = 60 + 1.6 = 61.6$$

مزايا الوسيط وعيوبه:

المزايا:

1 - لايتأثر بالقيم الشاذة أو المتطرفة

2 - يمكن حسابه حساباً بيانياً.

العيوب:

1 - لاتدخل جميع القيم في حسابه.

2 - في حالة البيانات المبوبة ذات الفئات يكون حسابه بالطرق التقريبية.

المنوال M0 :

يُعرّف المنوال لمجموعة من القيم بأنه القيمة الأكثر تكراراً أو التي تقابل أكبر التكرارات . ويرمز له M0

طريقة حساب المنوال:

1) البيانات غير المبوبة:

مثال :- ما هي القيمة المنوالية لمجموعة الأعداد الآتية:

أ) 4، 7، 9، 4، 3، 8، 7، 4، 2، 4

الحل :- المنوال = 4 لانها تكررت أكثر من غيرها.

ب) 6، 5، 1، 8، 6، 5 ، 10، 1

الحل :- المنوال = 5 ، 6 لأنهما تكررا أكثر من غيرهما.

ج) 8، 5، 4، 3، 7 ، 10 ، 11، 12

الحل :- المنوال = لايوجد

مثال:- البيانات التالية تمثل أعمار مجموعة من الطلاب:20,17,18,17,15,18,16,17,15 احسب المنوال

من أسئلة التلفزيون التربوي

واجب

2) البيانات المبوبة:

أ) طريقة الفروق (طريقة بيرسون) :

المنوال = الحد الادنى للفئة المنوالية + $\frac{d_1}{d_1 + d_2}$ × طول الفئة المنوالية

حيث d_1 = تكرار الفئة المنوالية - تكرار الفئة التي قبلها.

d_2 = تكرار الفئة المنوالية - تكرار الفئة التي بعدها.

وإن التكرار المنوالي هو أكبر تكرار في الجدول التكراري. والفئة المنوالية التي تقابل أكبر تكرار.

مثال :- احسب المنوال من الجدول التالي:

فئات	30-	40-	50-	60-	70-	80 - 90
التكرار عدد الاشخاص	9	15	22	25	18	11

الحل :-

$d_1 = 25 - 22 = 3$

$d_2 = 25 - 18 = 7$

طول الفئة المنوالية = $70 - 60 = 10$

المنوال = الحد الادنى للفئة المنوالية + $\frac{d1}{d1 + d2}$ ×طول الفئة

المنوال = $60 + \frac{3}{3 + 7} \times 10$

المنوال = $60 + 3$

المنوال = 63

فئات	التكرار	
30-	9	
40-	15	
50-	22	← التكرار السابق
60-	25	← التكرار المنوالي
70-	18	← التكرار اللاحق
80-90	11	

ب) طريقة العزوم (طريقة الرافعة) :

1 - في هذه الطريقة نرسم عتلة ونجعل تكرار الفئة المنوالية قوة تؤثر عند إحدى نهايتي العتلة.
والتكرار اللاحق لتكرار الفئة المنواليه قوة تؤثرعند النهاية الأخرى للعتلة وطول العتلة = طول الفئة

2 - نفرض نقطة الارتكاز التي تمثل بُعد المنوال عند أحد الطرفين = x

3- نطبق قانون العتلة (القوة× ذراعها = المقاومة × ذراعها).

4 - نستخرج قيمة x ونضيفها إلى الحد الأدنى للفئة المنوالية فنحصل على المنوال.

مثال :- جد المنوال من الجدول الآتي:

الفئات	40-	50-	60-	70-	80-	90 -100
التكرار	6	38	59	37	8	2

الحل :-

الفئه المنوالية= (60-70)

طول العتلة= طول الفئة = 10

∴ القوة ×ذراعها = المقاومة × ذراعها

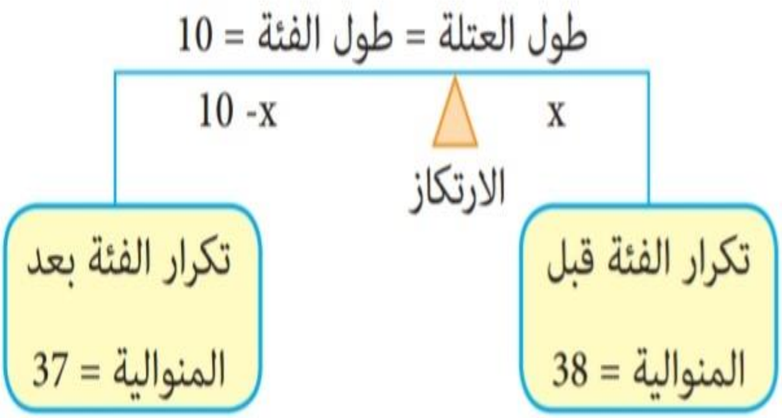
$(10 - x)\ (37) = x\ (38)$

$370 - 37x = 38x$

$75x = 370$

∴ $x = \dfrac{370}{75} = 4.9$

∴ المنوال = 60 + 4.9 = 64.9



مزايا المنوال وعيوبه:

المزايا:

1 - بسيط في طريقة حسابه

2 - لايتأثر بالقيم الشاذة والمتطرفة.

العيوب:

1 - في حالة البيانات المبوبة ذات الفئات يكون حسابه بالطرق التقريبية

2 - لايمكن ايجاده في حاله عدم وجود قيم متكررة اكثر من غيرها.

3 - قد يوجد اكثر من منوال في حالة تكرار القيم بنفس الدرجة

تمرينات(1 - 7)

س 1 \ عرف الوسط الحسابي والوسيط والمنوال.

الحل :-

الوسط الحسابي :- يعرف الوسط الحسابي لمجموعة من القيم بانه القيمة التي لو حلت محل قيمة كل مفردة في المجموعة لكان مجموع هذه القيم الجديدة مساوياً لمجموع القيم الاصلية.

الوسيط :- يعرف الوسيط لمجموعة من القيم بأنه القيمة التي تتوسط المجموعة بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً وبالتالي فان عدد القيم الأصغر منه يكون مساوياً للقيم الاكبر منه.

المنوال :- يُعَرّف المنوال لمجموعة من القيم بأنه القيمة الأكثر تكراراً أو التي تقابل أكبر التكرارات . ويرمز له M0

س 2 \ البيانات التالية تمثل أعمار مجموعة من الطلاب. 15 ، 17 ، 16 ، 18 ، 16 ، 15 ، 17 ، 18 ، 17 ، 19

جد: أ) الوسط الحسابي ، ب) الوسيط ، ج) المنوال

الحل :-

أ) الوسط الحسابي

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots\dots\dots\dots\dots + x_n}{n} = \frac{19+17+18+17+15+16+18+16+17+15}{10} = \frac{168}{10} = 16.8$$

ب) الوسيط

نرتب تصاعديا 19، 18 ، 18 ، 17 ، 17 ، 17 ، 16 ، 16 ، 15 ، 15

$$ME = \frac{17+17}{2} = 17$$

ج) المنوال هو 17 الأكثر تكرارا .

س 3 \ إذا كان الوسط الحسابي للدخل الشهري لخمسة أشخاص (40000) دينار. فما مجموع دخولهم؟

الحل :-

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع الدخول}}{\text{عدد الاشخاص}} \Leftarrow 40000 = \frac{\text{مجموع الدخول}}{5}$$

$$\Leftarrow \text{مجموع الدخول} = 5 \times 40000 = 200000$$

س 4 \ الجدول التالي يبين مجموع درجات الحرارة في إحدى المدن خلال 90 يوماً في فصل الصيف في أحد الأعوام:

فئات درجات الحرارة	20-	24-	28-	32-	36-	40-	44-48	المجموع
عدد الايام	8	10	18	23	15	9	7	90

المطلوب : أ) الوسط الحسابي لدرجات الحرارة . ب) الوسيط . ج) المنوال.

من أسئلة التلفزيون التربوي

الحل:-

أ) الوسط الحسابي

نجد مركز كل فئة (x) حيث مركز الفئة الأولى $= \frac{20+24}{2} = \frac{44}{2} = 22$

مركز الفئة الثانية .... 22 + 4 = 26 وهكذا.

فئات درجات الحرارة	التكرار f	مركز الفئة x	f.x
20-	8	22	176
24-	10	26	260
28-	18	30	540
32-	23	34	782
36-	15	38	570
40-	9	42	378
44-48	7	46	322
المجموع	90		3028

$$\overline{X} = \frac{\sum f.x}{\sum f} = \frac{3028}{90} = 33.65$$

ب) الوسيط

فئات درجات الحرارة	التكرار f	التكرار المجتمع الصاعد
20-	8	8
24-	10	18
28-	18	36
32-	23	59
36-	15	74
40-	9	83
44-48	7	90
المجموع	90	

ترتيب الوسيط $= \frac{90}{2} = 45$

∴ الفئة الوسيطية = (36 - 32)

$$ME = L + \frac{\frac{\sum f}{2} - fb}{fm} \times W$$

$$= 32 + \frac{45-36}{23} \times 4 \Rightarrow 32 + \frac{9}{23} \times 4 = 32 + \frac{36}{23} = 32 + 1.56 = 33.56$$

ج) المنوال

$$d_1 = 23 - 18 = 5$$

$$d_2 = 23 - 15 = 8$$

$$L = 32$$

$$W = 4$$

$$M0 = L + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times W$$

$$= 32 + \frac{5}{5+8} \times 4 \Rightarrow 32 + \frac{5}{13} \times 4 \Rightarrow 32 + \frac{20}{13} \Rightarrow 32 + 1.54 = 33.54$$

س 5 \ الجدول الآتي يبين رواتب 60 معلماً في مدرسة والمطلوب إيجاد الوسيط لهذه الرواتب:

الراتب بالف دينار	150-	160-	170-	180-	190-	200-210
عدد المعلمين	5	10	15	20	7	3

الحل:-

الراتب بألف دينار (الفئات)	عدد المعلمين التكرار f	التكرار المجتمع الصاعد
150-	5	5
160-	10	15
170-	15	30
180-	20	50
190-	7	57
200 - 210	3	60
المجموع	60	

ترتيب الوسيط $= \frac{60}{2} = 30$

∴ الفئة الوسيطية = (180 - 170)

$$ME = L + \frac{\frac{\sum f}{2} - fb}{fm} \times W$$

$$= 170 + \frac{30 - 15}{15} \times 10 \Rightarrow 170 + \frac{15}{15} \times 10 = 170 + 10 = 180$$

س 6 \ الجدول الآتي يبين الأرباح اليومية لمجموع من المحلات في إحدى المدن جد الوسط الحسابي (معدل الربح اليومي) لهذه الارباح:

الربح اليومي بالف دينار	4-	8-	12-	16-	20-	24-28
عدد المحلات	8	10	15	20	12	6

الحل :-

الوسط الحسابي

نجد مركز كل فئة (x) حيث مركز الفئة الأولى $= \frac{8+4}{2} = \frac{12}{2} = 6$

مركز الفئة الثانية .... 6 + 4 = 10 وهكذا.

الربح اليومي بألف دينار (الفئات)	عدد المحلات التكرار f	مركز الفئة x	f.x
4-	8	6	48
8-	10	10	100
12-	15	14	210
16-	20	18	360
20-	12	22	264
24 - 28	6	26	156
المجموع	71		1138

$$\overline{X} = \frac{\sum f.x}{\sum f} = \frac{1138}{71} = 16.03$$

مقاييس التشتت

إن لكل مجموعة من الأعداد وسطاً حسابيا، وإن أعداد هذه المجموعة ربما تكون متجمعة بالقرب منه أو مبتعدة عنه.

اذا كانت هذه الاعداد متجمعة بالقرب من وسطها الحسابي فان مقدار تشتتها ضئيل

وإذا كانت هذه الأعداد مبتعدة عن وسطها الحسابي فان تشتتها كبير

مثلاً : أن الوسط الحسابي للأعداد: 30 ، 40 ، 50 ، 60 ، 70 هو 50

والوسط الحسابي للأعداد: 10 ، 20 ، 90 ، 100 ، 30 هو 50

عند تأمل المجموعة الأولى تشاهد أن تشتتها عن الوسط الحسابي ضئيل بينما تتشتت أعداد المجموعة الثانية عن الوسط الحسابي كبير.

مقاييس التشتت

1 -المدى.

2 - الانحراف المعياري

المدى Rang

هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة للمتغير

1) البيانات غير المبوبة:

مثال :- ما هو المدى في مجموعة القيم التالية : 12 ، 35 ، 68 ، 24 ،98

الحل :- المدى $R = 98 - 12 = 86$

2) البيانات المبوبة:

مثال :- ما هو المدى في التوزيع التكراري التالي:

الفئات	5 -	15 -	25 -	35 -	45 - 55
التكرار	3	8	15	14	7

الحل :- المدى = الحد الأعلى للفئة الاخيرة - الحد الأدنى للفئة الأولى

$\therefore R = 55 - 5 = 50$

الانحراف المعياري S

هو القيمة الموجبة للجذر التربيعي لمتوسط مربعات إنحرافات قيم مفردات التوزيع عن وسطها الحسابي ويرمز له بالرمز (S) .

قانون حساب الانحراف المعياري لقيم غير مبوبة:

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2}$$

خطوات الحل

1 - نجد مجموع مربعات الاعداد $\sum x^2$

2 - نجد الوسط الحسابي $\bar{x}$

3 - نطبق القانون

علما ان n هي عدد القيم بالسؤال

مثال :- إحسب الانحراف المعياري للقيم الآتية : 1 ، 3 ، 5 ، 7 ، 9

الحل :-

1 -نجد مجموع مربعات الاعداد $\sum x^2$

x	x^2	
1	1	
3	9	
5	25	
7	49	
9	81	
25	165	المجموع

2 -نجد الوسط الحسابي $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots\dots\dots\dots + x_n}{n} = \frac{9+7+5+3+1}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

3 -نطبق القانون

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2}$$

$$S = \sqrt{\frac{165}{5} - (5)^2} = \sqrt{33 - 25} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

ملاحظة :- عند طرح كمية ثابتة من جميع القيم ، لاتؤثر على قيمة الإنحراف المعياري والمثال التالي يوضح ذلك

مثال :- إطرح 1 من الأعداد 1 ، 3 ، 5 ، 7 ، 9 ثم أحسب الإنحراف المعياري للقيم الجديدة.

الحل :-

الأعداد 1 ، 3 ، 5 ، 7 ، 9

أطرح 1 منها تصبح : 0 ، 2 ، 4 ، 6 ، 8

1 -نجد مجموع مربعات الاعداد $\sum x^2$

x	x^2
0	0
2	4
4	16
6	36
8	64
20	120

المجموع

2 -نجد الوسط الحسابي $\bar{x}$

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots\dots\dots\dots\dots + x_n}{n} = \frac{8+6+4+2+0}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

3 -نطبق القانون

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2}$$

$$S = \sqrt{\frac{120}{5} - (4)^2} = \sqrt{24-16} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

نلاحظ نفس الإنحراف المعياري للأعداد قبل طرح (1) كما في مثال السابق

الدرجة المعيارية SD

الدرجة المعيارية: تعرف الدرجة المعيارية بأنها خارج قسمة إنحراف قيمة ذلك المتغير عن الوسط الحسابي لتلك المجموعة على الانحراف المعياري لها.

أي أنه الدرجة المعيارية:

$$SD = \frac{X - \overline{X}}{S}$$

الارتباط

الارتباط: هو العلاقة الرياضية بين متغيرين، بحيث إذا تغير احدهما باتجاه معين يميل الاخر إلى التغيير في اتجاه معين أيضاً،

فاذا كان التغير باتجاه واحد سمي الارتباط طردياً،

أما إذا كان التغير باتجاهين متعاكسين سمي الارتباط عكسياً.

معامل الارتباط

نرمز له بالرمز (r) ويكون بين المتغيرين x , y

$$r = \frac{\frac{\sum x\,y}{n} - \bar{x}\,\bar{y}}{S_x S_y}$$

نحسب معامل الارتباط: r حيث

حيث $\bar{x}$ = الوسط الحسابي للمتغير x

$\bar{y}$ = الوسط الحسابي للمتغير y

S_x = الانحراف المعياري للمتغير x

S_y = الانحراف المعياري للمتغير y

بعض خصائص (r) :

(1) r موجبة في حالة الارتباط الطردي (الموجب) .

(2) r=1 في حالة الارتباط الطردي التام.

(3) r سالبة في حالة الارتباط العكسي (السالب) .

(4) r= -1 في حالة الارتباط العكسي التام .

(5) r= 0 في حالة إنعدام الارتباط.

يلاحظ مما سبق أن قيمة معامل الارتبـاط تنتمي [1 , 1-] وكلما إقتربت قيمة r من 1+ أو 1- كان هذا دليلاً على قوة الارتباط بين المتغيرين وكلما إقتربت قيمتة من الصفر كان هذا دليلاً على إنعدام الارتباط .

مثال :- جد معامل الارتباط بين المتغيرين y ، x ثم جد الدرجة المعيارية للعدد 5 = x إذا كان :

x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10

ثم بين نوعة ؟

الحل :-

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{2+4+6+8+10}{5} = 6$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{55}{5} - (3)^2} = \sqrt{11-9} = \sqrt{2}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - (\bar{y})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{220}{5} - (6)^2} = \sqrt{44-36} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

	x	y	x^2	y^2	x y
	1	2	1	4	2
	2	4	4	16	8
	3	6	9	36	18
	4	8	16	64	32
	5	10	25	100	50
المجموع	15	30	55	220	110

$$r = \frac{\frac{\sum x\,y}{n} - \bar{x}\,\bar{y}}{S_x S_y} = \frac{\frac{110}{5} - (3)(6)}{\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{22-18}{2 \times 2} = \frac{4}{4} = 1$$

∴ نوع الارتباط طردي تام

$$\therefore SD = \frac{X - \bar{X}}{S_x} = \frac{5-3}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

مثال :- جد معامل الارتباط بين المتغيرين y ، x ثم بين نوعه إذا كان:

x	-5	-2	1	4	7
y	9	6	3	0	-3

الحل :-

$$\bar{x} = \frac{-5-2+1+4+7}{5} = 1$$

$$\bar{y} = \frac{9+6+3+0-3}{5} = 3$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{95}{5} - (1)^2} = \sqrt{19-1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - (\bar{y})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{135}{5} - (3)^2} = \sqrt{27-9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

x	y	x^2	y^2	xy
-5	9	25	81	-45
-2	6	4	36	-12
1	3	1	9	3
4	0	16	0	0
7	-3	49	9	-21
5	15	95	135	-75

المجموع

$$r = \frac{\frac{\sum x\,y}{n} - \bar{x}\,\bar{y}}{S_x S_y} = \frac{\frac{-75}{5} - (1)(3)}{3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}} = \frac{-15-3}{9 \times 2} = \frac{-18}{18} = -1$$

∴ نوع الارتباط عكسي تام

تمرينات (2 - 7)

س 1 /

أ) أوجد المدى للقيم التالية : 12 ، 9 ، 7 ، 8 ، 0 ، 3

الحل :- المدى $R = 12 - 0 = 12$

ب) أوجد المدى من الجدول التالي:

فئات العمر	20 –	22 –	24 –	26 –	28 –	30 - 32
التكرار	5	10	20	10	5	2

الحل :- المدى = الحد الأعلى للفئة الاخيرة - الحد الأدنى للفئة الأولى

$$\therefore R = 32 - 20 = 12$$

س 2 \ عرف الانحراف المعياري ثم إحسب الانحراف المعياري للقيم التالية : 2 ، 4 ، 6 ، 8 ، 10

الحل :-

هو القيمة الموجبة للجذر التربيعي لمتوسط مربعات إنحرافات قيم مفردات التوزيع عن وسطها الحسابي ويرمز له بالرمز (S) .

X	X^2
2	4
4	16
6	36
8	64
10	100
30	220

المجموع

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ \dots + x_n}{n} = \frac{10 + 8 + 6 + 4 + 2}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\overline{x})^2}$$

$$S_x = \sqrt{\frac{220}{5} - (6)^2} = \sqrt{44 - 36} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

س 3 \ أوجد الانحراف المعياري للأعداد: 3 ، 6 ،2 ، 1 ،7 ، 5 ثم أضف 5 الى كل عدد منها وأثبت أن هذه الإضافة لا تؤثر على قيمة الانحراف المعياري ولكنها تؤثر على قيمة الوسط الحسابي.

الحل :-

X	X^2
3	9
6	36
2	4
1	1
7	49
5	25
24	124

المجموع

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ \dots\ + x_n}{n} = \frac{3+6+2+1+7+5}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\overline{x})^2}$$

$$S_x = \sqrt{\frac{124}{6} - (4)^2} = \sqrt{20.66 - 16} = \sqrt{4.66}$$

الان نوجد الانحراف المعياري بعد إضافة 5 للأعداد لتصبح 10,12,6,7,11,8

X	X^2
8	64
11	121
7	49
6	36
12	144
10	100
54	514

المجموع

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ \dots\ + x_n}{n} = \frac{8+11+7+6+12+10}{6} = \frac{54}{6} = 9$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\overline{x})^2}$$

$$S_x = \sqrt{\frac{514}{6} - (9)^2} = \sqrt{85.66 - 81} = \sqrt{4.66}$$

نلاحظ ان الانحراف المعياري لن يتغير

س 4 \ جد معامل الارتباط بين المتغيرين y ، x ثم بين نوعه ؟

x	1	2	3
y	2	4	6

الحل :-

x	y	x^2	y^2	x.y
1	2	1	4	2
2	4	4	16	8
3	6	9	36	18
6	12	14	56	28

المجموع

$$\bar{x}=\frac{1+2+3}{3}=\frac{6}{3}=2$$

$$\bar{y}=\frac{2+4+6}{3}=\frac{12}{3}=4$$

$$S_x=\sqrt{\frac{\sum x^2}{n}-(\bar{x})^2}$$

$$=\sqrt{\frac{14}{3}-(2)^2}=\sqrt{4.66-4}\Rightarrow S_x=\sqrt{0.66}$$

$$S_y=\sqrt{\frac{\sum y^2}{n}-(\bar{y})^2}=\sqrt{\frac{56}{3}-(4)^2}=\sqrt{18.66-16}\Rightarrow S_y=\sqrt{2.66}$$

$$r=\frac{\frac{\sum x\,y}{n}-\bar{x}\,\bar{y}}{S_xS_y}=\frac{\frac{28}{3}-(2)(4)}{\sqrt{0.66}\times\sqrt{2.66}}=\frac{9.33-8}{\sqrt{1.756}}=\frac{1.33}{1.33}=1$$

س 5 | في السؤال السابق لو ضربت قيم x في 4 تحصل على جدول آخر ،جد معامل الارتباط للقيم الجديدة وقارن النتيجة بالسؤال السابق .

x	4	8	12
y	2	4	6

الحل :-

x	y	x^2	y^2	x.y
4	2	16	4	8
8	4	64	16	32
12	6	144	36	72
24	12	224	56	112

المجموع

$$\bar{x}=\frac{4+8+12}{3}=\frac{24}{3}=8$$

$$\bar{y}=\frac{2+4+6}{3}=\frac{12}{3}=4$$

$$S_x=\sqrt{\frac{\sum x^2}{n}-(\bar{x})^2}$$

$$=\sqrt{\frac{224}{3}-(8)^2}=\sqrt{74.66-64}\Rightarrow S_x=\sqrt{10.66}$$

$$S_y=\sqrt{\frac{\sum y^2}{n}-(\bar{y})^2}=\sqrt{\frac{56}{3}-(4)^2}=\sqrt{18.66-16}\Rightarrow S_y=\sqrt{2.66}$$

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\,\bar{y}}{S_x S_y} = \frac{\frac{112}{3} - (8)(4)}{\sqrt{10.66} \times \sqrt{2.66}} = \frac{37.33 - 32}{\sqrt{28.355}} = \frac{5.33}{5.33} = 1$$

∴ نوع الارتباط طردي تام

س 6 \ جد معامل الارتباط بين المتغيرين x ، y ثم بين نوعه؟

X	- 13	- 9	- 5	- 1	3
y	+3	+ 1	- 1	- 3	- 5

الحل :-

x	y	x^2	y^2	x . y
-13	+3	169	9	-39
-9	+1	81	1	-9
-5	-1	25	1	5
-1	-3	1	9	3
3	-5	9	25	-15
-25	-5	285	45	-55

المجموع

$$\bar{x} = \frac{-13 - 9 - 5 - 1 + 3}{3} = \frac{-25}{5} = -5$$

$$\bar{y} = \frac{3 + 1 - 1 - 3 - 5}{5} = \frac{-5}{5} = -1$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{285}{5} - (-5)^2} = \sqrt{57 - 25} = \sqrt{32} \Rightarrow S_x = 4\sqrt{2}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - (\bar{y})^2} = \sqrt{\frac{45}{5} - (-1)^2} = \sqrt{9 - 1} = \sqrt{8} \Rightarrow S_y = 2\sqrt{2}$$

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\,\bar{y}}{S_x S_y} = \frac{\frac{-55}{5} - (-5)(-1)}{4\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{-11 - 5}{8 \times 2} = \frac{-16}{16} = -1$$

∴ نوع الارتباط عكسي تام