

طبعة

20
26

للسف الثالث المتوسط

حسب حذفات وزارة التربية

1
الجزء



Mathematics

الرياضيات

إعداد الأستاذ

ريهام جاسم



@RMA96



07810772656

الجزء الأول | الفصول 1 - 2 - 3

درجات مجموعة من الطلبة الذين تخرجوا على يد الأستاذ في مادة الرياضيات لعام 2025

الصف الثالث المتوسط - الدور الاول

كل الاحترام والشكر التقدير لكم على جهودكم المبذولة فبكم نرتقي , بارك الله فيكم

ملاحظة : إذا كنتم تريدون أن تصبحوا من الطلبة المتفوقين لدى الأستاذ إلتموا بما يلي :

■ الإلتزام بدروس الأستاذ ومتابعته على يوتيوب .

■ حل الواجبات البيتية باستمرار بدون إنقطاع .

■ إقتناء ملزمة الأستاذ الخاصة بالمادة .

ت	أسم الطالب / ة	الدرجة	ت	أسم الطالب / ة	الدرجة
1	عبدة احمد فؤاد	100	33	مهدي طالب مهدي	86
2	عبد الخالق راجي جليل	100	34	عمر سلوان قاسم	85
3	بشار باسم محمد	100	35	حسين علي خميس	84
4	دنيا علي يوسف	98	36	محمد علاء يونس	83
5	حسين علي بدري	97	37	يوسف صوكر سلمان	81
6	تقوى إبراهيم خليل	97	38	عبد الله عمار ابراهيم	81
7	شهد علاء يوسف	97	39	حسن محمد امجد	81
8	مهند باسم هادي	96	40	احمد غزوان عبد الجبار	79
9	احمد ماجد مظلوم	95	41	حيدر قيصر صلال	79
10	حسام مالك جلوب	95	42	علي باسم صالح	79
11	حيدر رياض حسين	95	43	عمار مهند فالح	79
12	يوسف كهلان عبد	95	44	ياسر قيس عبد الرحمن	79
13	همام احمد خزعل	94	45	أيوب حسن داود	78
14	احمد فرات خالد	94	46	علي احمد مبدر	78
15	محمد عبد الله عبد الحسن	93	47	وسام شاكر محمود	77
16	علي احمد منصور	93	48	أبو الفضل احمد حمزة	76
17	إبراهيم عمر محمد	91	49	عبد المجيد عبد الغني مجيد	76
18	سعد فرج موحان	91	50	بشار ضياء علي	75
19	ريحانة احمد هادي	90	51	غسان محمد خلف	75

75	غدير سلوان عبد	52	90	حيدر انيس عبد	20
74	غيث عباس خليفة	53	90	كرار اركان احمد	21
74	عبد الله سلام هادي	54	89	علي حامد مصلح	22
74	يوسف اياد سمير	55	89	عمر غانم فالح	23
73	احمد عادل احمد	56	89	حسن محمد حسن	24
73	اوس علي عزيز	57	89	حسين ضياء احمد	25
72	محسن هيثم بريسم	58	89	حسين ابراهيم قاسم	26
72	محمد رافد صالح	59	88	حيدر صباح هادي	27
72	ايسر نهاد مخبير	60	88	زينب قاسم شاكر	28
71	عبد الله حامد عباس	61	88	عبد الرزاق عبد الأمير طاهر	29
71	عبد الله وليد خالد	62	87	عبد الله حسين ياور	30
71	ياسر عامر احمد	63	87	مصطفى رافد محمود	31
70	ادريس محمد عزت	64	87	منار أنور علي	32

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

امسح الرمز للوصول للدروس المجانية على يوتيوب



[Handwritten signature]

ريهاب جاسم محمد
مدرس الرياضيات

SCAN QR CODE SCAN QR CODE

أساسيات مهمة في منهج الرياضيات

- 1- حفظ جدول الضرب ! .
- 2- الإشارة السالبة تكون دائماً على يسار الرقم مثال $\leftarrow (-2, -3, -4, -7)$ وهكذا.
- 3- الإشارة الموجبة لا تكتب وأي عدد لا يحتوي على إشارة فهو موجب مثال $\leftarrow (6, 7, 8, 9)$.
- 4- مراعاة الإشارات في عملية الجمع والطرح :-
 ❖ إذا كانت الإشارات متشابهة نضع إشارة أحدهما ثم نجمع .
 ❖ إذا كانت الإشارات مختلفة نضع إشارة الكبير ثم نطرح .
- 5- مراعاة الإشارات في عملية الضرب والقسمة :-
 ❖ إذا كانت الإشارات متشابهة لكل من الضرب والقسمة فإن الإشارة تكون موجبة (+) .
 ❖ إذا كانت الإشارات مختلفة لكل من الضرب والقسمة فإن الإشارة تكون سالبة (-) .
- 6- إذا كانت الجذور متشابهة نجري عملية الجمع أو الطرح بين المعاملات وحسب الإشارة أما إذا كانت الجذور مختلفة فتبقى كما هي ولا يجوز الجمع أو الطرح .
- 7- تحويل الصيغة الجذرية الى صيغة أسية أو بالعكس .

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad \begin{matrix} \text{الأُس} \\ \text{دليل الجذر} \end{matrix}$$

8- الإشارات في عملية الضرب والقسمة :-

❖ إذا كانت الإشارات متشابهة فإن الضرب والقسمة تكون إشارتهم (+) .

$$\begin{array}{l} \text{الإشارة الموجبة} \\ + \times + = + / + \div + = + / \frac{+}{+} = + \\ \text{الإشارة السالبة} \\ - \times - = + / - \div - = + / \frac{-}{-} = + \end{array}$$

❖ إذا كانت الإشارات مختلفة فإن الضرب والقسمة تكون إشارتهم (-) .

$$+ \times - = - / - \times + = - / + \div - = - / \frac{-}{+} = -$$

9- جذور تربيعية وتكعيبية حفظ .

● الجذور التربيعية :

$$\begin{array}{l} \sqrt{1} = 1, \sqrt{4} = 2, \sqrt{9} = 3, \sqrt{16} = 4, \sqrt{25} = 5, \sqrt{36} = 6, \sqrt{49} = 7, \sqrt{64} = 8, \\ \sqrt{81} = 9, \sqrt{100} = 10, \sqrt{121} = 11, \sqrt{144} = 12, \sqrt{169} = 13, \sqrt{196} = 14 \\ \sqrt{225} = 15, \sqrt{256} = 16, \sqrt{289} = 17, \sqrt{324} = 18, \sqrt{361} = 19, \sqrt{400} = 20 \end{array}$$

● الجذور التكعيبية :

$$\begin{array}{l} \sqrt[3]{1} = 1, \sqrt[3]{8} = 2, \sqrt[3]{27} = 3, \sqrt[3]{64} = 4, \sqrt[3]{125} = 5, \sqrt[3]{216} = 6, \sqrt[3]{343} = 7, \\ \sqrt[3]{512} = 8, \sqrt[3]{729} = 9, \sqrt[3]{1000} = 10 \end{array}$$

الفصل الأول : العلاقات والمتباينات في الأعداد الحقيقية

1

ترتيب العمليات في الأعداد الحقيقية

الدرس
[1-1]

[1-1-1] استعمال ترتيب العمليات لتبسيط جمل عددية

الحالة الأولى : إذا كان المقدار بالصورة $(a + b)(a - b)$ يتم التبسيط بطريقتين :

- (1) توزيع القوس الأول على القوس الثاني ومن ثم جمع أو طرح الحدود المتشابهة .
- (2) القوسان يمثلان تحليل فرق بين مربعين يمكن حلها بالطريقة : $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

الحالة الثانية : فتح الأقواس باستخدام خاصية التوزيع ((الضرب على الجمع أو الطرح))

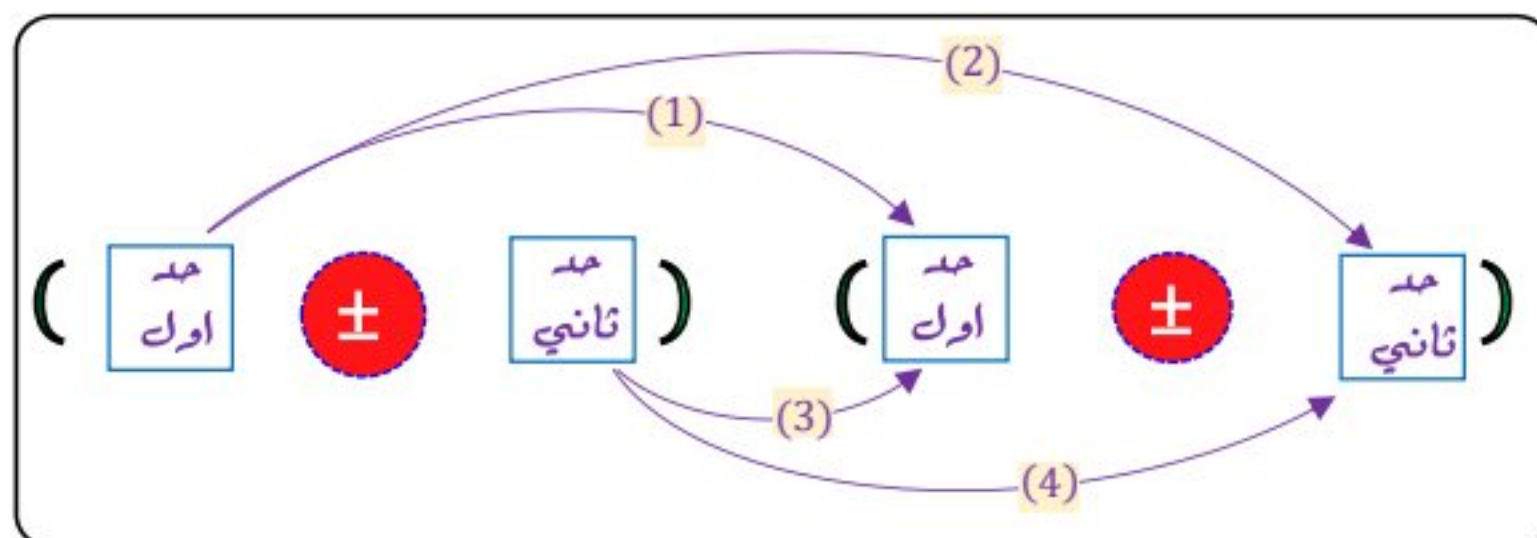
- (1) وضع الجذور بأبسط صورة باستخدام طريقة التحليل أو عوامل العدد بشرط أن يكون أحد العوامل مربع كامل .
- (2) فتح الأقواس بخاصية التوزيع وخواص ضرب الجذور .
- (3) إذا كان السؤال يحتوي على جذور فيمكن تبسيطها مرة أخرى .

الحالة الثالثة : الجمل العددية التي تحتوي على القسمة أو الضرب :

- (1) في حالة الضرب وضع الأعداد الحقيقية (الجذور) في أبسط صورة ثم نجري عمليات الاختصارات أن وجدت .
- (2) نجري عمليات الضرب ((البسط × البسط والمقام × المقام)) .
- (3) في حالة القسمة نقلب القسمة إلى ضرب ونقلب الكسر الذي بعد القسمة .

ت	خواص الجذور التربيعية	ت	خواص الجذور التكعيبية
1	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$	1	$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$
2	$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, b > 0$	2	$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}, b > 0$
3	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$	3	$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = (\sqrt[3]{a})^3 = a$
4	$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$	4	$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$
		5	$\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{8} &= 2 \\ \sqrt[3]{27} &= 3 \\ \sqrt[3]{64} &= 4 \\ \sqrt[3]{125} &= 5 \\ \sqrt[3]{216} &= 6\end{aligned}$$



مخطط مفيد لمن يواجه مشكلة في عملية
توزيع الضرب

$$(a \pm b)(c \pm d) = ac \pm ad \pm bc \pm bd$$

إليك توضيح للجدول السابق بالتفصيل

أولا | الجمع والطرح

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} =$$

لا يمكن الجمع والطرح بين الأعداد الغير نسبية الغير متشابهة.
فيكون اما بتبسيط احدهم وجعله مشابه للآخر عن طريق التحليل

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{a} =$$

اما هنا تستطيع وبسهولة اجراء الجمع والطرح لان تحت الجذور متشابهة

ثانيا | الضرب

يمكن اجراء عملية الضرب بين الجذور الاعداد الغير متشابهة بضربها مباشرة

$$\sqrt{a} * \sqrt{b} = \sqrt{a * b}$$

يمكن استخراج العدد من تحت الجذور في حال كون العدد الذي تحت الجذر متشابهة

$$\sqrt{a} * \sqrt{a} = a$$

ملاحظة:

اذا كان الجذر تربيعي فيضرب في نفسه مرتين حتى يتم أستخراجه والتكعيبي ثلاث مرات والجذر الرابع اربع مرات..... الخ

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

اذا كان الجذر تربيعي مرفوع الى أس تربيع فإن التربيع يلغي الجذر

$$(\sqrt[3]{a})^3 = a$$

اذا كان الجذر تكعيبي مرفوع الى أس تكعيبي فإن الأس التكعيبي يلغي الجذر التكعيبي

خاصية توزيع الجذر:

توزيع الجذر الى البسط والمقام وتنطبق الملاحظة أيضا " على الجذور التكعيبية .

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

خاصية تحويل الجذر الى أس أو بالعكس . أو نقول بقسمة
الأس
دليل الجذر

محاضرة خواص الجذور التربيعية
يجب مشاهدتها لأنها مهمة جدا
للمواضيع القادمة



بسط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية :

مثال (2)

قانون عكس الفرق بين مربعين
(الحد الثاني) ² - (الحد الاول) ²

بطريقة عكس الفرق بين مربعين نستخدمه فقط
في حالة القوسين المختلفين في الإشارة فقط
و تجدونه على قناتي في يوتيوب بطريقتين

$$1) (\sqrt{12} - \sqrt{18})(\sqrt{12} + \sqrt{18}) = (\sqrt{12})^2 - (\sqrt{18})^2 = 12 - 18 = -6$$

$$2) \left(\sqrt[3]{\frac{8}{27}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \div \left(\frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{27}} \right) = \left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right) \div \left(\frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} \right)$$

$$= \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \times \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{-(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})}{3\sqrt{3}} \times \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} = -1$$



2

أصبح الرمز للوصول الى هذا الدرس

بسط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية واكتب الناتج لأقرب عشر :

مثال (3)

$$1) \sqrt{12}(\sqrt{3} - \sqrt{8}) - 6 = 2\sqrt{3}(\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) - 6$$

$$= 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} - 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{2} - 6$$

$$= 6 - 4\sqrt{6} - 6 = -4\sqrt{6} = -4 \times 2.4 = -9.6$$

$$2) (-27)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{9}\sqrt{7} - \frac{1}{9}\sqrt{28} \right) = \sqrt[3]{-27} \left(\frac{1}{9}\sqrt{7} - \frac{2}{9}\sqrt{7} \right) = -3 \left(\frac{1}{9}\sqrt{7} - \frac{2}{9}\sqrt{7} \right)$$

$$= -3 \times \frac{1}{9}\sqrt{7} + 3 \times \frac{2}{9}\sqrt{7} = -\frac{1}{3}\sqrt{7} + \frac{2}{3}\sqrt{7}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{7} = \frac{1}{3} \times 2.6 = \frac{2.6}{3} = 0.86 \approx 0.9$$

$$\begin{array}{r|l} \text{خارج} & 2 \\ 2 & 8 \\ \hline 2 & 4 \\ 2 & 2 \\ 2 & 1 \\ \hline 2\sqrt{2} & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} \text{خارج} & 2 \\ 2 & 12 \\ \hline 2 & 6 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \\ \hline 2\sqrt{3} & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \text{خارج} & 2 \\ 2 & 28 \\ \hline 2 & 14 \\ 2 & 7 \\ 2 & 1 \\ \hline 2\sqrt{7} & 1 \end{array}$$

تنسيب المقام

إذا كان المقام يحتوي على جذر فيجب التخلص منه هنالك حالتان :

(1) إذا كان المقام يتكون من حد واحد ولا توجد عمليتي جمع أو طرح في المقام نقوم بالضرب والقسمة على نفس المقام . أي أن :

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$$

(2) إذا كان المقام يتكون من حدين نقوم بالضرب والقسمة على نفس المقام بعكس الإشارة الوسطية (مرافق المقام)

$$\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

(3) البسط نحله بطريقة التوزيع (ضرب الأقواس)

المقام يحل بقانون عكس الفرق بين مربعين

قانون عكس الفرق بين مربعين
(الحد الثاني) ² - (الحد الاول) ²

هذه الإشارة ثابتة

بسط الجمل العددية التالية باستعمال تنسيب المقام وترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية :

مثال (4)

$$1) \frac{7 - \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{7 - \sqrt{5}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{7 \times \sqrt{5} - \sqrt{5} \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5} - 5}{5}$$

$$2) \frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{3} - \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{3} - \sqrt{7}} \times \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2\sqrt{3} + \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7} \times \sqrt{3} (2\sqrt{3} + \sqrt{7})}{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{7})^2} = \frac{6\sqrt{7} + 7\sqrt{3}}{12 - 7} = \frac{6\sqrt{7} + 7\sqrt{3}}{5}$$

[1-1-2] استعمال الحاسبة والتقريب لتبسيط جمل عددية

خواص الأسس (حفظ) :

1	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	2	$(a^n)^m = a^{nm}$	3	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	4	$a^0 = 1$
5	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	6	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	7	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$		

1. الخاصية الأولى هي عند الضرب تجمع الأسس مع مراعاة الإشارة والاساس متشابه ينزل كما هو ولا يضرب

2. عندما يكون الرقم مرفوع الى اس والرقم والاس مرفوعين الى اس الاس تضرب

3. اذا كان الاس لقوس والعمليّة ضرب فيوزع على عناصر القوس

4. عند ما يكون اس أي رقم صفر الناتج هو واحد

5. اذا كان الاس سالب يجب ان نتخلص منه بجعله في المقام

6. اذا كان الاس في المقام ورفعه الى البسط يجب تغيير الإشارة

7. اذا كان الاس لقوس فيوزع على عناصر القوس (بسط ومقام)



4



3

أحسب الأسس لكل مما يلي واكتب الناتج مقربا الى مرتبتين عشريتين اذا لم يكن عددا صحيحا :

مثال (1)

$$1) 9^{-\frac{3}{2}} = (3^2)^{-\frac{3}{2}} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} = 0.037 \approx 0.04$$

$$2) (\sqrt{7})^2 = \left(7^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 7$$

$$3) 2^{\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{-\frac{3}{2}} = 2^{\frac{5}{3} + \frac{1}{3} - \frac{3}{2}} = 2^{\frac{10+2-9}{6}} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = 1.414 \approx 1.41$$

$$4) 5^2 \div 5^{\frac{3}{2}} = 5^{2 - \frac{3}{2}} = 5^{\frac{4-3}{2}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} = 2.236 \approx 2.24$$

$$5) \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3^{-2} - 2^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \sqrt{2^3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \sqrt{8} \approx 0.25 + 0.11 - 2.83 = 0.36 - 2.83 = -2.47$$

$$6) 8^{\frac{1}{3}} - (-8)^0 + 3^2 \times 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{8} - 1 + 3^{2+\frac{1}{2}} = 2 - 1 + 3^{\frac{4+1}{2}} = 1 + 3^{\frac{5}{2}} = 1 + \sqrt{3^5}$$

$$= 1 + \sqrt{243} \approx 1 + 15.588 = 16.588 = 16.59$$

استعمل الحاسبة لتكتب الناتج بالصورة العلمية للعدد مقربا لأقرب مرتبتين عشريتين:

مثال (2)

$$1) 7.6 \times 10^{-4} - 0.4135 \times 10^{-3} = 7.6 \times 10^{-4} - 4.135 \times 10^{-4} = (7.6 - 4.135) \times 10^{-4}$$

$$= 3.465 \times 10^{-4} \approx 3.47 \times 10^{-4}$$

$$2) 0.052 \times 10^4 + 7.13 \times 10^2 = 5.2 \times 10^2 + 7.13 \times 10^2 = (5.2 + 7.13) \times 10^2$$

$$= 12.33 \times 10^2$$

$$3) (7.83 \times 10^{-5})^2 = (7.83 \times 10^{-5})(7.83 \times 10^{-5}) = 61.3089 \times 10^{-10} \approx 61.31 \times 10^{-10}$$

$$4) 4.86 \times 10^2 \div 0.55 \times 10^5 = (4.86 \div 0.55) \times 10^2 \times 10^{-5} = 8.836 \times 10^{-3}$$

تأكد من فهمك

بسّط الجمل العددية الآتية:

$$1) (\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 = 5 - 3 = 2$$

$$2) (\sqrt{7} - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{7} - \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{2}) = \sqrt{7} \times \sqrt{7} - \sqrt{7} \times \sqrt{2} - \sqrt{2} \times \sqrt{7} + \sqrt{2} \times \sqrt{2}$$

$$= 7 - \sqrt{14} - \sqrt{14} + 2 = 9 - 2\sqrt{14}$$

$$3) (\sqrt{125} - \sqrt{20}) \left(\sqrt[3]{\frac{8}{27}} \right) = (5\sqrt{5} - 2\sqrt{5}) \left(\frac{2}{3} \right) = 3\sqrt{5} \times \frac{2}{3} = 2\sqrt{5}$$

$$\begin{array}{r} \text{خارج} \\ \begin{array}{r} 20 \\ 10 \\ 5 \\ 1 \end{array} \\ \begin{array}{r} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 2\sqrt{5} \end{array} \\ \text{داخل} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{خارج} \\ \begin{array}{r} 125 \\ 25 \\ 5 \\ 1 \end{array} \\ \begin{array}{r} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5\sqrt{5} \end{array} \\ \text{داخل} \end{array}$$

$$4) \frac{4\sqrt{12}}{5\sqrt{-27}} \div \frac{2\sqrt{24}}{\sqrt{8}} = \frac{4 \times 2\sqrt{3}}{5(-3)} \div \frac{2 \times 2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{3}}{-15} \div \frac{4\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{-15} \div \frac{4\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{-15} \times \frac{2}{4\sqrt{3}} = \frac{4}{-15}$$

$$\begin{array}{r} \text{خارج} \\ \begin{array}{r} 8 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{array} \\ \begin{array}{r} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2\sqrt{2} \end{array} \\ \text{داخل} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{خارج} \\ \begin{array}{r} 12 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \end{array} \\ \begin{array}{r} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 2\sqrt{3} \end{array} \\ \text{داخل} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{خارج} \\ \begin{array}{r} 24 \\ 12 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \end{array} \\ \begin{array}{r} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 2\sqrt{3}\sqrt{2} \end{array} \\ \text{داخل} \end{array}$$

بسّط الجمل العددية التالية واكتب الناتج لأقرب عشر:

$$5) \sqrt{7}(\sqrt{28} - \sqrt{2}) - 5 = \sqrt{7}(2\sqrt{7} - \sqrt{2}) - 5 = \sqrt{7} \times 2\sqrt{7} - \sqrt{7} \times \sqrt{2} - 5$$

$$= 14 - \sqrt{14} - 5 = 9 - \sqrt{14} = 9 - 3.74$$

$$= 5.26 \approx 5.3$$

$$\begin{array}{r} \text{خارج} \\ \begin{array}{r} 28 \\ 14 \\ 7 \\ 1 \end{array} \\ \begin{array}{r} 2 \\ 2 \\ 7 \\ 2\sqrt{7} \end{array} \\ \text{داخل} \end{array}$$

6 $(-125)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{10} \sqrt{3} - \frac{1}{4} \sqrt{12} \right) = \sqrt[3]{-125} \left(\frac{1}{10} \sqrt{3} - \frac{1}{4} \times 2\sqrt{3} \right) = -5 \left(\frac{1}{10} \sqrt{3} - \frac{1}{2} \sqrt{3} \right)$

$= -5 \times \frac{1}{10} \sqrt{3} + 5 \times \frac{1}{2} \sqrt{3} = \frac{-1}{2} \sqrt{3} + \frac{5}{2} \sqrt{3}$

$= \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} = 2 \times 1.73 = 3.46$

20
10
5
1

2
2
3
2√3

خارج
داخل

بسط الجمل العددية التالية باستعمال تنسيب المقام وترتيب العمليات على الأعداد :

7 $\frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \times 1 - \sqrt{3} \times \sqrt{3}}{4(3)} = \frac{\sqrt{3}-3}{12}$

8 $\frac{1-\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \frac{1-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} \times 1 - \sqrt{5} \times 2\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}-10}{5}$

9 $\frac{\sqrt{50}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} - \frac{10-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{10-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3} \times 5\sqrt{2} - \sqrt{3} \times \sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{6} \times 10 - \sqrt{6} \times \sqrt{6}}{12}$

$= \frac{5\sqrt{6}-3}{6} - \frac{10\sqrt{6}-6}{12} = \frac{10\sqrt{6}-6-10\sqrt{6}+6}{12} = \frac{0}{12} = 0$

20
10
5
1

2
2
5
2√5

خارج
داخل

50
25
5
1

2
5
5
5√2

خارج
داخل



5

أمسح الرمز للوصول الى هذا الدرس

استعمل ترتيب العمليات واكتب الناتج مقربا الى مرتبتين عشريتين مستعملا الحاسبة لكل مما يأتي :

10 $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3^{-3} - 3^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \sqrt{3^3} = \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \sqrt{27} = \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - 3\sqrt{3} = 0.111 + 0.037 - 3(1.73)$

$= 0.148 - 5.19 = -5.042 \approx -5.04$

11 $27^{\frac{1}{2}} - (-9)^0 + 3^2 \times 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{27} - 1 + 9 \times \sqrt{5} = 3\sqrt{3} - 1 + 9 \times 2.236$

$= 3 \times 1.73 - 1 + 20.124$

$= 5.19 - 1 + 20.124 = 24.314 \approx 24.31$

استعمل الحاسبة لتكتب الناتج بالصورة العلمية للعدد مقربا لأقرب مرتبتين عشريتين :

12 $6.43 \times 10^{-5} - 0.25 \times 10^{-4} = 0.643 \times 10^{-4} - 0.25 \times 10^{-4} = (0.643 - 0.25) \times 10^{-4}$

$= 0.393 \times 10^{-4} \approx 0.39 \times 10^{-4}$

13 $(9.23 \times 10^{-3})^2 = 9.23 \times 10^{-3} \times 9.23 \times 10^{-3} = 85.192 \times 10^{-6} \approx 85.19 \times 10^{-6}$

تدرب وحل التمرينات

بسط الجمل العددية الآتية:

$$14 \quad (\sqrt{18} - \sqrt{50}) \left(\frac{-27}{64} \right)^{\frac{1}{3}} = (3\sqrt{2} - 5\sqrt{2}) \left(\sqrt[3]{\frac{-27}{64}} \right) = -2\sqrt{2} \times \frac{-3}{4} = \frac{6\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$15 \quad \frac{\sqrt{12}}{3\sqrt[3]{125}} \div \frac{5\sqrt[3]{8}}{\sqrt{25}} = \frac{2\sqrt{3}}{3 \times 5} \div \frac{5 \times 2}{5} = \frac{2\sqrt{3}}{15} \div \frac{10}{5} = \frac{2\sqrt{3}}{15} \times \frac{5}{10} = \frac{\sqrt{3}}{15}$$

بسط الجمل العددية التالية واكتب الناتج لأقرب عشر:

$$16 \quad 7\sqrt{\frac{2}{49}} - 3\sqrt{\frac{8}{81}} + \sqrt{\frac{18}{36}} = 7 \times \frac{\sqrt{2}}{7} - 3 \times \frac{\sqrt{8}}{9} + \frac{\sqrt{18}}{6} = \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{6\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{6} = \frac{5\sqrt{2}}{6}$$

$$= \frac{5 \times 1.41}{6} = \frac{7.05}{6} = 1.17 \approx 1.2$$

بسط الجمل العددية التالية باستعمال تنسيب المقام وترتيب العمليات على الأعداد

$$17 \quad \frac{\sqrt{7} - 3\sqrt{5}}{\sqrt{7} + 3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7} - 3\sqrt{5}}{\sqrt{7} + 3\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{7} - 3\sqrt{5}}{\sqrt{7} - 3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7}(\sqrt{7} - 3\sqrt{5}) - 3\sqrt{5}(\sqrt{7} - 3\sqrt{5})}{(\sqrt{7})^2 - (3\sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{7 - 3\sqrt{35} - 3\sqrt{35} + 45}{7 - 45} = \frac{7 - 3\sqrt{35} - 3\sqrt{35} + 45}{-38}$$

$$= \frac{52 - 6\sqrt{35}}{-38} = \frac{-52 + 6\sqrt{35}}{38}$$

(الاول)² - (الثاني)²

$$18 \quad \frac{\sqrt{33} - \sqrt{11}}{\sqrt{99}} - \frac{\sqrt{60} - \sqrt{5}}{5\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{33} - \sqrt{11}}{3\sqrt{11}} - \frac{2\sqrt{15} - \sqrt{5}}{5\sqrt{15}}$$

$$= \frac{\sqrt{33} - \sqrt{11}}{3\sqrt{11}} \times \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}} - \frac{2\sqrt{15} - \sqrt{5}}{5\sqrt{15}} \times \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = \frac{(\sqrt{33} - \sqrt{11})\sqrt{11}}{3\sqrt{11} \times \sqrt{11}} - \frac{(2\sqrt{15} - \sqrt{5})\sqrt{15}}{5\sqrt{15} \times \sqrt{15}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{11} \times \sqrt{11} - 11}{33} - \frac{2 \times 15 - \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{3}}{75} = \frac{11\sqrt{3} - 11}{33} - \frac{30 - 5\sqrt{3}}{75}$$

$$\frac{11(\sqrt{3} - 1)}{33} - \frac{5(6 - \sqrt{3})}{75} = \frac{(\sqrt{3} - 1)}{3} - \frac{(6 - \sqrt{3})}{15} = \frac{5(\sqrt{3} - 1) - (6 - \sqrt{3})}{15}$$

$$\frac{5\sqrt{3} - 5 - 6 + \sqrt{3}}{15} = \frac{-11 + 6\sqrt{3}}{15}$$

امسح الرمز للوصول الى هذا الدرس



تدرب وحل مسائل حياتية



19 **الأقمار الاصطناعية:** يستعمل القمر الصناعي بصفة أساسية في الاتصالات مثل إشارات التلفاز والمكالمات الهاتفية في جميع أنحاء العالم والتنبؤ بالطقس وتعقب الأعاصير، إذ تدور هذه الأقمار بسرعات محددة في مدارات خاصة بها حول الأرض، وتحسب سرعة القمر المدارية بالعلاقة التالية: $v = \sqrt{\frac{4 \times 10^{14}}{r}}$ m/sec ، إذ r نصف قطر المدار (بُعد القمر عن مركز الأرض). ما سرعة القمر إذا كان نصف قطر المدار 300km ؟

الحل

$$r = 300\text{km} = 300 \times 1000 = 3 \times 10^5 \text{m}$$

نحول نصف القطر من km الى m

$$v = \sqrt{\frac{4 \times 10^{14}}{r}} = \sqrt{\frac{4 \times 10^{14}}{3 \times 10^5}} = \sqrt{\frac{4 \times 10^{14-5}}{3}} = \frac{2 \times \sqrt{10^9}}{\sqrt{3}} = \frac{2 \times \sqrt{10} \times \sqrt{10^8}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{10} \times 10^4}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2\sqrt{10} \times 10^4}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{30} \times 10^4}{3} = \frac{2 \times 5.47 \times 10^4}{3} = \frac{10.94 \times 10^4}{3} = 3.65 \times 10^4$$



20 **مكافحة الحرائق:** تحسب سرعة تدفق الماء الذي يضخ من سيارات الحريق بالقانون $v = \sqrt{2hg}$ foot/sec ، إذ h تمثل أقصى ارتفاع للماء و g يمثل التعجيل الأرضي (32 foot/sec²). لإطفاء الحريق في الغابات تحتاج إدارة مكافحة الحرائق في الدفاع المدني إلى مضخة لتضخ الماء إلى ارتفاع 80 foot. فهل تفي بحاجتها مضخة تقذف الماء بسرعة 72 foot/sec ؟

$$1 \text{ foot} = 30 \text{ cm}$$

وحدة قياس بالنظام الفرنسي

الحل

$$V: \text{السرعة} . \text{أقصى ارتفاع } h = 80 \text{ foot} . \text{التعجيل الأرضي } g = 32 \text{ foot/sec}^2$$

$$v = \sqrt{2hg} \Rightarrow 72 = \sqrt{2 \times h \times 32} \Rightarrow 72 = \sqrt{64 \times h} \quad \text{بترتيب الطرفين}$$

$$5184 = 64 \times h \Rightarrow h = \frac{5184}{64} = 81 \quad \text{نعم : مضخة الماء تفي بالحاجة} \quad \text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2} \times \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

أمسح الرمز للوصول الى هذا الدرس



21 **هندسة:** جد مساحة المثلث الذي يعلو واجهة البيت إذا كان ارتفاعه $\sqrt{18} - \sqrt{3}$ m وطول قاعدته $3\sqrt{2} + \sqrt{3}$ m.

الحل

$$\text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2} \times \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$A = \frac{1}{2} (3\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{18} - \sqrt{3}) = \frac{1}{2} (3\sqrt{2} + \sqrt{3})(3\sqrt{2} - \sqrt{3})$$

$$= \frac{1}{2} [(3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2] = \frac{1}{2} (18 - 3) = \frac{1}{2} \times 15 = 7.5 \text{ m}^2$$

فكر

22 تحدّ: أثبت صحة ما يأتي:

$$\left(7^{\frac{1}{3}} - 5^{\frac{1}{3}}\right) \left(7^{\frac{2}{3}} + 7^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{3}} + 5^{\frac{2}{3}}\right) = 2$$

الحل

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

$$H.S = \left(7^{\frac{1}{3}} - 5^{\frac{1}{3}}\right) \left(7^{\frac{2}{3}} + 7^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{3}} + 5^{\frac{2}{3}}\right) = \left(7^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 7 - 5 = 2 \quad R.H.S$$

23 أصحّ الخطأ: كتب شاكر ناتج جمع العددين كآتي:

$$8.4 \times 10^{-3} + 0.52 \times 10^{-2} = 1.36 \times 10^{-3}$$

حدّد خطأ شاكر وصحّحه.

الحل

$$8.4 \times 10^{-3} + 0.25 \times 10^{-2} = 8.4 \times 10^{-3} + 2.5 \times 10^{-3} = (8.4 + 2.5) \times 10^{-3} = 10.9 \times 10^{-3}$$

24 حسّ عدديّ: هل أن العدد $\sqrt{125}$ يقع بين العددين 10.28 و 11.28 ؟

$$\sqrt{125} = 5\sqrt{5} = 5 \times 2.23 = 11.15$$

الحل نعم العدد $\sqrt{125}$ يقع بين العددين 10.28 و 11.28 ؟

5	125
5	25
5	5
	1
5√5	

ناتج الجمع بالتقريب لأقرب عُشر:

أكتب

$$\begin{aligned} 6^{\frac{3}{2}} + 5^{\frac{3}{2}} &= \sqrt{6^3} + \sqrt{5^3} = \sqrt{216} + \sqrt{125} \\ &= 6\sqrt{6} + 5\sqrt{5} = 6 \times 2.44 + 5 \times 2.23 \\ &= 14.64 + 11.15 = 25.79 \approx 25.8 \end{aligned}$$

الحل

2	216
2	108
2	54
2	27
3	9
3	3
3	1
6√6	

5	125
5	25
5	5
	1
5√5	

الجزء الأول من هذا الدرس



7

التطبيقات

الدرس
[1-2]

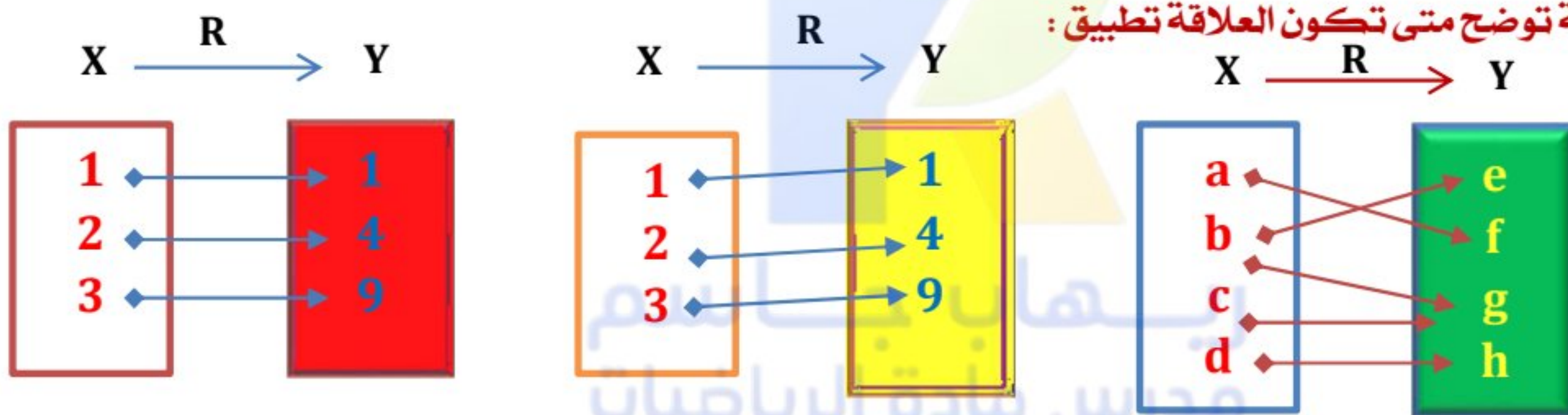
[1-2-1] التطبيق وتمثيله في المستوي الإحداثي

التطبيق (Mappings): لتكن R علاقة من المجموعة X (المجال) إلى المجموعة Y (المجال المقابل) حيث كل عنصر من عناصر X يرتبط بعنصر واحد من عناصر Y عندئذ تسمى العلاقة R تطبيق وتكتب $R: X \rightarrow Y$.

الزوج المرتب (ordered pair): هي مجموعة الأزواج المرتبة (x, y) اذ ينتمي المسقط الأول ((الإحداثي الأول)) إلى المجموعة X والمسقط الثاني ((الإحداثي الثاني)) إلى المجموعة Y من حاصل الضرب الديكارتي $X \times Y$.

المدى (Rang): يمثل المدى المسقط الثاني من الأزواج المرتبة (x, y) أي تمثل صور عناصر المجال ((الناتج)).

فيما يلي أمثلة توضح متى تكون العلاقة تطبيق:



R يمثل تطبيق لأن كل عنصر
من X يرتبط بعنصر واحد من Y

R يمثل تطبيق لأن كل عنصر
من X يرتبط بعنصر واحد من Y

R لا يمثل تطبيق لأن العنصر
 b في المجال ارتبط بعنصرين في
المجال المقابل

هنا هذا السهم الذي يربط بين المجموعتين يسمى قاعدة الاقتران . ويكون الناتج X قاعدة الاقتران عبارة عن معادلة ندخل فيها عناصر المجموعة .. وهذا الناتج يسمى المدى Y هو الذي يرتبط به السهم في المجموعة

الجزء الثالث من الدرس

الجزء الثاني من الدرس



9



8

مثال (1) إذا كانت $R: X \rightarrow Y$ تمثل تطبيقاً بقاعدة اقتران $(y = \frac{1}{2}x)$ من المجموعة $X = \{4, 6, 8\}$ إلى المجموعة $Y = \{2, 3, 4, 5\}$. اكتب التطبيق على شكل مجموعة أزواج مرتبة ثم مثل التطبيق بمخطط سهمي، وحدد المجال والمدى للتطبيق.

الحل

$$y = \frac{1}{2}x, \quad X = \{4, 6, 8\}$$

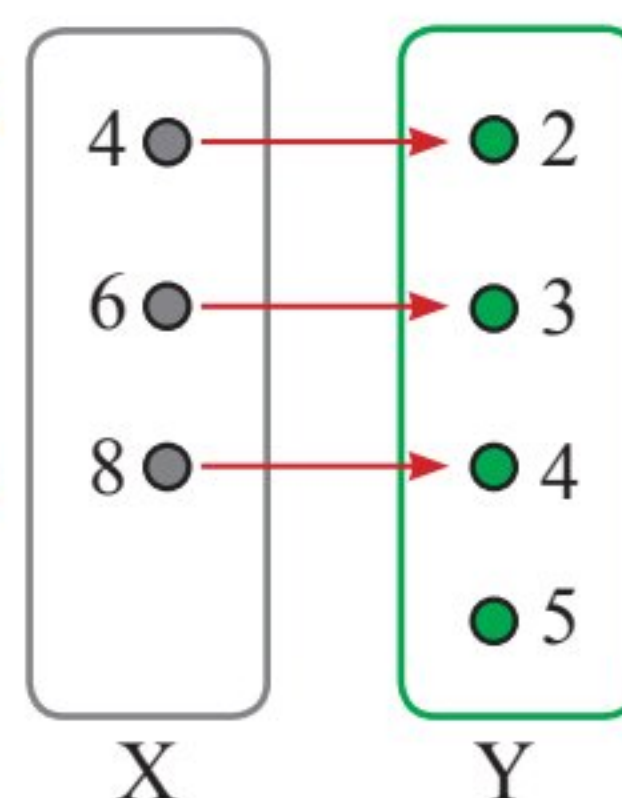
$$y = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

$$y = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

$$y = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

$$R = \{(4, 2), (6, 3), (8, 4)\} \quad \text{المجال } X = \{4, 6, 8\} \Rightarrow \text{الأزواج المرتبة} \\ \Rightarrow \text{المدى} = \{2, 3, 4\}$$

أولاً "ضع قاعدة الاقتران ثانياً" التعويض بدل كل الأرقام الموجودة في المجموعة X الناتج يمثل المدى والأزواج المرتبة هي عبارة عن المدخلات في قاعدة الاقتران والمخرجات



ملاحظة: المدى هو مجموعة جزئية من المجال المقابل للتطبيق

[1-2-2] أنواع التطبيقات

أولاً: التطبيق الشامل | غير الشامل

التطبيق غير الشامل	التطبيق الشامل
يكون التطبيق $f: X \rightarrow Y$ غير شامل إذا كان المجال المقابل N, Z, R, Q	يكون التطبيق $f: X \rightarrow Y$ شامل إذا كان المدى = المجال المقابل

ثانياً: التطبيق المتباين | غير المتباين

التطبيق غير المتباين	التطبيق المتباين
يكون التطبيق $f: X \rightarrow Y$ غير متباين إذا كان: $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \quad f(x_1) = f(x_2)$ ((الناتج متشابهة))	يكون التطبيق $f: X \rightarrow Y$ متباين إذا كان كل عنصر في X يرتبط بعنصر واحد من Y أي: $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \quad f(x_1) \neq f(x_2)$ ((الناتج مختلفة))

ثالثا : التطبيق المتقابل

يكون التطبيق تقابل اذا كان التطبيق شامل ومتباين

مجاميع الأعداد الحفظ : هذه عينة من المجاميع ويستطيع الطالب ان يحفظ اكثر

الأعداد الحقيقية

$$R = \{0,1,2,3,\dots\}$$

الأعداد الطبيعية

$$N = \{1,2,3,\dots\}$$

الأعداد الصحيحة

$$Z = \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$$

مثال (3)

إذا كانت $f: Z \rightarrow Z$ حيث $f(x) = 2x^2 - 3$ ، بين نوع التطبيق حيث Z مجموعة الأعداد الصحيحة.

$$f(x) = 2x^2 - 3, f(-2) = 5, f(-1) = -1, f(0) = -3, f(1) = -1, f(2) = 5$$

الحل

$$f(x) = 2x^2 - 3, X = Z = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$$

$$f(0) = 2(0)^2 - 3 = 0 - 3 = -3$$

$$f(1) = 2(1)^2 - 3 = 2 - 3 = -1$$

$$f(-1) = 2(-1)^2 - 3 = 2 - 3 = -1$$

$$f(2) = 2(2)^2 - 3 = 8 - 3 = 5$$

$$f(-2) = 2(-2)^2 - 3 = 8 - 3 = 5$$

$$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

$$\{-3, -1, 5, \dots\} = \text{المدى}$$

التطبيق ليس شامل لأن المدى $\neq$ المجال المقابل Z

التطبيق ليس متبايناً لأن $f(1) = f(-1) = -1$ بينما $1 \neq -1$

أي ان عوضنا 1 والسالب واحد والنتاج هو نفسه -1
وهذا يخالف شرط التطبيق المتباين

[1-2-3] تركيب التطبيقات

طلابي طالباتي الغالين بدون حفظ النقاط أسفل سوف يصبح موضوع التركيب صعب قليلاً

(i) التطبيق $(fog)(x) = f(g(x))$ ويُقرأ f تركيب g (بعد f) وهو ناتج إيجاد $g(x)$ أولاً ثم إيجاد صورته في التطبيق f .

(ii) التطبيق $(gof)(x) = g(f(x))$ ويُقرأ g تركيب f وهو ناتج إيجاد $f(x)$ أولاً ثم إيجاد صورته في التطبيق g .



الجزء الثاني من الدرس



الجزء الأول من الدرس

مثال (4)

إذا كان $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ، $g(x) = x^2$ ، $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ، $f(x) = 2x + 1$

جد: (i) $(fog)(3)$ ، (ii) $(gof)(3)$ ، ماذا تلاحظ؟ ، (iii) جد قيمة x إذا كان $(fog)(x) = 33$.

الحل

i) $(fog)(3)$ نجد

$$\begin{aligned}(fog)(3) &= f(g(3)) = f(3^2) \\ &= f(9) = 2 \times 9 + 1 \\ &= 19\end{aligned}$$

ii) $(gof)(3)$ نجد

$$\begin{aligned}(gof)(3) &= g(f(3)) \\ &= g(2 \times 3 + 1) \\ &= g(7) = 7^2 = 49\end{aligned}$$

لاحظ أن $(fog)(3) \neq (gof)(3)$

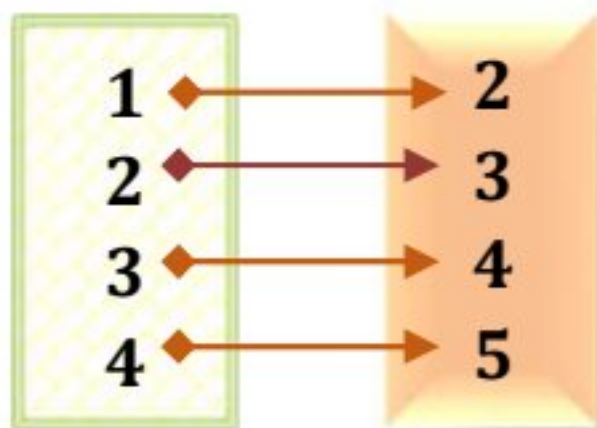
iii) $(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 1$

$$2x^2 + 1 = 33 \Rightarrow 2x^2 = 32 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4 \text{ or } x = -4 \text{ يهمل}$$

تأكد من فهمك

اكتب قاعدة اقتران ومثله بمخطط سهمي واكتب المجال والمدى له:

1 $f = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5)\}$



الحل:
قاعدة الاقتران: $f(x) = x + 1$
المجال = $\{1, 2, 3, 4\}$
المدى = $\{2, 3, 4, 5\}$

2 $g = \{(1,3), (2,5), (3,7), (4,9)\}$



الحل:
قاعدة الاقتران: $f(x) = 2x + 1$
المجال = $\{1, 2, 3, 4\}$
المدى = $\{3, 5, 7, 9\}$

اكتب قاعدة الاقتران للتطبيقات التالية ومثلها في المستوي الإحداثي واكتب المجال والمدى لها:

3 $f = \{(1,0), (2,0), (3,0), (4,0)\}$

الحل:
قاعدة الاقتران: $f(x) = 0$
المجال = $\{1, 2, 3, 4\}$
المدى = $\{0\}$

4 $g = \{(0,0), (1,-1), (2,-2), (3,-3)\}$

الحل:
قاعدة الاقتران: $f(x) = -x$
المجال = $\{0, 1, 2, 3\}$
المدى = $\{0, -1, -2, -3\}$

5 إذا كان التطبيق $f: N \rightarrow N$ إذ $f(x) = 3x + 2$. بين هل أن التطبيق شامل أم لا؟

الحل

$$f(x) = 3x + 2, \quad X = N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$f(1) = 3(1) + 2 = 5$$

$$f(2) = 3(2) + 2 = 8$$

$$f(3) = 3(3) + 2 = 11$$

المدى = $\{5, 8, 11, \dots\}$ $\Leftarrow$ التطبيق ليس شامل لأن المدى $\neq$ المجال المقابل

6 ليكن التطبيقان $f: Z \rightarrow Z$ حيث $f(x) = 3x + 1$ وأن $g: Z \rightarrow Z$ حيث $g(x) = 2x + 5$.

جد قيمة x إذا كان $(fog)(x) = 28$.

الحل

$$f[g(x)] = 28$$

$$f[2x + 5] = 28$$

$$3(2x + 5) + 1 = 28$$

$$6x + 15 + 1 = 28$$

$$6x + 16 = 28$$

$$6x = 28 - 16$$

$$6x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{6} = 2$$

7 إذا كانت $f: N \rightarrow N$ حيث $f(x) = 5x + 2$ وأن $g: N \rightarrow N$ إذ $g(x) = x + 3$.

اكتب التطبيق fog بكتابة الأزواج المرتبة له.

الحل

$$fog(x) = f[g(x)], \quad X = N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$fog(1) = f[g(1)] = f(1 + 3) = f(4) = 5(4) + 2 = 22$$

$$fog(2) = f[g(2)] = f(2 + 3) = f(5) = 5(5) + 2 = 27$$

$$fog(3) = f[g(3)] = f(3 + 3) = f(6) = 5(6) + 2 = 32$$

$$fog = \{(1, 22), (2, 27), (3, 32), \dots\} \quad \text{الأزواج المرتبة} \quad \text{المدى} = \{22, 27, 32, \dots\}$$

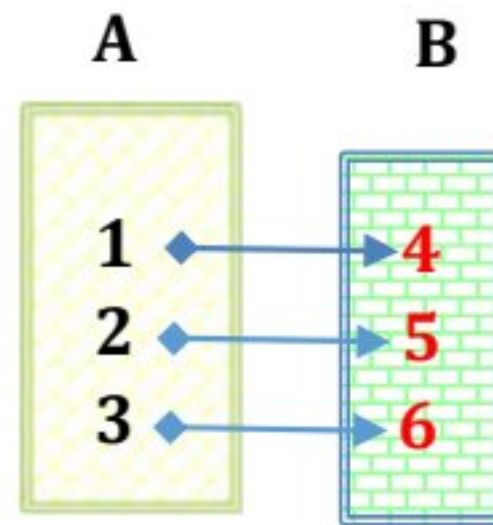
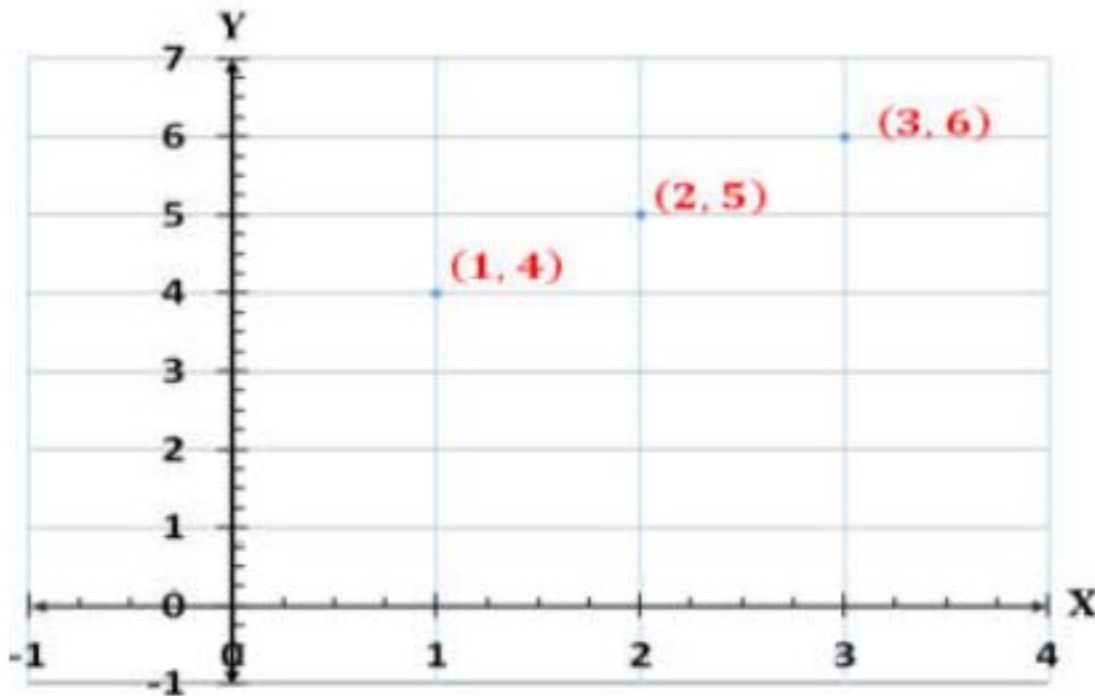
التطبيق ليس شامل لأن المدى $\neq$ المجال المقابل N

التطبيق متباين لأن $fog(1) \neq f \circ g(2)$ بينما $1 \neq 2 \Leftarrow$ التطبيق ليس تقابل .

تدرب وحل التمرينات

8 إذا كان $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{4, 5, 6\}$ و $f: A \rightarrow B$ معرف كالآتي:
 $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$ ، ارسم المخطط السهمي للتطبيق ومثله بالمستوي الإحداثي.

الحل



المدى = $\{4, 5, 6\}$

المجال المقابل = $\{5, 6\}$

التطبيق شامل لأن المدى = المجال المقابل

التطبيق متباين لأن $f(1) \neq f(2)$. التطبيق تقابل

9 إذا كان $f: A \rightarrow Z$ حيث $f(x) = x^2$ والمجموعة $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ، مثل التطبيق في المستوي الإحداثي وبيّن هل أنه تطبيق متباين أم لا ؟

الحل

$$f(x) = x^2, \quad A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$f(-2) = (-2)^2 = 4$$

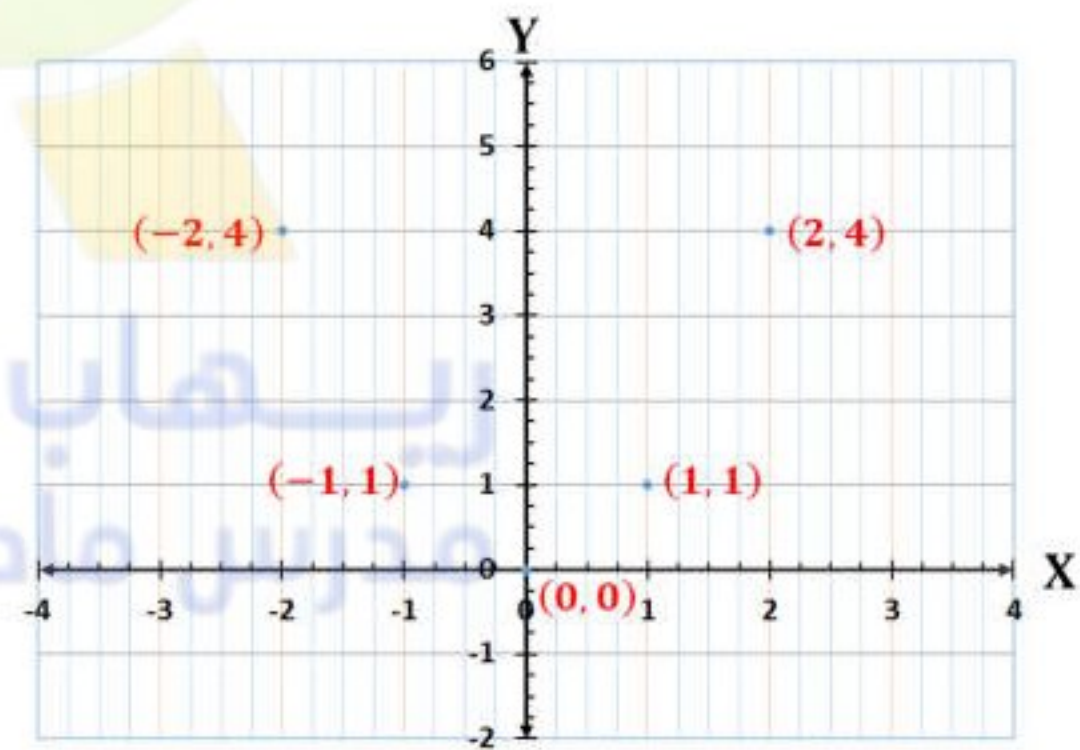
$$f(-1) = (-1)^2 = 1$$

$$f(0) = (0)^2 = 0$$

$$f(1) = (1)^2 = 1$$

$$f(2) = (2)^2 = 4$$

$$f = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$$



التطبيق ليس متباين لأن $f(1) = f(-1)$ بينما $1 \neq -1$

10 ليكن $f: N \rightarrow N$ إذ إنّ $f(x) = x^2$ ، $g: N \rightarrow N$ إذ $g(x) = x + 1$. والمطلوب إيجاد:

i) $(gof)(x)$ ، $(fog)(x)$ ، ii) $(fog)(2)$ ، $(gof)(2)$

الحل

$$1) (gof)(x) = g[f(x)] = g[x^2] = x^2 + 1$$

$$(fog)(x) = f[g(x)] = f[x + 1] = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$2) (fog)(1) = f[g(2)] = f[2 + 1] = f(3) = (3)^2 = 9$$

$$(gof)(2) = g[f(2)] = g[(2)^2] = g(4) = 4 + 1 = 5$$

تدرب وحل مسائل حياتية

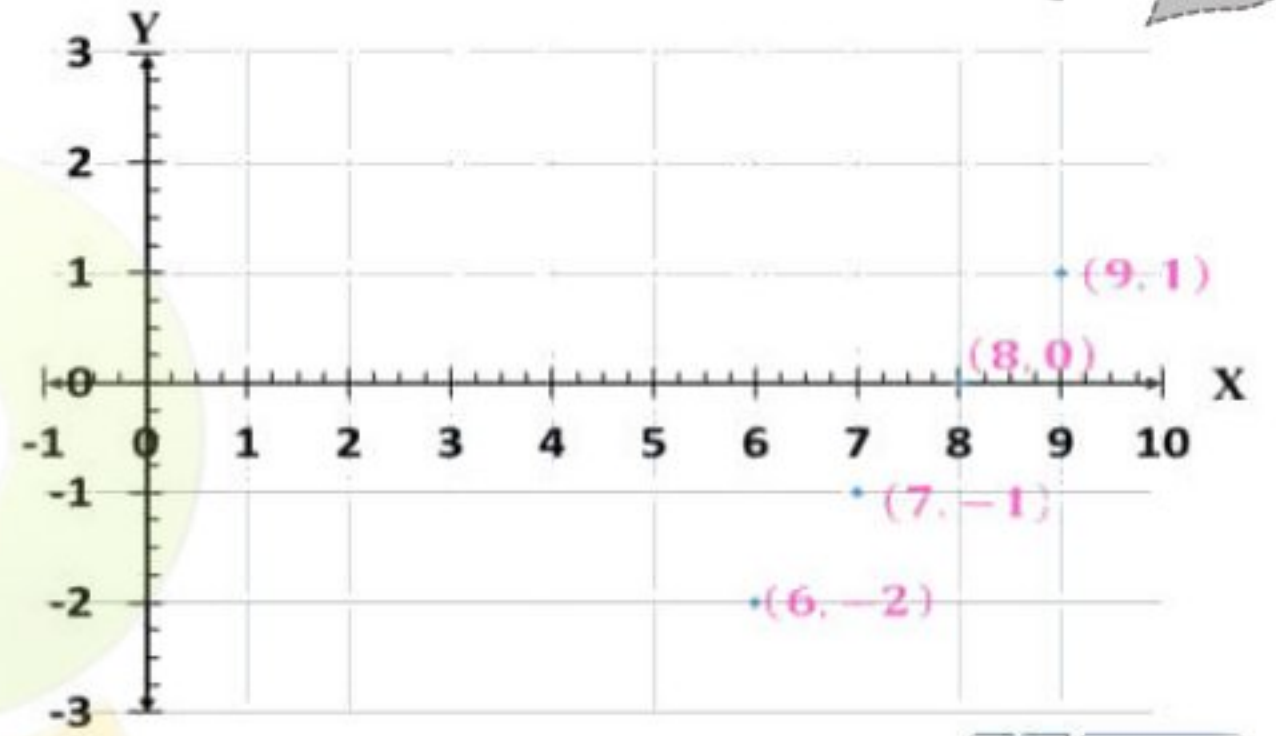


11 **درجات الحرارة:** سجلت درجات الحرارة في أحد أيام الشتاء بالعلاقة التالية $R = \{(6, -2), (9, -3), (12, -4), (15, -5)\}$ إذ يمثل الإحداثي الأول الوقت بالساعة والإحداثي الثاني درجة الحرارة بالدرجات السيليزية. مثل العلاقة بجدول ومثلها بالمستوي الإحداثي، هل تمثل العلاقة تطبيقاً أم لا؟ معللاً إجابتك.

الحل

الوقت (X)	6	7	8	9
درجة الحرارة (Y)	-2	-1	0	1

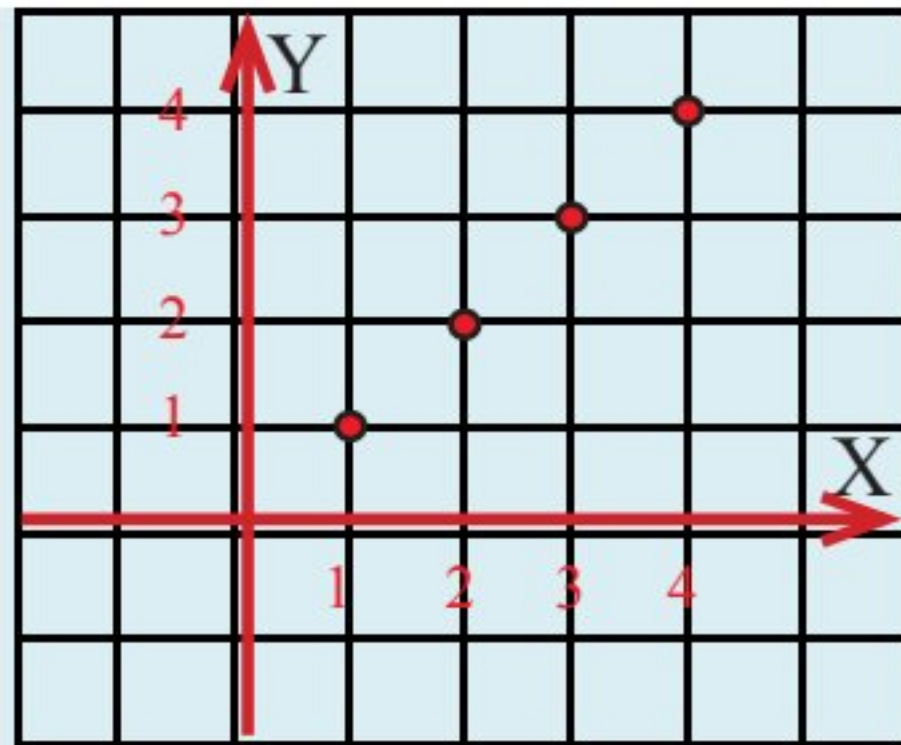
العلاقة تمثل تطبيقاً لأن كل عنصر من عناصر X يرتبط بعنصر واحد من عناصر Y



12 **المستوي الإحداثي:** الشكل البياني المجاور يمثل التطبيق

$f: N \rightarrow N$. اكتب إحداثيات الأزواج المرتبة التي تمثلها نقاط التطبيق في البياني، اكتب قاعدة اقتران التطبيق، هل التطبيق متباين أم لا؟

الحل



$$f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$

الأزواج المرتبة

$$f(x) = x : \text{قاعدة الاقتران}$$

التطبيق متباين لأن $f(1) \neq f(2)$ بينما $1 \neq 2$ ((الناتج مختلف))



13 صحة: العلاقة $W_r = 2\left(\frac{W_b}{3}\right)$ تمثل وزن الماء في جسم الإنسان، و W_b تمثل وزن الإنسان. وزن حسان 150kg ، استعمل نظام خاص بإنقاص الوزن لمدة ثلاثة أشهر ففقد من وزنه 6kg في الشهر الأول ثم 12kg في الشهر الثاني، 12kg في الشهر الثالث. اكتب جمع الأزواج المرتبة للعلاقة بين وزن حسان ووزن الماء في جسمه، هل تمثل تطبيقاً أم لا ؟

الحل $W_r = 2\left(\frac{W_b}{3}\right)$, $W_b = \{150, 150 - 6 = 144, 144 - 12 = 132, 132 - 12 = 120\}$

$W_r(150) = 2\left(\frac{150}{3}\right) = 2(50) = 100$, $W_r(132) = 2\left(\frac{132}{3}\right) = 2(44) = 88$

$W_r(144) = 2\left(\frac{144}{3}\right) = 2(48) = 96$, $W_r(120) = 2\left(\frac{120}{3}\right) = 2(40) = 80$

الأزواج المرتبة $f = \{(150, 100), (144, 96), (132, 88), (120, 80)\}$

يمثل تطبيقاً لأن كل عنصر في المجال يرتبط بعنصر واحد فقط من عناصر المجال المقابل .

فَكَّرْ

14 تحد: إذا كان $A = \{1, 2, 3\}$ وكان $f: A \rightarrow A$ و $g: A \rightarrow A$ معرفان كما يلي:

$g = \{(3, 1), (1, 2), (2, 3)\}$, $f = \{(1, 3), (3, 3), (2, 3)\}$

بين هل أن $f \circ g = g \circ f$ ؟

الحل

$f \circ g(1) = f[g(1)] = f(2) = 3$

$f \circ g(2) = f[g(2)] = f(3) = 3$

$f \circ g(3) = f[g(3)] = f(1) = 3$

$f \circ g(x) \neq g \circ f(x)$

$g \circ f(1) = g[f(1)] = g(3) = 1$

$g \circ f(2) = g[f(2)] = g(3) = 1$

$g \circ f(3) = g[f(3)] = g(3) = 1$

15 أصح الخطأ: قال ياسين إن العلاقة $f: Z \rightarrow Z$ حيث $f(x) = x^3$ لا تمثل تطبيقاً متبايناً.

$f(x) = x^3$, $X = Z = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$f(-2) = (-2)^3 = -8$, $f(-1) = (-1)^3 = -1$

$f(0) = (0)^3 = 0$, $f(1) = (1)^3 = 1$, $f(2) = (2)^3 = 8$

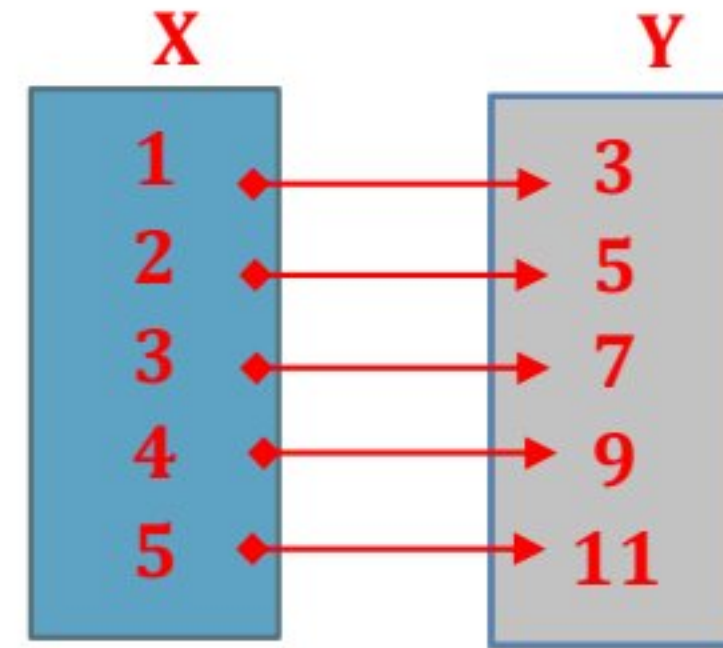
الحل

التطبيق متباين لأن $f(-1) \neq f(1)$ بينما $-1 \neq 1$ ((الناتج مختلف))

16 **حسّ عدديّ:** حدّد ما إذا كانت كل علاقة $f: X \rightarrow Y$ فيما يلي تمثل تطبيقاً أم لا؟ فسّر ذلك.

x	1	2	3	4	5
y	3	5	7	9	11

العلاقة تمثل تطبيق لأن كل عنصر من X يرتبط بعنصر واحد من Y



الحل

قيمة x إذا كان $f: N \rightarrow N$ يمثل تطبيقاً حيث $f(x) = 4x - 3$ ، وأن $(f \circ f)(x) = 33$.

أكتب

$$f[f(x)] = 33$$

$$f(4x - 3) = 33$$

$$4(4x - 3) - 3 = 33$$

$$16x - 12 - 3 = 33 \Rightarrow 16x - 15 = 33$$

$$16x = 33 + 15 \Rightarrow 16x = 48 \Rightarrow x = \frac{48}{16} = 3$$

الحل

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

أمسح هذا الرمز للوصول
الى هذا الدرس



15

المتباينات المركبة

الدرس
[1-3]

[1-3-1] المتباينات المركبة التي تتضمن (و)

المتباينة المركبة التي تحتوي (و) مؤلفة من متباينتين فأنها تكون صحيحة فقط اذا كانت المتباينتان صحيحتين وعليه فإن مجموعة الحل عبارة عن مجموعة تقاطع حل المتباينتين ويمكن ايجاده بطريقتين :

الطريقة الأولى : ببيانيا بتمثيل حل المتباينتين على مستقيم الأعداد ثم تحديد منطقة التقاطع .

الطريقة الثانية : جبريا وذلك بإيجاد مجموعة الحل لكل متباينة ثم أخذ مجموعة التقاطع لهما $(S = S_1 \cap S_2)$

ملاحظة : تحتوي المتباينات على الرمز $>, <, \geq, \leq$

ملاحظة : يكون رسم العلامتين على خط الاعداد كالآتي

طريقة حل المتباينة المركبة التي تتضمن أداة الربط (و)

(1) التخلص من الكسور والأقواس أن وجدت .

(2) وضع المتغير في الوسط .

(3) اذا كان هناك عدد مع المتغير تفصل بينهما عملية الجمع أو الطرح فنقوم بنقل العدد الى طرفي المتباينة مع تغير الإشارة .

(4) اذا كان المتغير يحتوي على معامل فنقوم بقسمة اطراف المتباينة على معامل المتغير .

(5) نجد مجموعة حل المتباينة المركبة وذلك بطريقتين :

الطريقة الأولى (بيانيا)

- تتم تجزئة المتباينة الى جزئين ونحل كل جزء على حدة ونستخرج مجموعة الحل ومجموعة حل الجزء الآخر
- نجد تقاطع مجموعة الحلين على خط الأعداد حيث أن التقاطع يمثل مجموعة حل المتباينة المركبة .

الطريقة الثانية (جبريا)

- هو أن الجزء الأول من المتباينة يرمز له S_1 والجزء الثاني يرمز له S_2 ومنها نجد $S = S_1 \cap S_2$

(6) تكون أداة الربط و ظاهرة أو مخفية في السؤال

أنتبه جيدا

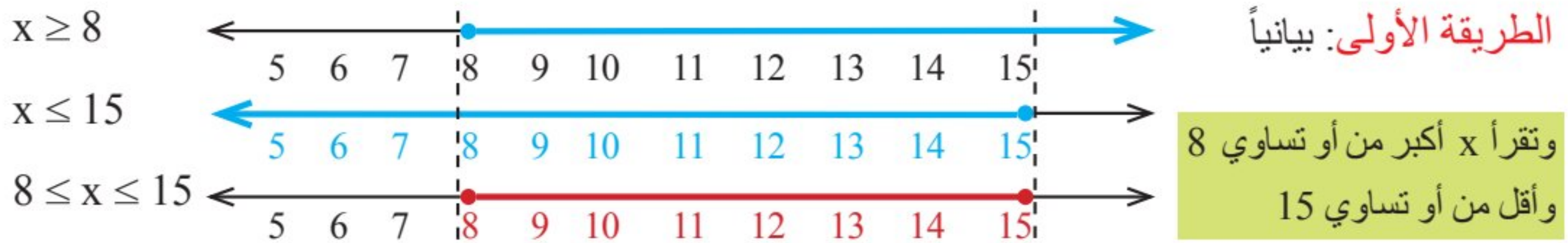
■ عند ضرب أو قسمة اطراف المتباينة المركبة على عدد سالب فإن الترتيب يتغير (نقلب رموز المتباينة) .

مثال (1)

اكتب المتباينة المركبة التي تمثل درجة الحرارة السيليزية الصغرى والكبرى في بغداد وجد حلها.

درجة الحرارة (الصغرى) لا تقل عن 8° ($x \geq 8$)، درجة الحرارة (الكبرى) لا تزيد على 15° ($x \leq 15$)،

لا تقل درجة الحرارة عن 8° ولا تزيد على 15° ($x \geq 8$ و $x \leq 15$)، ويمكن حلها بإحدى الطريقتين:



$$8 \leq x \leq 15 \Leftrightarrow x \geq 8 \text{ و } x \leq 15$$

الطريقة الثانية: جبرياً

$$\Rightarrow S = S_1 \cap S_2 = \{x: x \geq 8\} \cap \{x: x \leq 15\} = \{x: 8 \leq x \leq 15\}$$

مثال (2)

حل المتباينة المركبة التي تتضمن (و) $-3 \leq 3x+2 < 9$ جبرياً ومثل الحل على مستقيم الأعداد:

ملاحظة: نضيف النظير الجمعي للعدد 2 للوسط واليمين واليسار للمتباينة للتخلص منه

$$-3 \leq 3x+2 < 9 \Rightarrow -3-2 \leq 3x+2-2 < 9-2 \Rightarrow -5 \leq 3x < 7 \Rightarrow \frac{-5}{3} \leq \frac{3x}{3} < \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{-5}{3} \leq x < \frac{7}{3} \Rightarrow S = \{x: \frac{-5}{3} \leq x < \frac{7}{3}\}$$

لاحظ التظليل يكون فقط بالداخل



[1-3-2] المتباينات المركبة التي تتضمن (أو)

طريقة حل المتباينة المركبة التي تتضمن أداة الربط (أو)

أمسح هذا الرمز للوصول الى هذا الدرس



16

(1) التخلص من الكسور والأقواس أن وجدت.

(2) إذا كان هناك عدد مع المتغير تفصل بينهما عملية الجمع أو الطرح فنقوم بنقل العدد الى طرفي المتباينة مع تغير الإشارة.

(3) إذا كان المتغير يحتوي على معامل فنقوم بقسمة اطراف المتباينة على معامل المتغير.

(4) نجد مجموعة حل المتباينة المركبة وذلك بطريقتين:

الطريقة الأولى (بيانياً)

• تتم تجزئة المتباينة الى جزئين ونحل كل جزء على حدة ونستخرج مجموعة الحل

ومجموعة حل الجزء الآخر

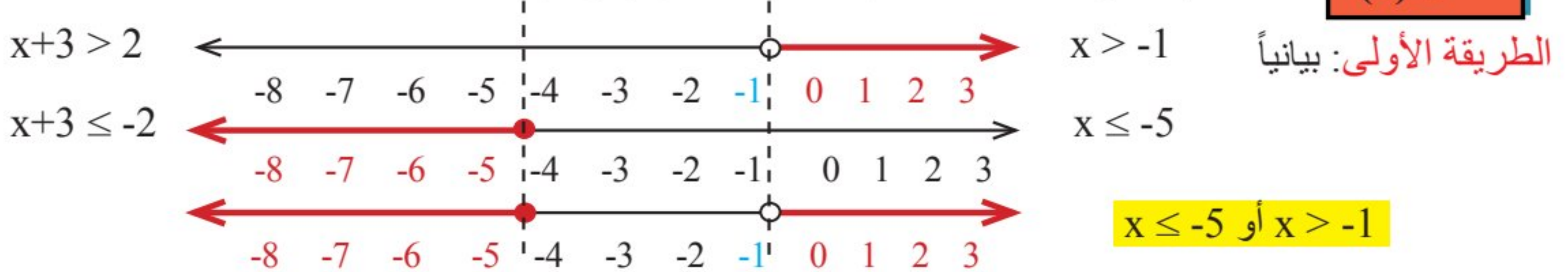
• نجد اتحاد مجموعة الحلين على خط الأعداد حيث أن الاتحاد يمثل مجموعة حل المتباينة المركبة.

الطريقة الثانية (جبرياً)

- هو أن الجزء الأول من المتباينة يرمز له S_1 والجزء الثاني يرمز له S_2 ومنها نجد $S = S_1 \cup S_2$
- (5) تكون اداة الربط أو ظاهرة دائما في السؤال

مثال (3)

حل المتباينة المركبة $x+3 > 2$ أو $x+3 \leq -2$ بيانياً وجبرياً.

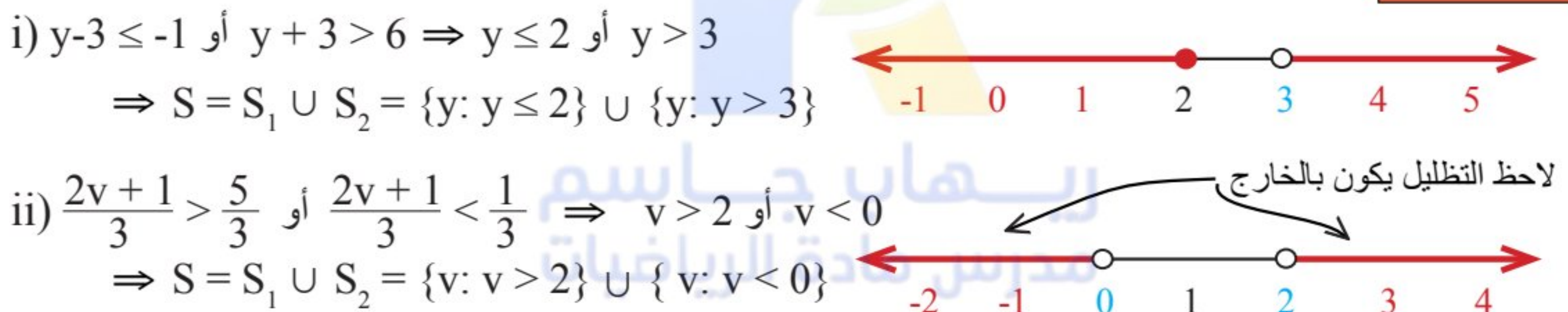


الطريقة الثانية: جبرياً

$$x+3 > 2 \text{ أو } x+3 \leq -2 \Rightarrow \begin{cases} x+3 > 2 \text{ أو } x+3 \leq -2 \\ x > -1 \text{ أو } x \leq -5 \end{cases} \Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \{x: x > -1\} \cup \{x: x \leq -5\}$$

مثال (4)

حل المتباينة التي تتضمن (أو) جبرياً ومثل الحل على مستقيم الأعداد:



[1-3-3] المتباينة المثلثية

في كل مثلث مجموع طول ضلعين من أضلاعه يكون أكبر من طول الضلع الثالث. إذا كانت أطوال اضلاع المثلث

(A, B, C) فيجب أن تكون المتباينات الثلاث صحيحة: حفظ الجزء الثاني من الدرس

الجزء الأول من الدرس



- $A + B > C$
- $A + C > B$
- $B + C > A$



مثال (5)

(i) هل يمكن للقطع المستقيمة التي طولها 2cm ، 10cm ، 13cm أن تشكل مثلثاً؟

لا يمكن أن تشكل مثلثاً لأنه: خطأ $2 + 10 > 13$ ، صحيحة $10 + 13 > 2$ ، صحيحة $2 + 13 > 10$.

(ii) اكتب متباينة مركبة تبين طول الضلع الثالث في مثلث طول ضلعين فيه 10cm ، 8cm .

نفرض طول الضلع الثالث x ومنه:

$$\left. \begin{array}{l} \text{الضلع الثالث أصغر من } 18 \Rightarrow 18 > x \Rightarrow 8 + 10 > x \\ \text{الضلع الثالث أكبر من } 2 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow 8 + x > 10 \\ \text{يهمل} \Rightarrow x > -2 \Rightarrow 10 + x > 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{ولذا يجب أن يكون طول الضلع أصغر} \\ \text{من } 18 \text{ وأكبر من } 2 \text{ وبالمتباينة المركبة} \\ \text{تبيّن طول الضلع الثالث } 2 < x < 18 \end{array}$$

تأكّد من فهمك

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) بيانياً:

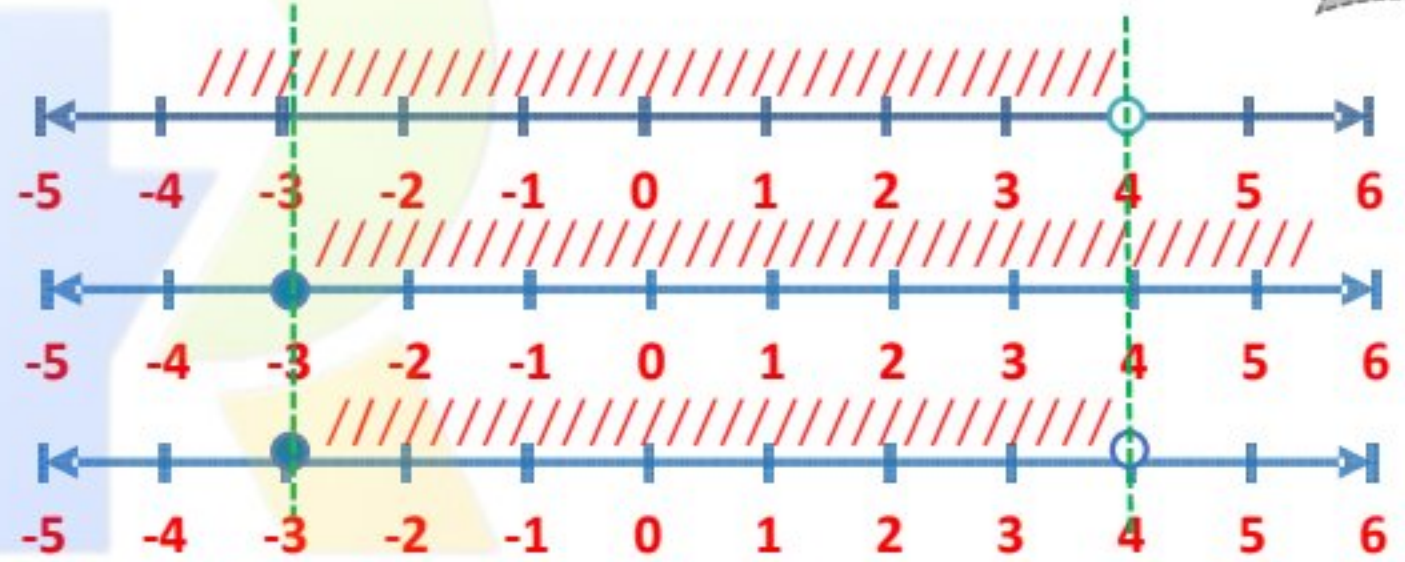
1 $-4 \leq y - 1 < 3$

$$-4 + 1 \leq y < 3 + 1 \Rightarrow -3 \leq y < 4$$

$$y < 4$$

$$y \geq -4$$

$$-3 \leq y < 4$$



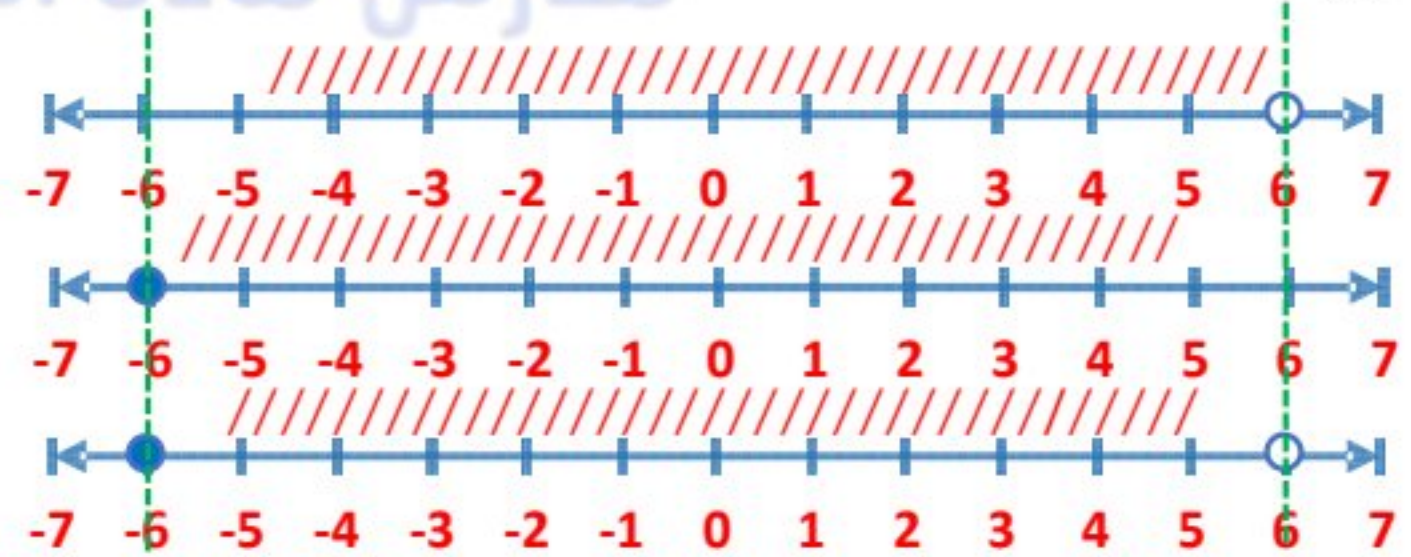
2 $-4 \leq z + 2 \leq 8$

$$-4 - 2 \leq z < 8 - 2 \Rightarrow -6 \leq z < 6$$

$$z < 6$$

$$z \geq -6$$

$$-6 \leq z < 6$$



حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) جبرياً ومثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد:

3 $x + 6 \geq 12$ و $x + 6 < 15$

$$x \geq 12 - 6 \text{ و } x < 15 - 6 \Rightarrow x \geq 6 \text{ و } x < 9$$

$$S = S_1 \cap S_2 = \{x: x \geq 6\} \cap \{x: x < 9\} = \{x: 6 \leq x < 9\}$$

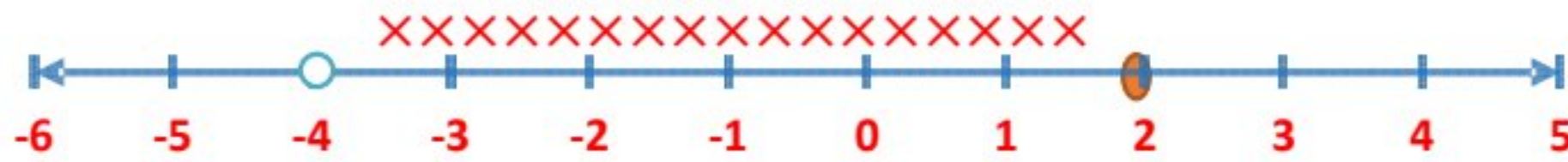


الحل

4 $-9 < 2x - 1 \leq 3$

$$-9 + 1 < 2x \leq 3 + 1 \Rightarrow -8 < 2x < 4 \} \div 2$$

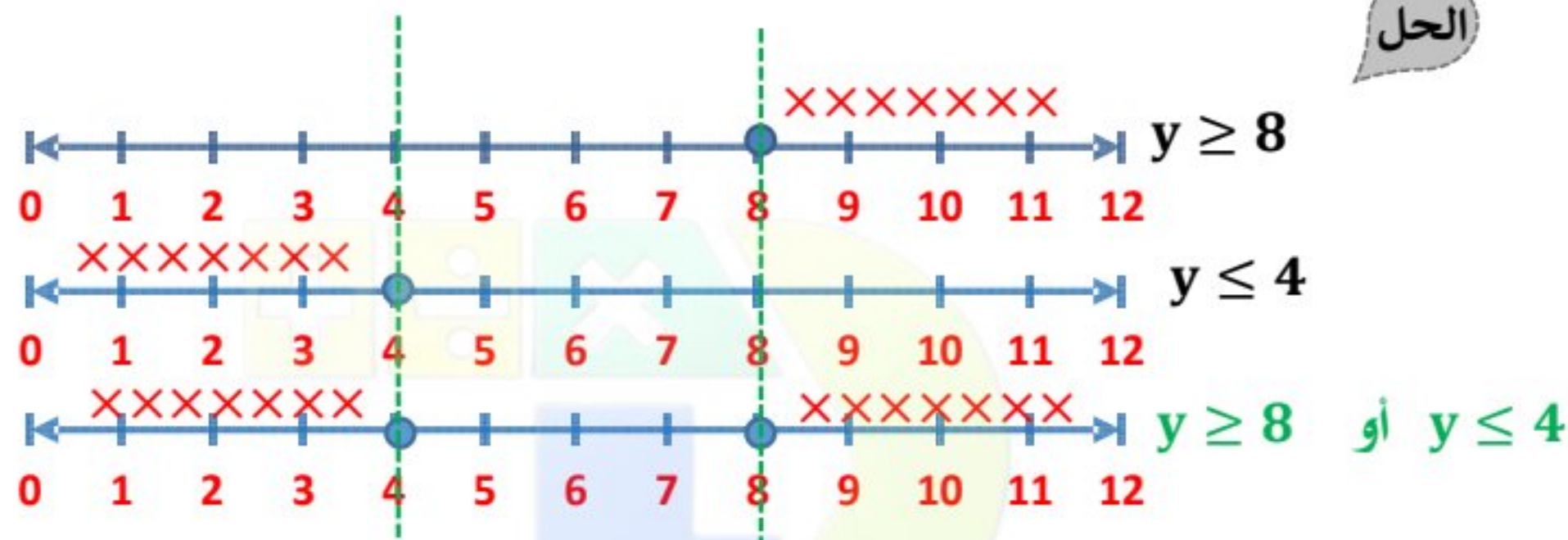
$$\frac{-8}{2} < \frac{2x}{2} \leq \frac{4}{2} \Rightarrow -4 < x \leq 2 \Rightarrow S = \{x : -4 < x \leq 2\}$$



حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) بيانياً:

5 $8y \geq 64$ أو $8y \leq 32 \} \div 8 \Rightarrow y \geq 8$ أو $y \leq 4$

الحل



6 $\frac{2z}{3} < \frac{2}{3}$ أو $\frac{2z}{3} \geq \frac{8}{9}$

الحل

$$\frac{2z}{3} < \frac{2}{3} \} \times 3 \Rightarrow 2z < 2 \} \div 2 \Rightarrow z < 1$$

$$\frac{2z}{3} \geq \frac{8}{9} \} \times 9 \Rightarrow 6z \geq 8 \} \div 6$$

$$z \geq \frac{8}{6} \Rightarrow z \geq \frac{4}{3} \Rightarrow z < 1 \text{ أو } z \geq \frac{4}{3}$$



حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) جبرياً ومثل الحل على مستقيم الأعداد:

7 $3n - 7 > -5$ أو $3n - 7 \leq -9$

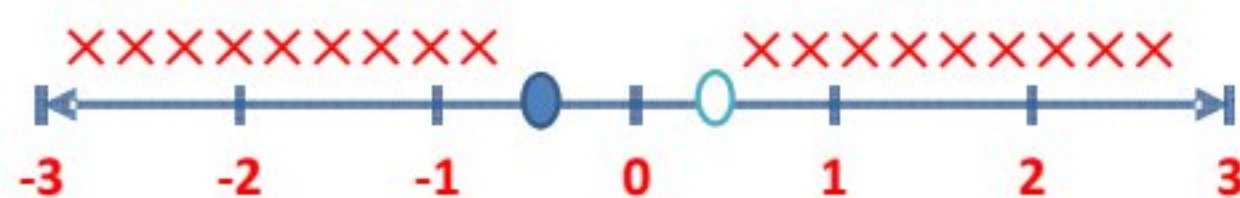
الحل

$$3n > -5 + 7 \text{ أو } 3n \leq -9 + 7$$

$$3n > 2 \text{ أو } 3n \leq -2 \Rightarrow \frac{3n}{3} > \frac{2}{3} \text{ أو } \frac{3n}{3} \leq \frac{-2}{3}$$

$$n > \frac{2}{3} \text{ أو } n \leq \frac{-2}{3}$$

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{n : n > \frac{2}{3}\right\} \cup \left\{n : n \leq \frac{-2}{3}\right\}$$



8 $x+15 \geq 30$ أو $x+15 < 22$

الحل

$x \geq 30 - 15$ أو $x < 22 - 15$

$x \geq 15$ أو $x < 7$



$S = S_1 \cup S_2 = \{x : x \geq 15\} \cup \{x : x < 7\}$

هل يمكن رسم مثلث أطوال أضلاعه كما يأتي:

9 1cm, 2cm, $\sqrt{3}$ cm

حفظ $\sqrt{3} = 1.7$

الحل

$1 + 2 > \sqrt{3} \Rightarrow 3 > \sqrt{3}$ صحيحة

$1 + \sqrt{3} > 2 \Rightarrow 1 + 1.7 > 2 \Rightarrow 2.7 > 2$ صحيحة

$2 + \sqrt{3} > 1 \Rightarrow 2 + 1.7 > 1 \Rightarrow 3.7 > 1$ صحيحة

يمكن رسم مثلث

10 5cm, 4cm, 9cm

الحل

$5 + 4 \ngtr 9 \Rightarrow 9 \ngtr 9$ خطأ لأن 9 ليس أكبر من 9

$5 + 9 > 4 \Rightarrow 14 > 4$ صحيحة

$4 + 9 > 5 \Rightarrow 13 > 5$ صحيحة

لا يمكن رسم مثلثاً

11 1cm, $\sqrt{2}$ cm, $\sqrt{2}$ cm

حفظ $\sqrt{2} = 1.4$

الحل

$1 + \sqrt{2} > \sqrt{2}$ صحيحة

$\sqrt{2} + \sqrt{2} > 1$ صحيحة

$\sqrt{2} + 1 > \sqrt{2}$ صحيحة

يمكن رسم مثلث

12 3cm, 4cm, $2\sqrt{3}$ cm

حفظ $\sqrt{3} = 1.7$

الحل

$3 + 4 > \sqrt{3} \Rightarrow 7 > \sqrt{3}$ صحيحة

$3 + \sqrt{3} > 4 \Rightarrow 3 + 1.7 > 4 \Rightarrow 4.7 > 4$ صحيحة

$4 + \sqrt{3} > 3 \Rightarrow 4 + 1.7 > 3 \Rightarrow 5.7 > 3$ صحيحة

يمكن رسم مثلث

تدرب وحل التمرينات

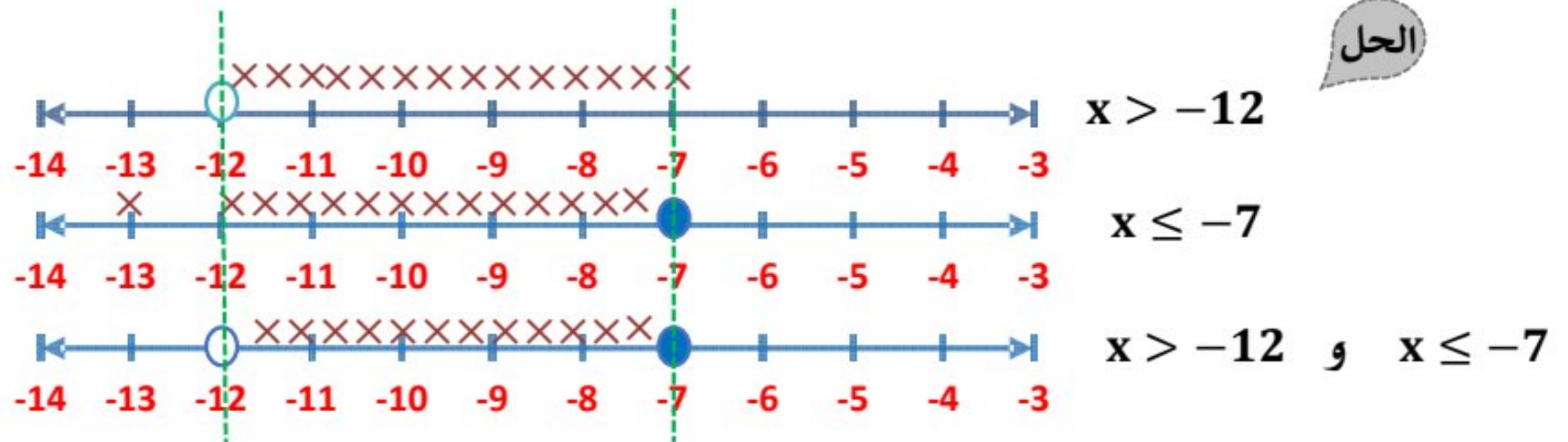
حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) بيانياً:

13 $x > -12$ و $x \leq -7$

$x > -12$

$x \leq -7$

$x > -12$ و $x \leq -7$



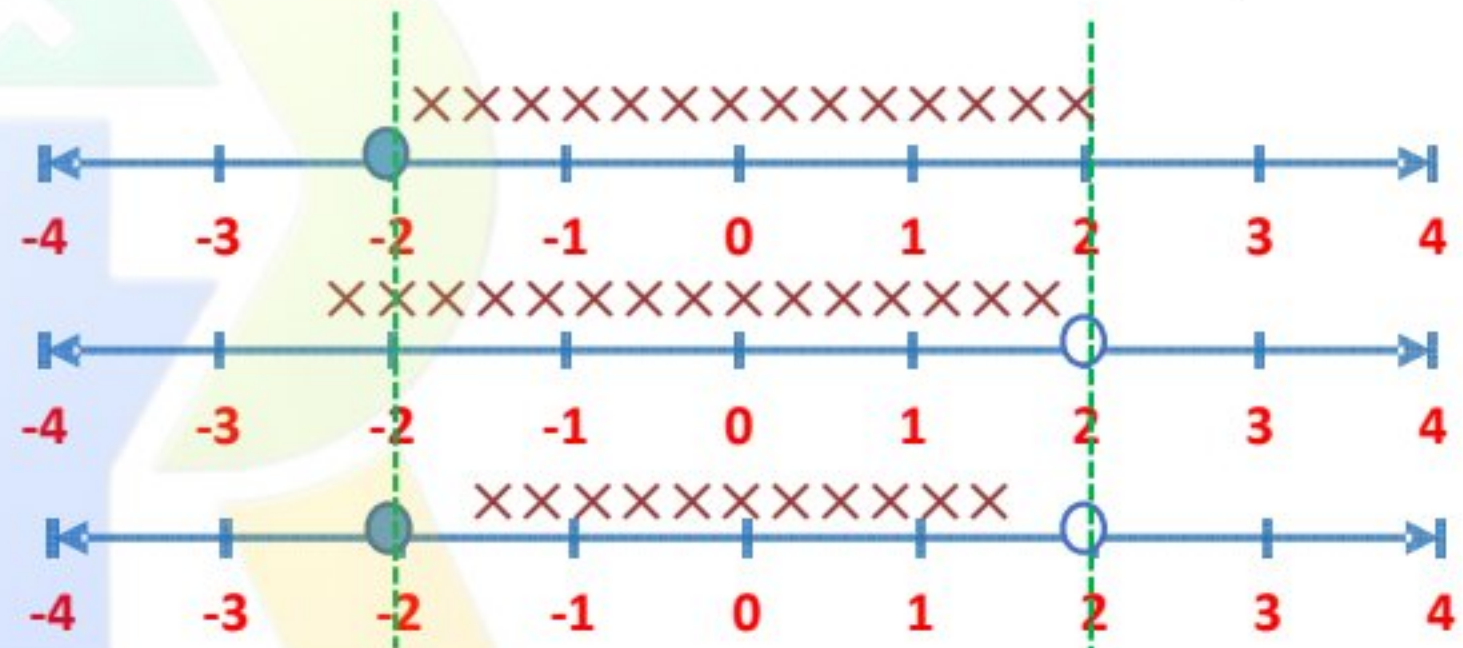
14 $2 \leq y + 4 < 6$

$2 - 4 \leq y < 6 - 4 \Rightarrow -2 \leq y < 2$

$y \geq -2$

$y < 2$

$-2 \leq y < 2$



حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) جبرياً ومثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد:

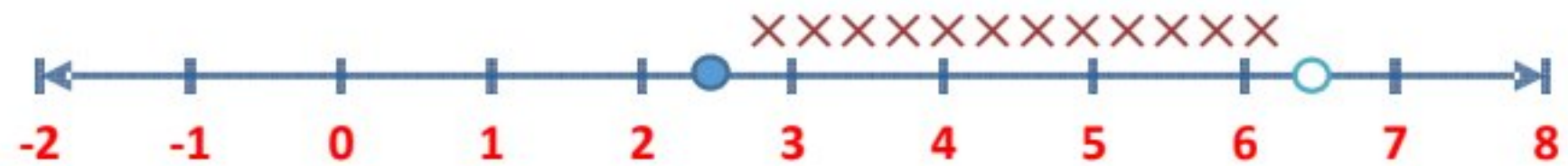
15 $14 \leq 3x + 7$ و $3x + 7 < 26$

$14 - 7 \leq 3x$ و $3x < 26 - 7$

$7 \leq 3x$ و $3x < 19 \} \div 3$

$\frac{7}{3} \leq \frac{3x}{3}$ و $\frac{3x}{3} < \frac{19}{3}$

$\frac{7}{3} \leq x$ و $x < \frac{19}{3} \Rightarrow S = S_1 \cap S_2 = \left\{ x : \frac{7}{3} \leq x \right\} \cap \left\{ x : x < \frac{19}{3} \right\}$



16 $\frac{1}{25} \leq \frac{z+3}{5} \leq \frac{1}{15} \Rightarrow \frac{1}{15} \times 5 \geq \frac{z+3}{5} \times 5 \geq \frac{1}{25} \times 5$ نضرب المتباينة بمقام الكسر الموجود فيه المتغير للتخلص من الكسر

الحل

نضيف نظير العدد 3 للمتباينة كما موضح

$$\frac{1}{5} \geq z+3 \geq \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{5} - 3 \geq z+3-3 \geq \frac{1}{3} - 3$$

$$\Rightarrow \frac{-14}{5} \geq z \geq \frac{-8}{3} \Rightarrow S = \left\{ z : \frac{-14}{5} \geq z \geq \frac{-8}{3} \right\}$$



حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) بيانياً:

17 $z-2 < -7$ أو $z-2 > 4$

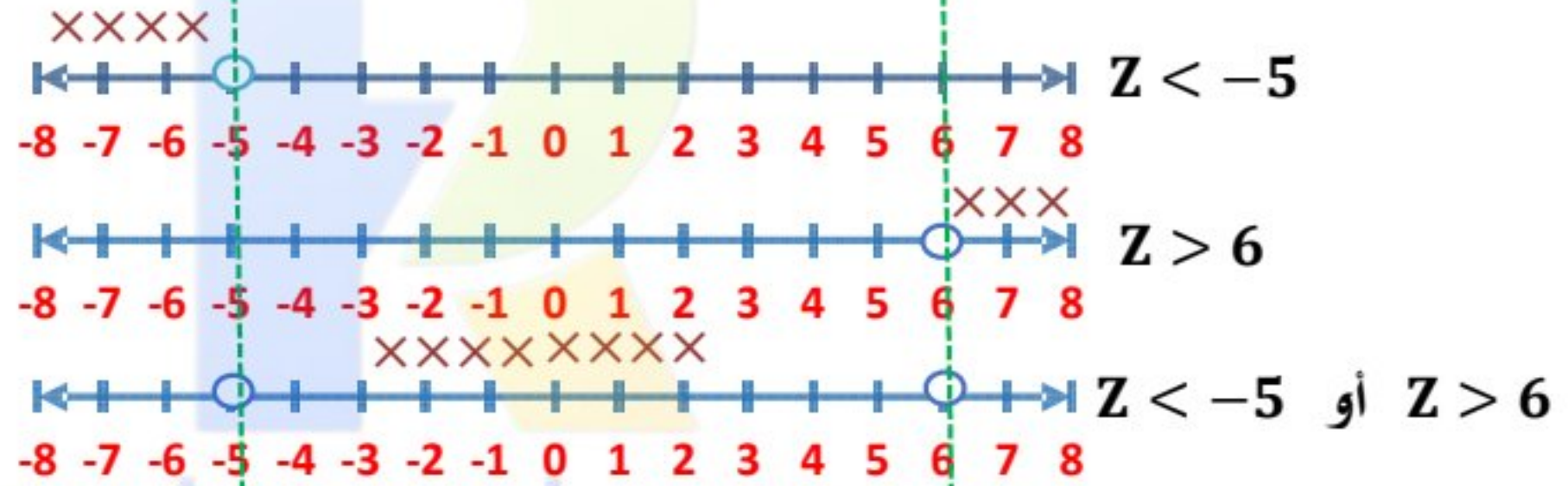
الحل

$$z < -7+2 \text{ أو } z > 4+2 \Rightarrow z < -5 \text{ أو } z > 6$$

$$z < -5$$

$$z > 6$$

$$z < -5 \text{ أو } z > 6$$



18 $x-6 \leq -1$ أو $x-6 > 4$

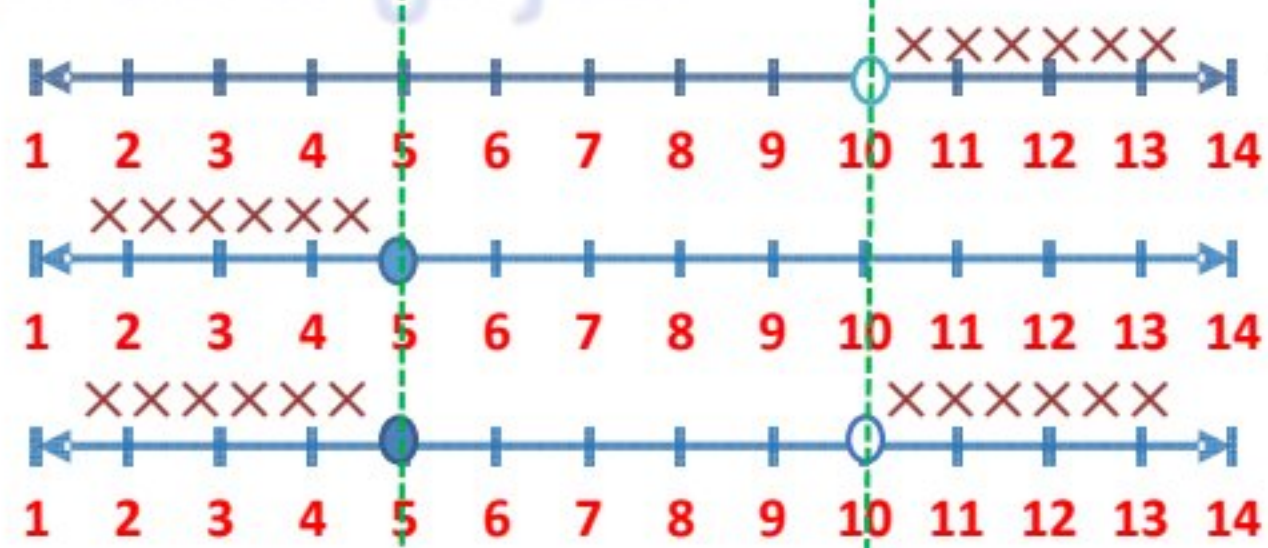
الحل

$$x \leq -1+6 \text{ أو } x > 4+6 \Rightarrow x \leq 5 \text{ أو } x > 10$$

$$x \leq 5$$

$$x > 10$$

$$x \leq 5 \text{ أو } x > 10$$



19 حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) جبرياً ومثل الحل على مستقيم الأعداد: $\frac{y}{2} < 3\frac{1}{2}$ أو $\frac{y}{2} > 7\frac{1}{2}$

الحل

$$\frac{y}{2} < \frac{7}{2} \text{ أو } \frac{y}{2} > \frac{15}{2} \} \times 2$$

$$y < 7 \text{ أو } y > 15$$

$$S = S_1 \cup S_2 = \{y : y < 7\} \cup \{y : y > 15\}$$



20 $5x \leq -1$ أو $5x \geq 4 \} \div 5 \Rightarrow x \leq \frac{-1}{5}$ أو $x \geq \frac{4}{5}$

الحل

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{x : x \leq \frac{-1}{5}\right\} \cup \left\{x : x \geq \frac{4}{5}\right\}$$

اكتب المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث في المثلث إذا كان طولاه ضلعي المثلث معلومين:

21 3cm , 10cm

الحل

نفرض طول الضلع الثالث $x \Leftarrow$ اطوال اضلاع المثلث 3 , 10 , x

$3 + 10 > x \Rightarrow 13 > x$ الضلع الثالث أصغر من 13

$10 + x > 3 \Rightarrow x > 3 - 10 \Rightarrow x > -7$ يهمل

$3 + x > 10 \Rightarrow x > 10 - 3 \Rightarrow x > 7$ الضلع الثالث أكبر من 7

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي : $7 < x < 13$

22 6cm, 4cm

الحل

نفرض طول الضلع الثالث $x \Leftarrow$ اطوال اضلاع المثلث 6 , 4 , x

$6 + 4 > x \Rightarrow 10 > x$ الضلع الثالث أصغر من 10

$6 + x > 4 \Rightarrow x > 4 - 6 \Rightarrow x > -2$ يهمل

$4 + x > 6 \Rightarrow x > 6 - 4 \Rightarrow x > 2$ الضلع الثالث أكبر من 2

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي : $2 < x < 10$

23 1cm, 3cm

الحل

نفرض طول الضلع الثالث $x \Leftarrow$ اطوال اضلاع المثلث 1 , 3 , x

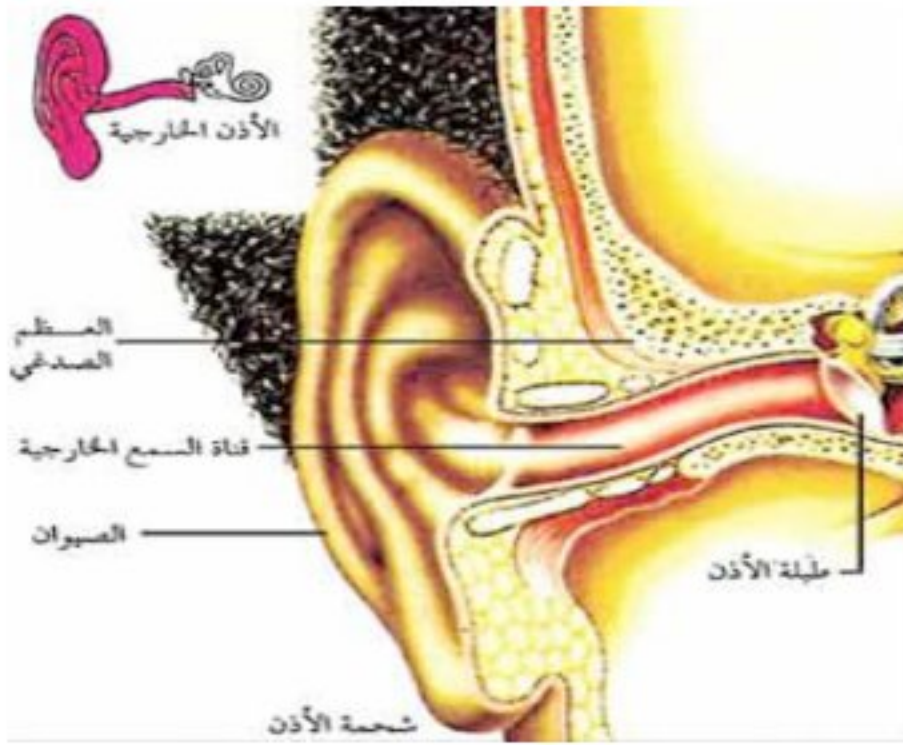
$1 + 3 > x \Rightarrow 4 > x$ الضلع الثالث أصغر من 4

$3 + x > 1 \Rightarrow x > 1 - 3 \Rightarrow x > -2$ يهمل

$1 + x > 3 \Rightarrow x > 3 - 1 \Rightarrow x > 2$ الضلع الثالث أكبر من 2

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي : $2 < x < 4$

تدرب وحل مسائل حياتية



24 صوت: أذن الإنسان يمكن أن تسمع الأصوات التي لا يقل ترددها عن 20 هرتزاً ولا يزيد على 20000 هرتز. اكتب متباينة مركبة تمثل الترددات التي لا تسمعها أذن الإنسان، ومثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد.

الحل نفرض التردد x

الترددات التي تسمعها أذن الإنسان هي أكبر أو يساوي 20 وأصغر أو يساوي 20000 تكتب $20 \leq x \leq 20000$
الترددات التي لا تسمعها أذن الإنسان هي أصغر من 20 وأكبر من 20000 وتكتب:

$$x < 20 \text{ أو } x > 20000$$

$$x < 20$$

$$x > 20000$$

$$x < 20 \text{ أو } x > 20000$$



هذه المسألة تم حلها مع مسائل
أخرى في هذا الدرس



23

المتباينة المركبة $28 \leq x \leq 36$

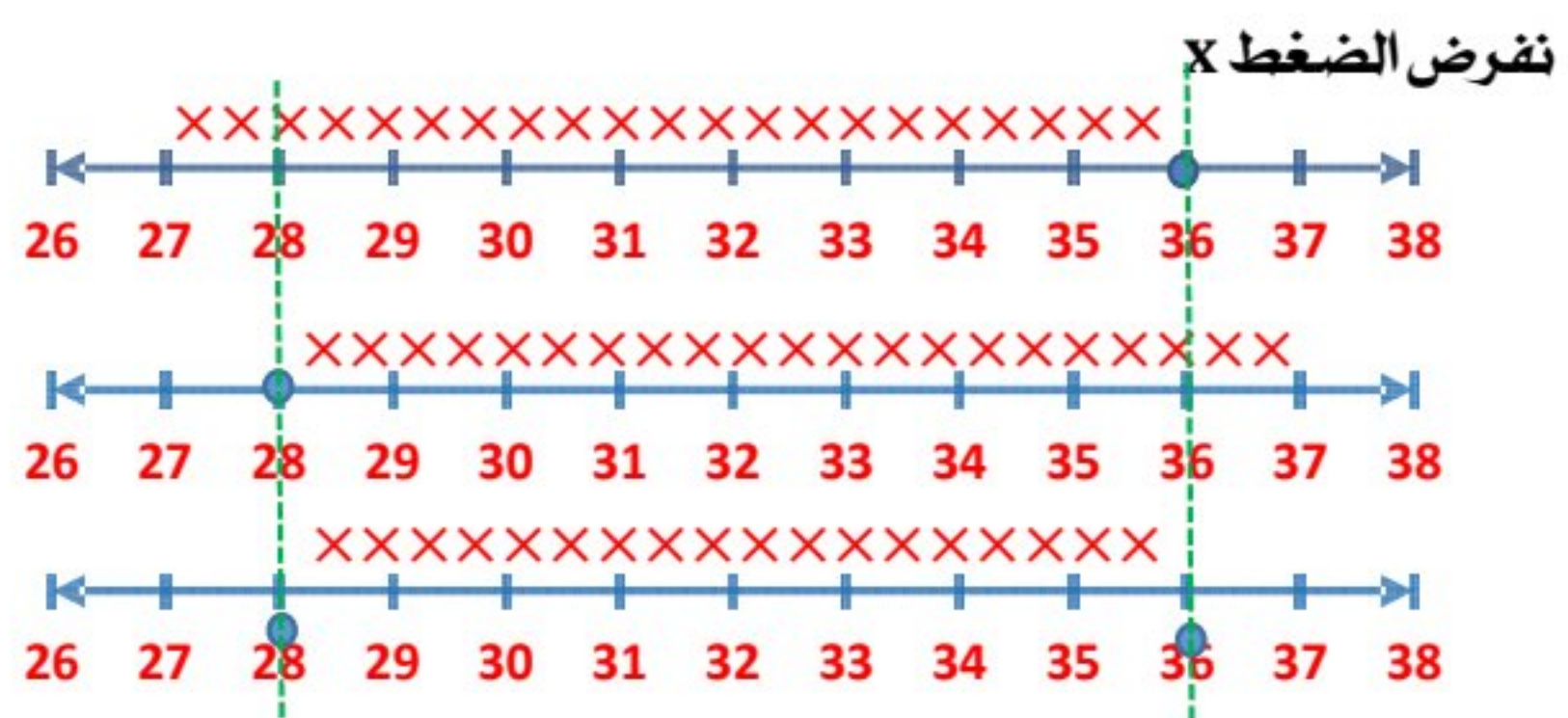
$$x \geq 28$$

$$x \leq 36$$

$$28 \leq x \leq 36$$

25 إطار السيارات: ضغط الهواء المثالي الموصى به لإطارات السيارات الصالون لا يقل عن 28 Pascal (kg/ing^2) ولا يزيد على 36 Pascal. اكتب متباينة مركبة تمثل الضغط، ومثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد.

ملاحظة: باسكال (pascal) وحدة قياس ضغط الهواء مقدرة kg/ing^2





26 القطار المغناطيسي: القطار المغناطيسي المعلق وهو قطار يعمل بقوة الرفع المغناطيسية وباختصار يعرف بالماجليف (Maglev). وصُممت أنواع مختلفة من هذه القطارات المغناطيسية في مختلف دول العالم إذ إنّ سرعتها لا تقل عن 300 k/h ولا تزيد على 550 k/h. اكتب متباينة تمثل سرعة القطار، ومثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد.

المتباينة $300 \leq x \leq 550$

$$x \geq 300$$

$$x \leq 550$$

$$300 \leq x \leq 550$$



فَكَّرْ

7cm, 12cm, x cm

27 تحدّ: اكتب متباينة مركبة تبين مدى طول الضلع الثالث في كلٍّ مثلث:

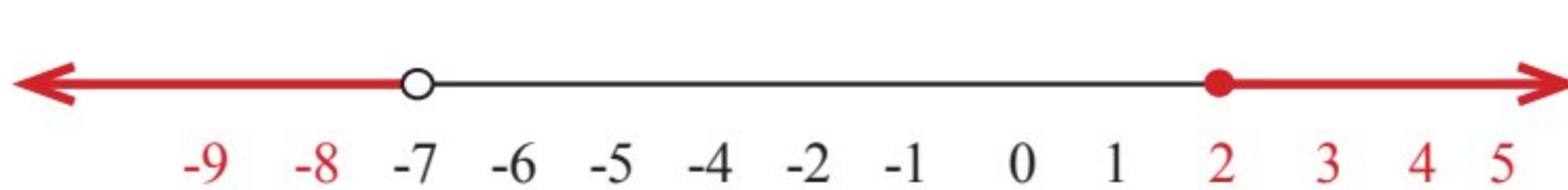
$$7 + 12 > x \Rightarrow 19 > x \quad \text{الضلع الثالث أصغر من 19}$$

$$12 + x > 7 \Rightarrow x > 7 - 12 \Rightarrow x > -5 \quad \text{تُهْمَل}$$

$$7 + x > 12 \Rightarrow x > 12 - 7 \Rightarrow x > 5 \quad \text{الضلع الثالث أكبر من 5}$$

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي : $5 < x < 19$

28 أصحّ الخطأ: قالت سوسن إنّ المتباينة المركبة $x+3 \leq 5$ و $-4 < x+3$ تمثل مجموعة الحل على

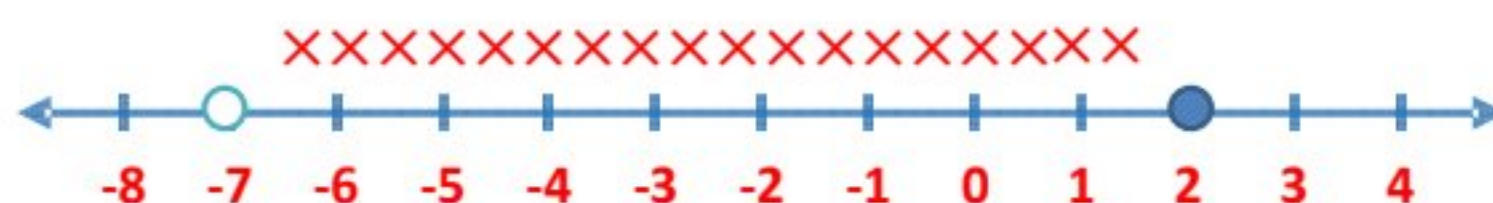


بين خطأ سوسن وصحّحه.

$$-4 - 3 < x \quad \text{و} \quad x \leq 5 - 3$$

$$-7 < x \quad \text{و} \quad x \leq 2$$

$$S = S_1 \cap S_2 = \{x : x > -7\} \cap \{x : x \leq 2\} = \{x : -7 < x \leq 2\}$$



29 **حسّ عدديّ:** اذكر ما إذا كانت الأطوال الثلاثة هي لمثلث أم لا؟ وضح إجابتك .

i) 3.2cm, 5.2cm, 6.2cm

الحل

$$3.2 + 5.2 > 6.2 \Rightarrow 8.4 > 6.2 \text{ صحيحة}$$

$$3.2 + 6.2 > 5.2 \Rightarrow 9.4 > 5.2 \text{ صحيحة}$$

$$5.2 + 6.2 > 3.2 \Rightarrow 11.4 > 3.2 \text{ صحيحة} \Rightarrow \text{الأطوال الثلاثة تمثل مثلث}$$

ii) 1cm, 1cm, $\sqrt{2}$ cm

الحل

$$1 + 1 > \sqrt{2} \Rightarrow 2 > \sqrt{2} \text{ صحيحة}$$

$$\sqrt{2} = 1.4 \text{ لأن}$$

$$1 + \sqrt{2} > 1 \Rightarrow 1 + 1.4 > 1 \Rightarrow 2.4 > 1 \text{ صحيحة}$$

$$\sqrt{2} + 1 > 1 \Rightarrow 1.4 + 1 > 1 \Rightarrow 2.4 > 1 \text{ صحيحة} \Rightarrow \text{الأطوال الثلاثة تمثل مثلث}$$

متباينة مركبة التي تمثل درجة الحرارة الصغرى 18° ودرجة الحرارة العظمى 27° .

أكتب

الحل

نفرض درجة الحرارة x

$$x > 18^\circ \text{ و } x < 27^\circ \Rightarrow S = \{x : 18^\circ < x < 27^\circ\}$$

أمسح هذا الرمز للوصول الى
الجزء الأول من هذا الدرس



19

متباينات القيمة المطلقة

الدرس
[1-4]

متباينات القيمة المطلقة التي على الصورة $|g(x)| < a$, $|g(x)| \leq a$ حيث $a \in \mathbb{R}$

متباينة القيمة المطلقة بعلاقة أصغر من (أصغر من أو يساوي) تمثل متباينة مركبة تتضمن (و). بصورة عامة:

$$|g(x)| \leq a \Rightarrow -a \leq g(x) \leq a, \quad a > 0$$

$$|g(x)| < a \Rightarrow -a < g(x) < a, \quad a > 0$$

خطوات الحل

- (1) في حال وجود كسر يجب نتخلص منه بضرب الطرفين بمقام هذا الكسر
- (2) قبل فتح المطلق يجب التأكد من أنه وحده ولا توجد عمليتي جمع أو طرح في نفس جهته وفي حال وجود إحدى العمليتين ننقل العدد الى الطرف الآخر
- (3) بعد ازالة المطلق نضع الكمية الموجودة داخله بين علامتي تباین على اليسار واليمين
- (4) على اليمين نضع نفس العدد الموجود في السؤال و على اليسار نفس العدد ولكن بعكس الإشارة
- (5) نكمل الحل بنفس الخطوات السابقة بالتخلص من عمليتي الجمع والطرح بوضع الاعداد في جهة والمتغيرات في جهة والتخلص من المعامل أن وجد بالقسمة عليه لكل الأطراف

حل متباينات القيمة المطلقة، ومثل الحل على مستقيم الأعداد.

مثال (2)

i) $|x + 6| < 3 \Rightarrow -3 < x + 6 < 3 \Rightarrow -3 - 6 < x < 3 - 6$
 $\Rightarrow -9 < x < -3$

ii) $|y| - 5 \leq 1 \Rightarrow |y| \leq 1 + 5 \Rightarrow |y| \leq 6$
 $\Rightarrow -6 \leq y \leq 6$

متباينات القيمة المطلقة التي على الصورة $|g(x)| > a$, $|g(x)| \geq a$ حيث $a \in \mathbb{R}$

متباينة القيمة المطلقة بعلاقة أكبر من (أكبر من أو يساوي) هي متباينة مركبة تتضمن (أو). بصورة عامة:

$$|g(x)| \geq a \Leftrightarrow g(x) \geq a \text{ أو } g(x) \leq -a, \quad a > 0$$

$$|g(x)| > a \Leftrightarrow g(x) > a \text{ أو } g(x) < -a, \quad a > 0$$



أمسح هذا الرمز للوصول الى
الجزء الثاني من هذا الدرس

خطوات الحل

- (1) في حال وجود كسر يجب نتخلص منه بضرب الطرفين بمقام هذا الكسر
- (2) قبل فتح المطلق يجب التأكد من أنه وحده ولا توجد عمليتي جمع أو طرح في نفس جهته وفي حال وجود احدى العمليتين ننقل العدد الى الطرف الاخر
- (3) بعد ازالة المطلق ننسخ المقدار داخله الى نسختين ونضع نسخة على اليمين ونسخة على اليسار نسخة اليمين نعطيها نفس علامة التباين في السؤال ونفس العدد أما نسخة اليسار فنعطيها مقلوب العلامة ونفس العدد ولكن بعكس اشارته والعكس صحيح
- (4) نكمل الحل بنفس الخطوات السابقة بالتخلص من عمليتي الجمع والطرح بوضع الاعداد في جهة والمتغيرات في جهة والتخلص من المعامل أن وجد بالقسمة عليه لكل الأطراف

مثال (3) حل متباينة القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الأعداد.

$$i) |x + 4| > 2 \Rightarrow x + 4 < -2 \text{ أو } x + 4 > 2 \Rightarrow x < -6 \text{ أو } x > -2$$

$$\Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \{x: x < -6\} \cup \{x: x > -2\}$$

$$ii) |5y - 1| \geq 4 \Rightarrow 5y - 1 \leq -4 \text{ أو } 5y - 1 \geq 4 \Rightarrow y \leq -\frac{3}{5} \text{ أو } y \geq 1$$

$$\Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \{y: y \leq -\frac{3}{5}\} \cup \{y: y \geq 1\}$$

مثال (4) جد مجموعة الحل لمتباينات القيمة المطلقة الآتية:

$$i) |2x - 5| + 3 < 11 \Rightarrow |2x - 5| < 8 \Rightarrow -8 < 2x - 5 < 8 \Rightarrow -3 < 2x < 13$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2} < x < \frac{13}{2} \Rightarrow \{x: x > -\frac{3}{2}\} \cap \{x: x < \frac{13}{2}\} \Rightarrow \{x: -\frac{3}{2} < x < \frac{13}{2}\}$$

$$ii) |7 - y| < 8 \Rightarrow -8 < 7 - y < 8 \Rightarrow -15 < -y < 1 \Rightarrow -1 < y < 15 \Rightarrow \{y: y > -1\} \cap \{y: y < 15\}$$

$$iii) |\frac{2t-8}{4}| \geq 9 \Rightarrow |\frac{2(t-4)}{4}| \geq 9 \Rightarrow |\frac{t-4}{2}| \geq 9 \Rightarrow |t-4| \geq 18$$

$$\Rightarrow t - 4 \leq -18 \text{ أو } t - 4 \geq 18 \Rightarrow t \leq -14 \text{ أو } t \geq 22 \Rightarrow \{t: t \leq -14\} \cup \{t: t \geq 22\}$$

$$iv) |\frac{5-3v}{2}| \geq 6 \Rightarrow |5-3v| \geq 12 \Rightarrow 5-3v \leq -12 \text{ أو } 5-3v \geq 12 \Rightarrow -3v \leq -17 \text{ أو } -3v \geq 7$$

$$\Rightarrow v \geq \frac{17}{3} \text{ أو } v \leq -\frac{7}{3} \Rightarrow \{v: v \geq \frac{17}{3}\} \cup \{v: v \leq -\frac{7}{3}\}$$

تأكد من فهمك

1 تعد درجة الحرارة المثلى داخل الشقق 22° سيليزية بزيادة أو نقصان لا يتجاوز 2° سيليزية.

الحل

نفرض درجة الحرارة x

$$x \leq 22 + 2 \text{ و } x \geq 22 - 2$$

$$x - 22 \leq 2 \text{ و } x - 22 \geq -2$$

$$|x - 22| \leq 2$$

المتباينة المركبة تكون بالصورة:

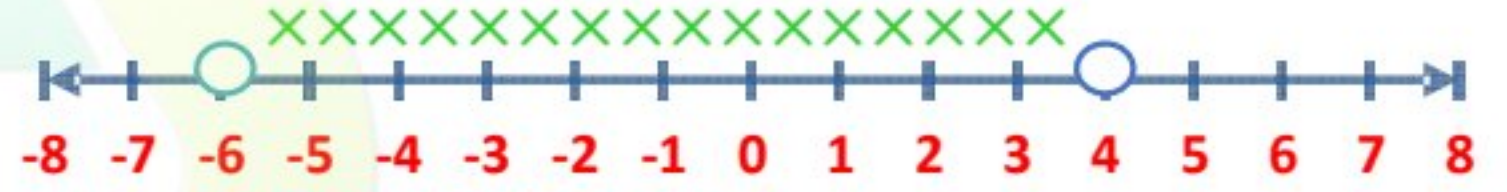
حل متباينات القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الأعداد.

2 $|x + 1| < 5$

الحل

$$-5 < x + 1 < 5 \Rightarrow -5 - 1 < x < 5 - 1$$

$$-6 < x < 4 \Rightarrow S = \{x : -6 < x < 4\}$$

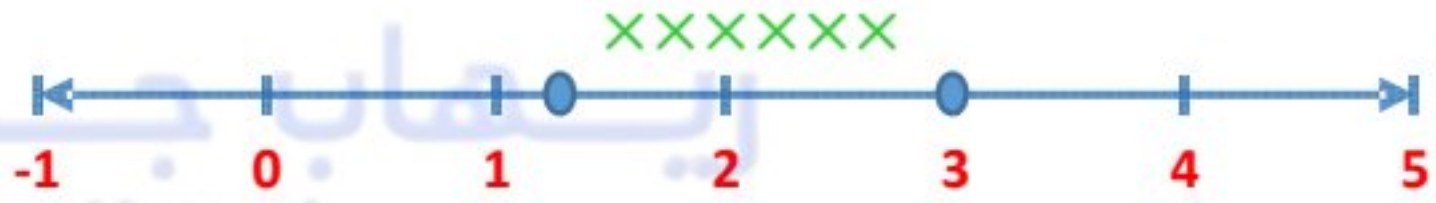


3 $|3z - 7| \leq 2$

$$-2 \leq 3z - 7 \leq 2 \Rightarrow -2 + 7 \leq 3z \leq 2 + 7$$

$$5 \leq 3z \leq 9 \Rightarrow \frac{5}{3} \leq \frac{3z}{3} \leq \frac{9}{3}$$

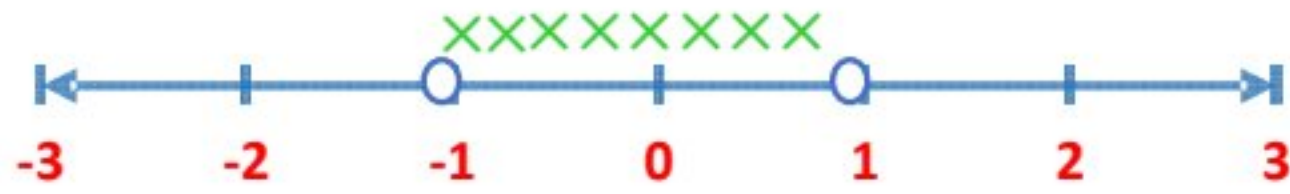
$$\frac{5}{3} \leq z \leq 3 \Rightarrow S = \{z : \frac{5}{3} \leq z \leq 3\}$$



4 $|x| + 8 < 9$

$$|x| < 9 - 8 \Rightarrow |x| < 1$$

$$-1 < x < 1 \Rightarrow S = \{x : -1 < x < 1\}$$

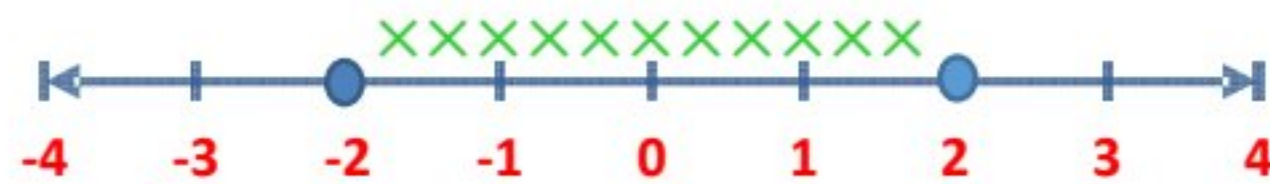


5 $|5y| - 2 \leq 8$

$$|5y| \leq 8 + 2 \Rightarrow |5y| \leq 10$$

$$-10 \leq 5y \leq 10 \Rightarrow -2 \leq y \leq 2$$

$$S = \{y : -2 \leq y \leq 2\}$$



6 $|x + 4| > 6$

الحل

$$x + 4 > 6 \text{ أو } x + 4 < -6 \Rightarrow x > 6 - 4 \text{ أو } x < -6 - 4$$



$$S = S_1 \cup S_2 = \{x : x > 2\} \cup \{x : x < -10\}$$

7 $|5z - 9| > 1$

الحل

$$5Z - 9 > 1 \text{ أو } 5Z - 9 < -1 \Rightarrow 5Z > 1 + 9 \text{ أو } 5Z < -1 + 9$$

$$5Z > 10 \text{ أو } 5Z < 8 \Rightarrow Z > 2 \text{ أو } Z < \frac{8}{5} \Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \{Z : Z > 2\} \cup \{Z : Z < \frac{8}{5}\}$$



8 $|2x| + 7 \geq 8$

الحل

$$|2x| \geq 8 - 7 \Rightarrow |2x| \geq 1$$

$$2x \geq 1 \text{ أو } 2x \leq -1 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \text{ أو } x \leq -\frac{1}{2}$$

$$S = S_1 \cup S_2 = \{x : x \geq \frac{1}{2}\} \cup \{x : x \leq -\frac{1}{2}\}$$



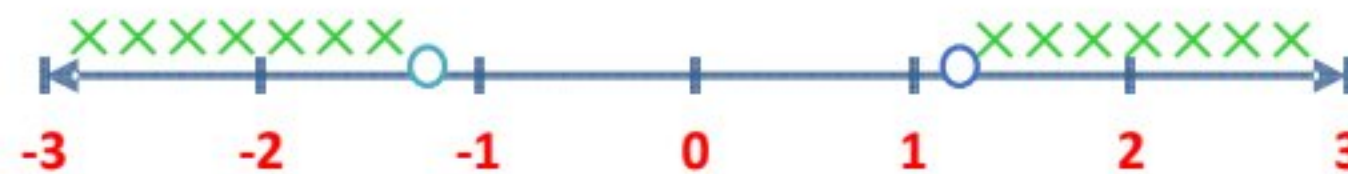
9 $|4y| - 2 > 3$

الحل

$$|4y| > 3 + 2 \Rightarrow |4y| > 5$$

$$4y > 5 \text{ أو } 4y < -5 \Rightarrow y > \frac{5}{4} \text{ أو } y < -\frac{5}{4}$$

$$S = S_1 \cup S_2 = \{y : y > \frac{5}{4}\} \cup \{y : y < -\frac{5}{4}\}$$



10 $|5 - x| < 10$

الحل

$$-10 < 5 - x < 10 \Rightarrow -10 - 5 < -x < 10 - 5$$

$$-15 < -x < 5 \Rightarrow 15 > x > -5$$

$$S = \{x : 15 > x > -5\}$$



11 $|4z - 14| > 2$

الحل

$$4Z - 14 > 2 \text{ أو } 4Z - 14 < -2 \Rightarrow 4Z > 2 + 14 \text{ أو } 4Z < -2 + 14$$

$$4Z > 16 \text{ أو } 4Z < 12 \} \div 4$$

$$Z > 4 \text{ or } Z < 3 \Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \{Z : Z > 4\} \cup \{Z : Z < 3\}$$



12 $|\frac{x-12}{4}| \leq 9 \} \times 4$

الحل

$$|x - 12| \leq 36 \Rightarrow -36 \leq x - 12 \leq 36$$

$$-36 + 12 \leq x \leq 36 + 12 \Rightarrow -24 \leq x \leq 48 \Rightarrow S = \{x : -24 \leq x \leq 48\}$$



13 $|\frac{6-2y}{4}| \geq 9 \} \times 4$

الحل

$$|6 - 2y| \geq 36 \Rightarrow 6 - 2y \geq 36 \text{ أو } 6 - 2y \leq -36$$

$$-2y \geq 36 - 6 \text{ أو } -2y \leq -36 - 6 \Rightarrow -2y \geq 30 \text{ أو } -2y \leq -42 \} \div (-2)$$

$$y \leq -15 \text{ أو } y \geq 21 \Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \{y : y \leq -15\}$$



تدرب وحل التمرينات

14 يجب أن تبقى درجة الحرارة داخل الثلاجة 8° سيليزية بزيادة أو نقصان لا يتجاوز 0.5° سيليزية. اكتب مدى درجة الحرارة المثالية في داخل الثلاجة.

نفرض درجة الحرارة المثالية x

الحل

$$x \leq 8 + 0.5 \text{ و } x \geq 8 - 0.5$$

$$x - 8 \leq 0.5 \text{ و } x - 8 \geq -0.5$$

$$0.5 \leq x - 8 \leq 0.5 \Rightarrow |x - 8| \leq 0.5$$

15 درجة غليان الماء 100° سيليزية عند مستوى سطح البحر وتزداد وتنقص في المناطق الجبلية والوديان بما لا يتجاوز 20° سيليزية. اكتب مدى التذبذب في درجة غليان الماء.

نفرض درجة غليان الماء x

الحل

$$x \leq 100 + 20 \text{ و } x \geq 100 - 20$$

$$x - 100 \leq 20 \text{ و } x - 100 \geq -20 \Rightarrow -20 \leq x - 100 \leq 20$$

$$|x - 100| \leq 20$$

حل متباينات القيمة المطلقة الآتية:

16 $|x + 3| < 6$

$$-6 < x + 3 < 6 \Rightarrow -6 - 3 < x < 6 - 3$$

$$-9 < x < 3 \Rightarrow S = \{x : -9 < x < 3\}$$

الحل

17 $|2z| - 5 < 2$

$$|2z| < 2 + 5 \Rightarrow |2z| < 7 \Rightarrow -7 < 2z < 7 \} \div 2$$

$$\frac{-7}{2} < z < \frac{7}{2} \Rightarrow S = \left\{z : \frac{-7}{2} < z < \frac{7}{2}\right\}$$

الحل

18 $2|x| - 7 \geq 1$

الحل

$$2|x| \geq 1 + 7 \Rightarrow 2|x| \geq 8 \} \div 2$$

$$|x| \geq 4 \Rightarrow x \geq 4 \text{ أو } x \leq -4 \Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \{x : x \geq 4\} \cup \{x : x \leq -4\}$$

19 $|11z| - 2 \geq 9$

الحل

$$|11z| \geq 9 + 2 \Rightarrow |11z| \geq 11 \Rightarrow 11z \geq 11 \text{ أو } 11z \leq -11 \} \div 11$$

$$z \geq 1 \text{ أو } z \leq -1 \Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \{z : z \geq 1\}$$

20 $|\frac{4}{5}z - 1| > \frac{4}{5}$

الحل

$$\frac{4}{5}z - 1 > \frac{4}{5} \text{ أو } \frac{4}{5}z - 1 < -\frac{4}{5} \} \times 5$$

$$4z - 5 > 4 \text{ أو } 4z - 5 < -4 \Rightarrow 4z > 4 + 5 \text{ أو } 4z < -4 + 5$$

$$4z > 9 \text{ أو } 4z < 1 \} \div 4 \Rightarrow z > \frac{9}{4} \text{ أو } z < \frac{1}{4}$$

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{z : z > \frac{9}{4}\right\} \cup \left\{z : z < \frac{1}{4}\right\}$$

اكتب متباينة تتضمن قيمة مطلقة لكل من التمثيلات البيانية الآتية:



الحل

الرسم البياني يمثل تقاطع (و) والفجوة فارغة.

المتباينة $-6 < x < 2$

نجد معدل القيمتين أي أن: $\frac{-6+2}{2} = \frac{-4}{2} = -2$ ثم نطرح (-2) من جميع المتباينة:

$$-6 < x < 2 \Rightarrow -6 - (-2) < x - (-2) < 2 - (-2)$$

$$-4 < x + 2 < 4 \Rightarrow |x + 2| < 4$$

22



الحل

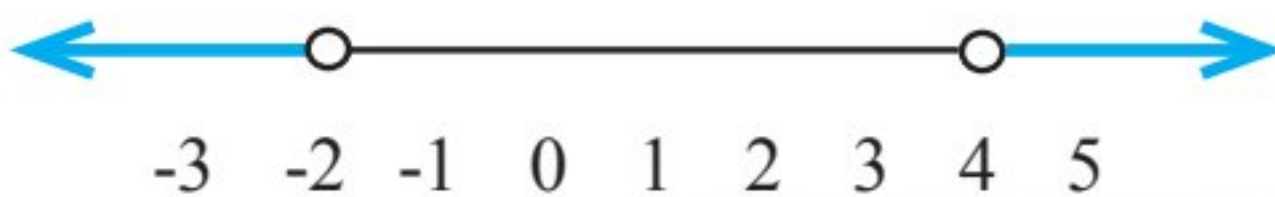
الرسم البياني يمثل التقاطع (و) المتباينة $-4 \leq x \leq 2$

نجد معدل القيمتين أي أن : $\frac{-4+2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$ ثم نطرح (-1) من جميع المتباينة :

$$-4 \leq x \leq 2 \Rightarrow -4 - (-1) \leq x - (-1) \leq 2 - (-1)$$

$$-3 \leq x + 1 \leq 3 \Rightarrow |x + 1| \leq 3$$

23



الحل

الرسم البياني يمثل اتحاد (أو) المتباينة $x > -2$ أو $x < 4$

نجد معدل القيمتين أي أن : $\frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1$ ثم نطرح (1) من جميع المتباينة :

$$x > -2 \text{ أو } x < 4 \Rightarrow x - 1 > -2 - 1 \text{ أو } x - 1 < 4 - 1$$

$$x - 1 > -3 \text{ أو } x - 1 < 3 \Rightarrow |x - 1| > 3$$

24



الحل

الرسم البياني يمثل اتحاد (أو) المتباينة $x \geq -4$ أو $x \leq -2$

نجد معدل القيمتين أي أن : $\frac{-4-2}{2} = \frac{-6}{2} = -3$ ثم نطرح (-3) من جميع المتباينة :

$$x \geq -4 \text{ أو } x \leq -2 \Rightarrow x - 3 \geq -4 - (-3) \text{ أو } x - 3 \leq -2 - (-3)$$

$$x - 3 \geq -1 \text{ أو } x - 3 \leq 1 \Rightarrow |x - 3| \geq 1$$

تدرب وحل مسائل حياتية

هذه المسألة تم حلها مع مسائل
أخرى في هذا الدرس



24

اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل كل مسألة مما يأتي:

25 **الغريز:** حيوان الغريز هو أحد أنواع الثدييات، ينتمي إلى شعبة الحبليات، ويمتلك قوائم قصيرة نوعاً ما، ويعيش في الحُفر التي يحفرها في الأرض، طول جسمه من الرأس الى الذيل يصل من 68cm إلى 76cm. اكتب مدى طول الغريز.

الحل نفرض طول الغريز x

المتباينة $68 < x < 76$

نجد معدل القيمتين أي أن: $\frac{68+76}{2} = \frac{144}{2} = 72$ ثم نطرح (72) من جميع المتباينة:

$$68 < x < 76 \Rightarrow 68 - 72 < x - 72 < 76 - 72$$

$$-4 < x - 72 < 4 \Rightarrow |x - 72| < 4$$



$x < 60$ أو $x > 90$

26 **صحة:** معدل النبض (عدد دقات القلب) الطبيعي للإنسان البالغ يتراوح من 60 الى 90 نبضة في الدقيقة. اكتب مدى عدد الدقات غير الطبيعية لقلب الإنسان.

الحل نفرض عدد دقات القلب غير الطبيعية x

المتباينة $x < 60$ أو $x > 90$

نجد معدل القيمتين أي أن: $\frac{60+90}{2} = \frac{150}{2} = 75$ ثم نطرح (75) من جميع المتباينة:

$$x < 60 \text{ أو } x > 90 \Rightarrow x - 75 < 60 - 75 \text{ أو } x - 75 > 90 - 75$$

$$x < -15 \text{ أو } x > 15 \Rightarrow |x - 75| > 15$$



27 **مواصلات:** تطير الطائرات المدنية على ارتفاع يتراوح من 8km إلى 10km إذ تعد منطقة جوية معتدلة. اكتب مدى منطقة الطيران المدنية.

الحل نفرض مدى منطقة الطيران x

المتباينة $8 < x < 10$

نجد معدل القيمتين أي أن: $\frac{8+10}{2} = \frac{18}{2} = 9$ ثم نطرح (9) من جميع المتباينة:

$$8 < x < 10 \Rightarrow 8 - 9 < x - 9 < 10 - 9$$

$$-1 < x - 9 < 1 \Rightarrow |x - 9| < 1$$

فكر

28 تحدّ: حل متباينات القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الأعداد.

1) $\left| \frac{\sqrt{3}(x+1)}{\sqrt{2}} \right| \leq \sqrt{6}$

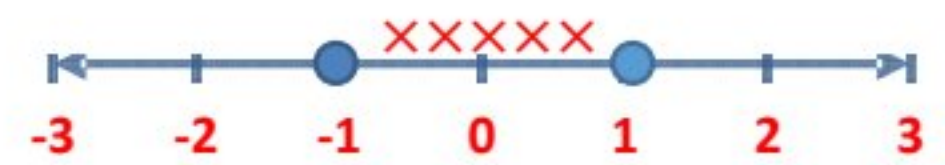
الحل

$$-\sqrt{6} \leq \frac{\sqrt{3}(x+1)}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{6} \quad \} \times \sqrt{2}$$

$$-\sqrt{12} \leq \sqrt{3}x + \sqrt{3} \leq \sqrt{12} \Rightarrow -2\sqrt{3} \leq \sqrt{3}x + \sqrt{3} \leq 2\sqrt{3}$$

$$-2\sqrt{3} - \sqrt{3} \leq \sqrt{3}x \leq 2\sqrt{3} - \sqrt{3} \Rightarrow -\sqrt{3} \leq \sqrt{3}x \leq \sqrt{3} \quad \} \div \sqrt{3}$$

$$-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow S = \{x : -1 \leq x \leq 1\}$$



2) $\left| \frac{\sqrt{12} - \sqrt{3}y}{\sqrt{5}} \right| \geq \sqrt{15}$

الحل

$$\frac{\sqrt{12} - \sqrt{3}y}{\sqrt{5}} \geq \sqrt{15} \text{ أو } \frac{\sqrt{12} - \sqrt{3}y}{\sqrt{5}} \leq -\sqrt{15} \quad \} \times \sqrt{5}$$

$$\sqrt{12} - \sqrt{3}y \geq \sqrt{75} \text{ أو } \sqrt{12} - \sqrt{3}y \leq -\sqrt{75}$$

$$2\sqrt{3} - \sqrt{3}y \geq 5\sqrt{3} \text{ أو } 2\sqrt{3} - \sqrt{3}y \leq -5\sqrt{3}$$

$$-\sqrt{3}y \geq 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \text{ أو } -\sqrt{3}y \leq -5\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$$

$$-\sqrt{3}y \geq 3\sqrt{3} \text{ أو } -\sqrt{3}y \leq -7\sqrt{3} \quad \} \div (-\sqrt{3})$$

$$y \leq -3 \text{ أو } y \geq 7$$

$$S = S_1 \cup S_2 = \{y : y \leq -3\} \cup \{y : y \geq 7\}$$



29 أصحّ الخطأ: قالت خلود إن متباينة القيمة المطلقة $|6 - 3y| \geq 7$ تمثل متباينة مركبة بعلاقة (و) ومجموعة

الحل لها: $\{y : -\frac{1}{3} \leq y \leq \frac{13}{2}\}$. بيّن خطأ خلود وصحّحه.

المتباينة تمثل متباينة مركبة بعلاقة (أو)

الحل

$$6 - 3y \geq 7 \text{ أو } 6 - 3y \leq -7 \Rightarrow -3y \geq 7 - 6 \text{ أو } -3y \leq -7 - 6$$

$$-3y \geq 1 \text{ أو } -3y \leq -13 \quad \} \div (-3)$$

$$y \leq -\frac{1}{3} \text{ أو } y \geq \frac{13}{3} \Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \left\{y : y \leq -\frac{1}{3}\right\} \cup \left\{y : y \geq \frac{13}{3}\right\}$$

30 **حسّ عدديّ:** اكتب مجموعة الحل لمتباينات القيمة المطلقة التالية في مجموعة الأعداد الحقيقية:

i) $|z| - 1 < 0$

ii) $|x - 1| > 0$

i) $|Z| - 1 < 0$

الحل

$$|Z| < 1 \Rightarrow -1 < Z < 1$$

$$S = \{Z : -1 < Z < 1\}$$

ii) $|x - 1| > 0$

الحل

$$x - 1 > 0 \text{ أو } x - 1 < 0 \Rightarrow x > 1 \text{ أو } x < 1$$

$$S = S_1 \cup S_2 = \{x : x > 1\} \cup \{x : x < 1\}$$

متباينة قيمة مطلقة تمثل موقفاً من واقع الحياة، ومثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد.

أكتب

الحل مسألة: الضغط الدم الطبيعي لدى الإنسان يتراوح بين 120 الى 180 . أحسب مدى ضغط الدم غير الطبيعي .

نفرض مدى ضغط الدم هو x

المتباينة التي تمثل ضغط الدم غير الطبيعي هي :

$$x > 180 \text{ أو } x < 120$$

نجد معدل القيمتين أي أن : $\frac{120+180}{2} = \frac{300}{2} = 150$ ثم نطرح (150) من جميع المتباينة :

$$x - 150 > 180 - 150 \text{ أو } x - 150 < 120 - 150$$

$$x - 150 > 30 \text{ أو } x - 150 < -30$$

$$|x - 150| > 30$$



اختبار الفصل

بسّط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات في الأعداد الحقيقية:

1 $(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{5})$

الحل

$$= 3 + \sqrt{15} + \sqrt{15} + 5 = 8 + 2\sqrt{15}$$

2 $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{6}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{8} - 5}{3\sqrt{2}}$

الحل

$$= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{6}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{8} - 5}{3\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3 - \sqrt{18}}{3} - \frac{\sqrt{16} - 5\sqrt{2}}{6} = \frac{3 - 3\sqrt{2}}{3} - \frac{4 - 5\sqrt{2}}{6}$$

$$= \frac{6 - 6\sqrt{2} - 4 + 5\sqrt{2}}{6} = \frac{2 - \sqrt{2}}{6}$$

3 استعمال ترتيب العمليات والحاسبة لتكتب ما يلي مقرباً لأقرب عُشر:

الحل

$$\left(\frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(-\frac{1}{2}\right)^0 + (121)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{125}} - 1 + \sqrt{121} \times \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{5} - 1 + \frac{11}{3}$$

$$= 0.2 - 1 + 3.66 \approx 2.86 \approx 2.9$$

4 إذا كان $f: Z \rightarrow R$ حيث $f(x) = x^2$. ارسم مخططاً سهمياً للتطبيق وبيّن هل أن التطبيق

متباين، شامل، أو متقابل؟

الحل

$$f(x) = x^2, \quad X = Z = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

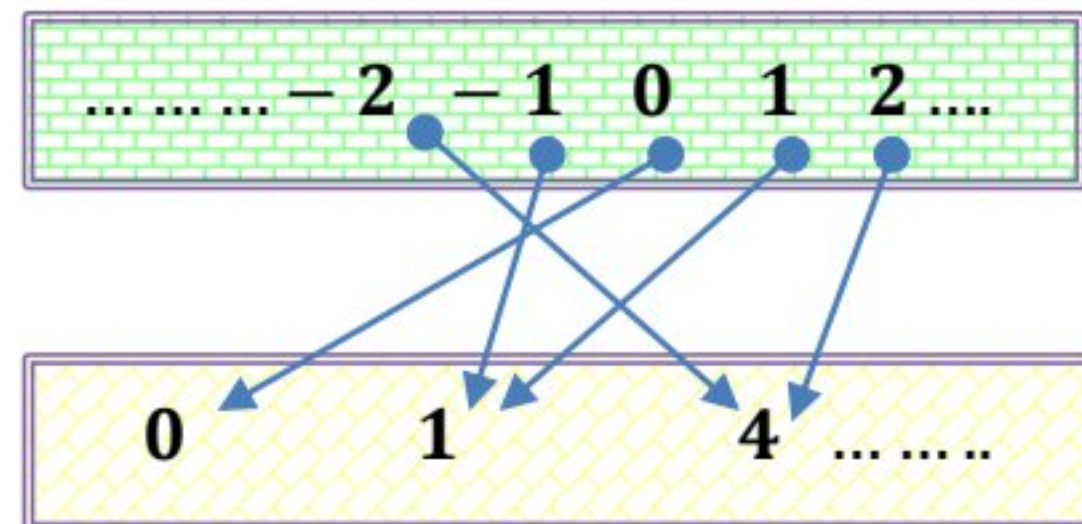
$$f(-2) = (-2)^2 = 4$$

$$f(-1) = (-1)^2 = 1$$

$$f(0) = (0)^2 = 0$$

$$f(1) = (1)^2 = 1$$

$$f(2) = (2)^2 = 4$$



المدى $\{0, 1, 4\}$. التطبيق غير شامل لأن المدى $\neq$ المجال القابل R

التطبيق ليس متباين لأن $f(1) = f(-1)$ بينما $1 \neq -1$ (الناتج متشابهة). التطبيق ليس تقابل.

5 إذا كان التطبيق $f: N \rightarrow N$ إذ $f(x) = 3x + 1$, $g: N \rightarrow N$ إذ $g(x) = x^2$.
جد: $(fog)(2)$, $(gof)(2)$, $(fog)(5)$, $(gof)(5)$.

الحل

$$gof(5) = g[f(5)] = g[3(5) + 1] = g(16) = (16)^2 = 256$$

$$fog(5) = f[g(5)] = f[(5)^2] = f(25) = 3(25) + 1 = 75 + 1 = 76$$

$$gof(2) = g[f(2)] = g[3(2) + 1] = g(7) = (7)^2 = 49$$

$$fog(2) = f[g(2)] = f[(2)^2] = f(4) = 3(4) + 1 = 12 + 1 = 13$$

6 إذا كان التطبيق $f: R \rightarrow R$ حيث $f(x) = 3x + 1$ والتطبيق $g: R \rightarrow R$ إذ أن $g(x) = 2x + 5$.
هل أن $(gof)(x) = (fog)(x)$ ؟ جد قيمة x إذا كانت $(fog)(x) = 28$.

الحل

$$gof(x) = g[f(x)] = g(3x + 1) = 2(3x + 1) + 5 = 6x + 2 + 5 = 6x + 7$$

$$fog(x) = f[g(x)] = f(2x + 5) = 3(2x + 5) + 1 = 6x + 15 + 1 = 6x + 16$$

$$(fog)(x) \neq (g \circ f)(x)$$

$$(fog)(x) = 28$$

$$f[g(x)] = 28$$

$$f(2x + 5) = 28 \Rightarrow 3(2x + 5) + 1 = 28 \Rightarrow 6x + 15 + 1 = 28$$

$$16x + 16 = 28 \Rightarrow 6x = 28 - 16 \Rightarrow 6x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{6} = 2$$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

حل المتباينات المركبة ومثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد:

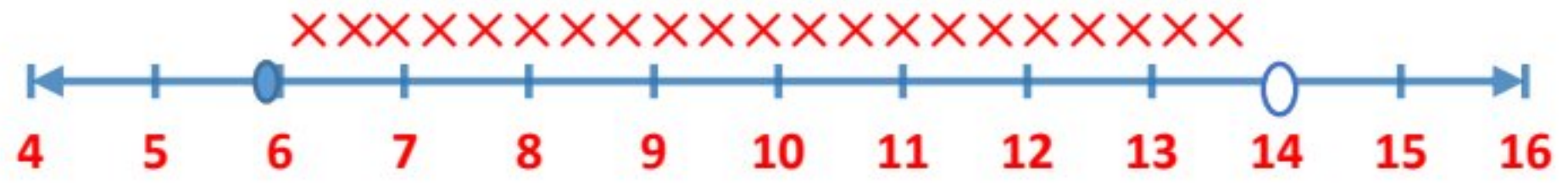
7 $x + 6 \geq 12$ و $x + 6 < 20$

الحل

$x \geq 12 - 6$ و $x < 20 - 6$

$x \geq 6$ و $x < 14$

$S = S_1 \cap S_2 = \{x : x \geq 6\} \cap \{x : x < 14\}$

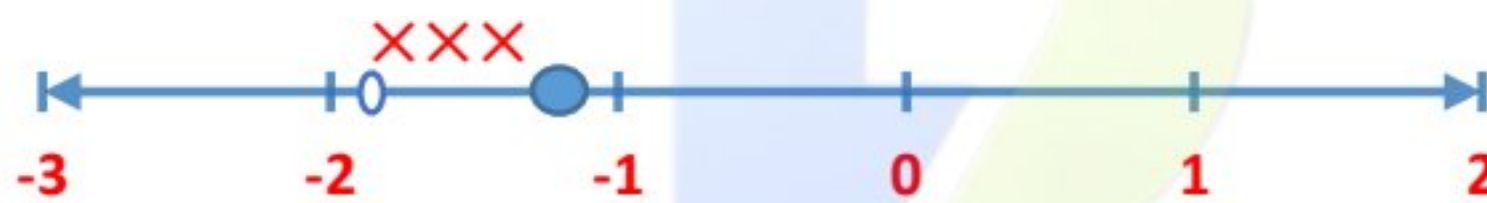


8 $\frac{1}{16} < \frac{z+2}{2} \leq \frac{1}{8} \} \times 2$

الحل

$\frac{1}{8} < z+2 \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{8} - 2 < z+2 - 2 \leq \frac{1}{4} - 2$

$\Rightarrow \frac{-15}{8} < z \leq \frac{-7}{4} \Rightarrow S = \left\{ z : \frac{-15}{8} < z \leq \frac{-7}{4} \right\}$



9 $x-3 \leq -5$ أو $x-3 > 5$

الحل

$x \leq -5 + 3$ أو $x > 5 + 3$

$x \leq -2$ أو $x > 8$

$S = S_1 \cup S_2 = \{x : x \leq -2\} \cup \{x : x > 8\}$



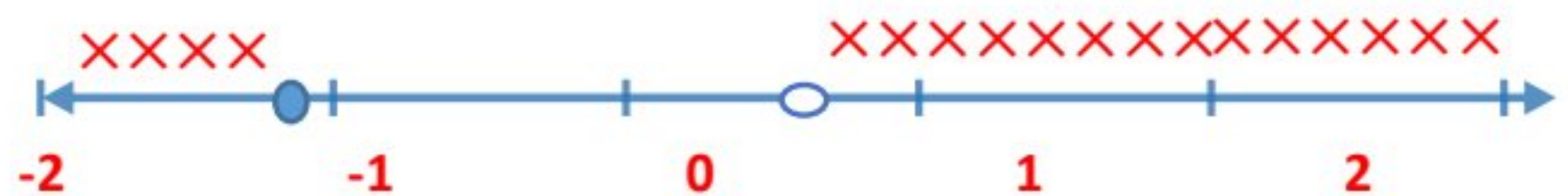
10 $7t-5 > -1$ أو $7t-5 \leq -14$

الحل

$7t > -1 + 5$ أو $7t \leq -14 + 5$

$7t > 4$ أو $7t \leq -9 \} \div 7$

$t > \frac{4}{7}$ أو $t \leq \frac{-9}{7} \Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \left\{ t : t > \frac{4}{7} \right\} \cup \left\{ t : t \leq \frac{-9}{7} \right\}$



الحل

11 $y \leq 0$ أو $y + 7 \geq 16$

$y \leq 0$ أو $y \geq 16 - 7$

$y \leq 0$ أو $y \geq 9$



$\Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \{y : y \leq 0\} \cup \{y : y \geq 9\}$

الحل

12 $\frac{y}{3} < 1\frac{1}{3}$ أو $\frac{y}{3} > 9\frac{1}{3}$

$\frac{y}{3} < \frac{4}{3}$ أو $\frac{y}{3} > \frac{28}{3} \times 3$

$y < 4$ أو $y > 28$



$S = S_1 \cup S_2 = \{y : y < 4\} \cup \{y : y > 28\}$

اكتب المتباينة المركبة التي تبين مدى طول الضلع الثالث في المثلث إذا كان طولاً ضلعي المثلث معلومين:

13 4cm , 9cm

الحل نفرض طول الضلع الثالث x $\Leftarrow$ أطوال اضلاع المثلث 4, 9, x

$4 + 9 > x \Rightarrow 13 > x$ الضلع الثالث أصغر من 13

$9 + x > 4 \Rightarrow x > 4 - 9 \Rightarrow x > -5$ يهمل

$4 + x > 9 \Rightarrow x > 9 - 4 \Rightarrow x > 5$ الضلع الثالث أكبر من 5

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي : $5 < x < 13$

الحل

14

نفرض طول الضلع الثالث x $\Leftarrow$ أطوال اضلاع المثلث 5, 12, x

$5 + 12 > x \Rightarrow 17 > x$ الضلع الثالث أصغر من 17

$12 + x > 5 \Rightarrow x > 5 - 12 \Rightarrow x > -7$ يهمل

$5 + x > 12 \Rightarrow x > 12 - 5 \Rightarrow x > 7$ الضلع الثالث أكبر من 7

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي : $7 < x < 17$

15 7cm, 15cm

الحل

نفرض طول الضلع الثالث x $\Leftarrow$ أطوال اضلاع المثلث 7, 15, x

$$7 + 15 > x \Rightarrow 22 > x \quad \text{الضلع الثالث أصغر من 22}$$

$$15 + x > 7 \Rightarrow x > 7 - 15 \Rightarrow x > -8 \quad \text{يهمل}$$

$$7 + x > 15 \Rightarrow x > 15 - 7 \Rightarrow x > 8 \quad \text{الضلع الثالث أكبر من 8}$$

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي : $8 < x < 22$

حل متباينات القيمة المطلقة الآتية:

16 $|x - 6| \leq 3$

الحل

$$\begin{aligned} -3 \leq x - 6 \leq 3 &\Rightarrow -3 + 6 \leq x \leq 3 + 6 \\ 3 \leq x \leq 9 &\Rightarrow S = \{x : 3 \leq x \leq 9\} \end{aligned}$$

17 $|3Z| - 5 < 4$

الحل

$$\begin{aligned} |3Z| < 4 + 5 &\Rightarrow |3Z| < 9 \\ -9 < 3Z < 9 &\} \div 3 \\ -3 < Z < 3 &\Rightarrow S = \{Z : -3 < Z < 3\} \end{aligned}$$

18 $6|x| - 8 \geq 3$

الحل

$$\begin{aligned} 6|x| &\geq 3 + 8 \Rightarrow 6|x| \geq 11 \} \div 6 \\ |x| &\geq \frac{11}{6} \Rightarrow x \geq \frac{11}{6} \text{ أو } x \leq -\frac{11}{6} \\ S = S_1 \cup S_2 &= \left\{x : x \geq \frac{11}{6}\right\} \cup \left\{x : x \leq -\frac{11}{6}\right\} \end{aligned}$$

19 $|x + 1| > \frac{1}{2}$

الحل

$$\begin{aligned} x + 1 &> \frac{1}{2} \text{ أو } x + 1 < -\frac{1}{2} \} \times 2 \\ 2x + 2 &> 1 \text{ أو } 2x + 2 < -1 \\ 2x &> 1 - 2 \text{ أو } 2x < -1 - 2 \\ 2x &> -1 \text{ أو } 2x < -3 \} \div 2 \\ x &> -\frac{1}{2} \text{ أو } x < -\frac{3}{2} \\ S = S_1 \cup S_2 &= \left\{x : x > -\frac{1}{2}\right\} \cup \left\{x : x < -\frac{3}{2}\right\} \end{aligned}$$

20 $|3y| - 2 > 9$

الحل

$$\begin{aligned} |3y| &> 9 + 2 \Rightarrow |3y| > 11 \\ 3y &> 11 \text{ أو } 3y < -11 \} \div 3 \\ y &> \frac{11}{3} \text{ أو } y < -\frac{11}{3} \\ S = S_1 \cup S_2 &= \left\{y : y > \frac{11}{3}\right\} \cup \left\{y : y < -\frac{11}{3}\right\} \end{aligned}$$

21 $|8Z| - 1 \geq 8$

الحل

$$\begin{aligned} |8Z| &\geq 8 + 1 \Rightarrow |8Z| \geq 9 \\ 8Z &\geq 9 \text{ أو } 8Z \leq -9 \} \div 8 \\ Z &\geq \frac{9}{8} \text{ أو } Z \leq -\frac{9}{8} \\ S = S_1 \cup S_2 &= \left\{Z : Z \geq \frac{9}{8}\right\} \cup \left\{Z : Z \leq -\frac{9}{8}\right\} \end{aligned}$$

22 $|4 - 3y| \geq 14$

$4 - 3y \geq 14$ أو $4 - 3y \leq -14$

$-3y \geq 14 - 4$ أو $-3y \leq -14 - 4$

$-3y \geq 10$ أو $-3y \leq -18$ } $\div (-3)$

$y \leq -\frac{10}{3}$ أو $y \geq 6$

$S = S_1 \cup S_2 = \left\{y : y \leq -\frac{10}{3}\right\} \cup \{y : y \geq 6\}$

الحل

23 $\left|\frac{6 - 3y}{9}\right| \geq 5 \} \times 9$

$|6 - 3y| \geq 45$

$6 - 3y \geq 45$ أو $6 - 3y \leq -45$

$\Rightarrow -3y \geq 45 - 6$ أو $-3y \leq -45 - 6$

$-3y \geq 39$ أو $-3y \leq -51$ } $\div (-3)$

$y \leq -13$ أو $y \geq 17$

$\Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \{y : y \leq -13\} \cup \{y : y \geq 17\}$

الحل

أمسح الرمز للوصول الى المراجعة المركزة الوزارية للفصل الأول



تصوير 2025

(مسائل حياتية - وزاريات - تمارين - افكار مرشحة)

ريهاب جاسم محمد
مدرس الرياضيات

أختبروا مستواكم في وزاريات الفصل الأول

سؤال (1)

بسّط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية:

1 $(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{5})$ 2 $(\sqrt{12} - \sqrt{18})(\sqrt{12} + \sqrt{18})$

3 $(\sqrt{125} - \sqrt{20})(\sqrt[3]{\frac{8}{27}})$ 4 $\frac{4\sqrt{12}}{5\sqrt[3]{-27}} \div \frac{2\sqrt{24}}{\sqrt{8}}$

سؤال (2)

بسّط الجمل العددية التالية باستعمال تنسيب المقام وترتيب العمليات على الأعداد:

1 $\frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}$ 2 $\frac{1-\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$ 3 $\frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{3}-\sqrt{7}}$ 4 $\frac{\sqrt{7}-3\sqrt{5}}{\sqrt{7}+3\sqrt{5}}$

سؤال (3)

أثبت صحة ما يأتي:

$$(7^{\frac{1}{3}} - 5^{\frac{1}{3}})(7^{\frac{2}{3}} + 7^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{3}} + 5^{\frac{2}{3}}) = 2$$

سؤال (4)

إذا كانت $R: X \rightarrow Y$ تمثل تطبيقاً بقاعدة اقتران $(y = \frac{1}{2}x)$ من المجموعة $X = \{4, 6, 8\}$ إلى المجموعة $Y = \{2, 3, 4, 5\}$. اكتب التطبيق على شكل مجموعة أزواج مرتبة ثم مثل التطبيق بمخطط سهمي، وحدد المجال والمدى للتطبيق.

سؤال (5)

1 إذا كانت $f: Z \rightarrow Z$ حيث $f(x) = 2x^2 - 3$ ، بيّن نوع التطبيق

2 إذا كانت $f: N \rightarrow N$ حيث $f(x) = 5x + 2$ وإن $g: N \rightarrow N$ إذ $g(x) = x + 3$.

اكتب التطبيق $f \circ g$ بكتابة الأزواج المرتبة له.

3 إذا كان التطبيق $f: N \rightarrow N$ إذ $f(x) = 3x + 2$. بيّن هل أن التطبيق شامل أم لا؟

4 إذا كان $f: N \rightarrow N$ ، $f(x) = 2x + 1$ ، $g: N \rightarrow N$ ، $g(x) = x^2$.

جد: (i) $(f \circ g)(3)$ ، (ii) $(g \circ f)(3)$ ، ماذا تلاحظ؟، (iii) جد قيمة x إذا كان $(f \circ g)(x) = 33$.

سؤال (6)

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) جبرياً ومثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد:

$$-9 < 2x - 1 \leq 3$$

سؤال (7)

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) جبرياً ومثل الحل على مستقيم الأعداد:

$$3n - 7 > -5 \text{ أو } 3n - 7 \leq -9$$

سؤال (8)

هل يمكن رسم مثلث أطوال أضلاعه كما يأتي:

- 1 5cm ,4cm, 9cm 2 1cm, $\sqrt{2}$ cm, $\sqrt{2}$ cm 3 1cm, 2cm, $\sqrt{3}$ cm

سؤال (9)

1 اكتب متباينة مركبة تبين طول الضلع الثالث في مثلث طول ضلعين فيه 10cm ، 8cm .

2 اكتب متباينة مركبة تبين مدى طول الضلع الثالث في كل مثلث: 7cm, 12cm, x cm

سؤال (10)

حل متباينات القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الأعداد.

- 1 $|6x| + 4 \geq 10$ 2 $|4z - 14| > 2$ 3 $6|x| - 8 \geq 3$ 4 $|\frac{x - 12}{4}| \leq 9$

5 $|\frac{6 - 2y}{4}| \geq 9$



الفصل الثاني : المقادير الجبرية

2

الدرس
[2-1]

ضرب المقادير الجبرية

[2-1-1] ضرب مقدارين جبريين كل منهما من حدين

أمسح الرمز للوصول
الى الجزء الأول لهذا الدرس



1

1 اذا كان المقدار يتكون من قوسين مختلفين فنقوم بتوزيع القوس الأول على القوس الثاني ومن ثم نجمع أو نطرح الحدود المتشابهة

2 اذا كان المقدار بالصورة $(a + b)^2$ أو $(a - b)^2$ فإن تبسيطه حسب قانون المربع الكامل :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 , \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

3 اذا كان المقدار بالصورة $(a - b)(a + b)$ فإن القوسان يمثلان تحليل فرق بين مربعين يمكن حلها بالطريقة :

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

تعلم

حوّطت حديقة منزلية مربعة الشكل طول ضلعها h متر بممر عرضه 1 متر.

ما مساحة الممر بدلالة h ؟

جد مساحة الممر المحيط بالحديقة المربعة الشكل ؟

مثال (1)

مساحة الممر هي الفرق بين مساحتي المربع الكبير (الحديقة مع الممر) والمربع الصغير (الحديقة)

$$(h+2)^2 = (h+2)(h+2) = h^2 + 2h + 2h + 4 = h^2 + 4h + 4$$

مساحة الحديقة مع الممر

$$h \times h = h^2$$

مساحة الحديقة

$$(h^2 + 4h + 4) - h^2 = h^2 + 4h + 4 - h^2 = 4h + 4$$

مساحة الممر

جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين :

مثال (2)

$$1) (x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

مربع مجموع حدين

$$2) (x - y)^2 = (x - y)(x - y) = x^2 - xy - yx + y^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

مربع الفرق بين حدين

$$\begin{aligned} 3) (x+y)(x-y) &= x^2 - xy + yx - y^2 = x^2 - y^2 \\ 4) (x+3)(x+5) &= x^2 + 5x + 3x + 15 = x^2 + 8x + 15 \\ 5) (x+2)(x-6) &= x^2 - 6x + 2x - 12 = x^2 - 4x - 12 \\ 6) (x-1)(x-4) &= x^2 - 4x - x + 4 = x^2 - 5x + 4 \end{aligned}$$

مجموع حدين $\times$ فرق بينهما
مجموع حدين $\times$ مجموع حدين
مجموع حدين $\times$ فرق بين حدين
فرق بين حدين $\times$ فرق بين حدين

مثال (3) جد ناتج ضرب المقادير الجبرية الآتية:

$$\begin{aligned} \text{i) } (z+3)^2 &= z^2 + 6z + 9 \\ \text{ii) } (h-5)^2 &= h^2 - 10h + 25 \\ \text{iii) } (2x-7)(2x+7) &= 4x^2 - 49 \\ \text{iv) } (3y+1)(y+2) &= 3y^2 + 7y + 2 \\ \text{v) } (v+\sqrt{2})(v-\sqrt{2}) &= v^2 - 2 \\ \text{vi) } (n-\sqrt{3})(5n-\sqrt{3}) &= 5n^2 - 6\sqrt{3}n + 3 \end{aligned}$$

امسح الرمز للوصول الى
الجزء الثاني من هذا الدرس

[2-1-2] ضرب مقدار جبري من حدين في آخر من ثلاثة حدود



[1] اذا كان المقدار يتكون من قوسين احدهما من حدين والآخر من ثلاثة حدود هنالك طريقتين:
(a) نضرب القوس الأول في القوس الثاني ثم نطرح الحدود المتشابهة.
(b) اذا كان المقدار بالصورة:

$$\begin{aligned} (a-b)(a^2+ab+b^2) &= a^3 - b^3 \\ (a+b)(a^2-ab+b^2) &= a^3 + b^3 \end{aligned}$$

[2] اذا كان المقدار بالشكل $(a+b)^3$, $(a-b)^3$ نقوم بتبسيطه بالشكل التالي:

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2, (a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2$$

نقوم بتبسيط القوس الذي يحتوي على التربيع أولاً ثم نضرب القوس الأول في القوس الثاني ثم نجمع الحدود المتشابهة.

مثال (4) جد ناتج ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود:

$$\begin{aligned} \text{i) } (x+2)(x^2-2x+4) &= x^3 - 2x^2 + 4x + 2x^2 - 4x + 8 = x^3 + 8 = x^3 + 2^3 \\ \text{ii) } (y-3)(y^2+3y+9) &= y^3 + 3y^2 + 9y - 3y^2 - 9y - 27 = y^3 - 27 = y^3 - 3^3 \\ \text{iii) } (y+2)^3 &= (y+2)(y+2)^2 = (y+2)(y^2+4y+4) \\ &= y^3 + 4y^2 + 4y + 2y^2 + 8y + 8 = y^3 + 6y^2 + 12y + 8 \\ \text{iv) } (z-3)^3 &= (z-3)(z-3)^2 = (z-3)(z^2-6z+9) \\ &= z^3 - 6z^2 + 9z - 3z^2 + 18z - 27 = z^3 - 9z^2 + 27z - 27 \end{aligned}$$

ناتج الضرب مجموع مكعبين

ناتج الضرب الفرق بين مكعبين

مكعب مجموع حدين

مكعب الفرق بين حدين

مثال (5) جد ناتج ضرب المقادير الجبرية الآتية:

$$i) (2v + 5) (4v^2 - 10v + 25) = 8v^3 - 20v^2 + 50v + 20v^2 - 50v + 125 = 8v^3 + 125 = (2v)^3 + 5^3$$

$$ii) \left(\frac{1}{3} - z\right) \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}z + z^2\right) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9}z + \frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{9}z - \frac{1}{3}z^2 - z^3 = \frac{1}{27} - z^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - z^3$$

$$iii) (x - \sqrt[3]{2}) (x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}) = x^3 + \sqrt[3]{2}x^2 + \sqrt[3]{4}x - \sqrt[3]{2}x^2 - \sqrt[3]{4}x - \sqrt[3]{8}$$

$$= x^3 + \sqrt[3]{2}x^2 - \sqrt[3]{2}x^2 + \sqrt[3]{4}x - \sqrt[3]{4}x - 2 = x^3 - 2$$

$$iv) \left(x + \frac{1}{2}\right)^3 = \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) = x^3 + x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}$$

$$= x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$$

$$v) (y - 5)^3 = (y - 5) (y - 5)^2 = (y - 5) (y^2 - 10y + 25)$$

$$= y^3 - 10y^2 + 25y - 5y^2 + 50y - 125 = y^3 - 15y^2 + 75y - 125$$

تأكّد من فهمك

جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين:

$$1) (x + 3) (x - 3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$$

$$2) (\sqrt{7} - h)^2 = 7 - 2\sqrt{7}h + h^2$$

$$3) (z + \sqrt{5}) (z - \sqrt{5}) = z^2 - (\sqrt{5})^2 = z^2 - 5$$

$$4) (v + 5) (v + 1) = v^2 + v + 5v + 5 = v^2 + 6v + 5$$

$$5) (x - 3) (x - 2) = x^2 - 2x - 3x + 6 = x^2 - 5x + 6$$

$$6) (3x - 4) (x + 5) = 3x^2 + 15x - 4x - 20 = 3x^2 + 11x - 20$$

$$7) \left(\frac{1}{3}y + 3\right) \left(\frac{1}{3}y + 2\right) = \frac{1}{9}y^2 + y + y + 9 = \frac{1}{9}y^2 + 2y + 9$$

الحل

جد ناتج ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود:

$$8 \quad (y+2)(y^2-2y+4) = y^3 + 2^3 = y^3 + 8$$

الحل

$$9 \quad (2z+4)(4z^2-8z+16) = (2Z)^3 + 4^3 = 8Z^3 + 64$$

$$10 \quad (v - \sqrt[3]{3})(v^2 + \sqrt[3]{3}v + \sqrt[3]{9}) = v^3 - (\sqrt[3]{3})^3 = v^3 - 3$$

$$11 \quad (\sqrt[3]{\frac{2}{7}} + m)(\sqrt[3]{\frac{4}{49}} - \sqrt[3]{\frac{2}{7}}m + m^2) = \left(\sqrt[3]{\frac{2}{7}}\right)^3 + m^3 = \frac{2}{7} + m^3$$

$$12 \quad (x+5)^3 = (x+5)(x+5)^2 = (x+5)(x^2+10x+25) \\ = x^3 + 10x^2 + 25x + 5x^2 + 50x + 125 = x^3 + 15x^2 + 75x + 125$$

$$13 \quad (y-4)^3 = (y-4)(y-4)^2 = (y-4)(y^2-8y+16) \\ = y^3 - 8y^2 + 16y - 4y^2 + 32y - 64 = y^3 - 12y^2 + 48y - 64$$

تدرب وحل التمرينات

جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين:

$$14 \quad (n-6)^2 = n^2 - 12n + 36$$

الحل

$$15 \quad (2x-3)(x+9) = y^2 - (\sqrt{6})^2 = y^2 - 6$$

$$16 \quad (y+\sqrt{6})(y-\sqrt{6}) = 20 - 4y - 5y + y^2 = 20 - 9y + y^2$$

$$17 \quad (4-y)(5-y) = 3x^2 + 27x - 3x - 27 = 3x^2 - 24x - 27$$

جد ناتج ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود:

$$18 \quad (x+6)(x^2-6x+36) = x^3 + 6^3 = x^3 + 216$$

الحل

$$19 \quad (z-3)^3 = (Z-3)(Z-3)^2 = (Z-3)(Z^2-6Z+9) \\ = Z^3 - 6Z^2 + 9Z - 3Z^2 + 18Z - 27 = Z^3 - 9Z^2 + 27Z - 27$$

$$20 \quad (x - \sqrt[3]{4})(x^2 + \sqrt[3]{4}x + \sqrt[3]{16}) = x^3 - (\sqrt[3]{4})^3 = x^3 - 4$$

$$21 \quad (\sqrt[3]{\frac{1}{5}} + n)(\sqrt[3]{\frac{1}{25}} - \sqrt[3]{\frac{1}{5}}n + n^2) = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{5}}\right)^3 + n^3 = \frac{1}{5} + n^3$$

تدرب وحل مسائل حياتية

أمسح للرمز للوصول الى هذه المسألة
و مسائل أخرى



14

22 مسبح: يعد فندق بغداد أحد الفنادق السياحية المهمة في العاصمة العراقية بغداد، يبلغ طول المسبح فيه $(x + 9)$ أمتار وعرضه $(x + 1)$ متر، ومحاط بممر عرضه 1 متر. اكتب مساحة المسبح مع الممر بأبسط صورة بدلالة x .

الحل

الطول $x + 9 + 1 + 1 = x + 11$, العرض $x + 1 + 1 + 1 = x + 3$

مساحة المسبح = الطول $\times$ العرض

$$A = (x + 11)(x + 3) = x^2 + 3x + 11x + 33 = x^2 + 14x + 33$$



23 تاريخ: تقع مدينة بابل شمال مدينة الحلة في العراق حيث عاش البابليون فيها منذ 3000 سنة قبل الميلاد تقريباً. وقد بنوا سنة 575م بوابة عشتار التي تعد البوابة الثامنة في سور مدينة بابل. رسم وائل لوحة فنية تمثل بوابة عشتار بالأبعاد $(y + 7)$ ، $(y - 4)$ سنتمترات. اكتب مساحة اللوحة التي رسمها وائل بأبسط صورة بدلالة y .

الحل

مساحة اللوحة = الطول $\times$ العرض

$$A = (y - 4)(y - 7) = y^2 - 7y - 4y + 28 = y^2 - 11y + 28$$



24 أسماك زينة: حوض سمك زينة مكعب الشكل طول حرفه $(v + 3)$ سنتمتر. اكتب حجم حوض الزينة بأبسط صورة بدلالة v .

الحل

$$V = L^3 = (v + 3)^3 = (v + 3)(v + 3)^2 = (v + 3)(v^2 + 6v + 9) = v^3 + 6v^2 + 9v + 3v^2 + 18v + 27 = v^3 + 9v^2 + 27v + 27$$

فكّر

25 تحدّ: جد ناتج ما يأتي بأبسط صورة:

$$(x + 1)^2 - (x - 2)^2 = x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 4x + 4)$$

$$= x^2 + 2x + 1 - x^2 + 4x - 4 = 6x - 3$$

الحل

26 **أصحّ الخطأ:** كتبت نسرين ناتج ضرب المقدارين الجبريين كالآتي:

الحل
حدّد خطأ نسرين وصحّحه. $(\sqrt{5}h - 4)(h - 6) = 5h^2 + 10h - 24$

$$(\sqrt{5}h - 4)(h - 6) = \sqrt{5}h^2 - 6\sqrt{5}h - 4h + 24 = \sqrt{5}h^2 - (6\sqrt{5} + 4)h + 24$$

27 **حسّ عدديّ:** أيّ العددين أكبر؟ العدد $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$ أم العدد $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$. وضّح إجابتك.

الحل
 $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{6} + 2 = 5 - 2\sqrt{6}$, $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6}$
العدد $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$ أكبر من العدد $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

$$(2z + \frac{1}{2})(2z - \frac{1}{2})$$

ناتج ضرب المقدارين الجبريين:

أكتب

$$(2z + \frac{1}{2})(2z - \frac{1}{2}) = (2z)^2 - (\frac{1}{2})^2 = 4z^2 - \frac{1}{4}$$

الحل

الدرس
[2-2] تحليل المقدار الجبري باستعمال العامل المشترك الأكبر

أمسح الرمز للوصول لهذا الدرس



3

[2-2-1] تحليل مقدار جبري باستعمال العامل المشترك الأكبر

لإيجاد العامل المشترك نتبع ما يأتي:

(1) نستخرج العامل المشترك للأعداد حيث يمثل أصغر عدد في المقدار الجبري ويمكن قسمة المقدار الجبري عليه.

(2) نستخرج العامل المشترك للمتغيرات بأصغر أس.

(3) نفتح قوس ونقوم بقسمة كل حد في المقدار الجبري على العامل المشترك وناتج القسمة يكتب داخل القوس.

ملاحظة: التحقق من صحة الحل: نقوم بتوزيع العامل المشترك على داخل القوس فإذا حصلنا على المقدار الجبري فأن التحليل صحيح وإذا لم نحصل على المقدار الجبري فأن الحل خطأ ويجب إعادة التحليل.

تعلم

يعد نصب ساحة كهرمانة وسط بغداد من المعالم الحضارية المتميزة في العراق. يتوسط تمثال كهرمانة الساحة التي تقع في منطقة الكرادة ويبلغ نصف قطر قاعدة التمثال r متر ويحيط به حوض على شكل ممر دائري، إذا كان نصف قطر التمثال مع الحوض $r + 2$ متر، فجد مساحة الحوض.

مثال (1)

نصف قطر قاعدة تمثال كهرمانة r متر، ونصف قطر قاعدة التمثال مع الحوض $r + 2$ متر، جد مساحة الحوض.

$$A_1 = r^2 \pi$$

مساحة التمثال

$$A_2 = (r + 2)^2 \pi = (r^2 + 4r + 4) \pi = r^2 \pi + 4r \pi + 4 \pi$$

مساحة التمثال مع الحوض

$$A = A_2 - A_1 = r^2 \pi + 4r \pi + 4 \pi - r^2 \pi = 4r \pi + 4 \pi = 4 \pi (r + 1)$$

مساحة الحوض

(4π) العامل المشترك الأكبر

مساحة الحوض المحيط بالتمثال $4 \pi (r + 1)$ متر مربع

مثال (2)

حل كل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF) وتحقق من صحة الحل:

$$1) \quad 6x^3 + 9x^2 - 18x = 3x(2x^2 + 3x - 6)$$

العامل المشترك الأكبر هو $3x$

$$3x(2x^2 + 3x - 6) = 3x(2x^2) + 3x(3x) - 3x(6) = 6x^3 + 9x^2 - 18x$$

للتحقق استعمل عملية ضرب المقادير الجبرية

فتح القوس مع تبسيط الجذور العددية العامل المشترك الأكبر هو $2\sqrt{3}yz$

$$2) \quad \sqrt{12}y^2z + \sqrt{2}(\sqrt{6}yz^2 - \sqrt{24}yz) = 2\sqrt{3}y^2z + \sqrt{12}yz^2 - \sqrt{48}yz$$

$$= 2\sqrt{3}y^2z + 2\sqrt{3}yz^2 - 4\sqrt{3}yz = 2\sqrt{3}yz(y + z - 2)$$

$$2\sqrt{3}yz(y + z - 2) = 2\sqrt{3}y^2z + 2\sqrt{3}yz^2 - 4\sqrt{3}yz$$

التحقق:

مثال (3)

حل كل مقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر:

$$1) \quad 5x(x + 3) - 7(x + 3) = (x + 3)(5x - 7)$$

العامل المشترك الأكبر هو $(x+3)$

$$2) \quad \frac{1}{2}(y - 1) + \frac{1}{3}y^2(y - 1) = (y - 1)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}y^2\right)$$

العامل المشترك الأكبر هو $(y-1)$

$$3) \quad \sqrt{3}v^2(z + 2) - \sqrt{5}v(z + 2) = v(z + 2)(\sqrt{3}v - \sqrt{5})$$

العامل المشترك الأكبر هو $(z+2)$

[2-2-2] تحليل مقدار جبري باستعمال التجميع

تستعمل خاصية التجميع في التحليل اذا كان المقدار الجبري يتكون من أربعة حدود .

* تجميع الحدود التي لها عوامل مشتركة (كل حدين في قوس واحد)

* تحليل الحدود المجمعة

* إيجاد العامل المشترك الأكبر

أمسح الرمز للوصول لهذا الدرس



مثال (4)

حل كل مقدار باستعمال خاصية التجميع وتحقق من صحة الحل:

$$1) \quad 4x^3 - 8x^2 + 5x - 10 = (4x^3 - 8x^2) + (5x - 10) = 4x^2(x - 2) + 5(x - 2) \\ = (x - 2)(4x^2 + 5)$$

$$(x - 2)(4x^2 + 5) = 4x^3 + 5x - 8x^2 - 10 = 4x^3 - 8x^2 + 5x - 10 \quad \text{التحقق:}$$

$$2) \quad \sqrt{2}h^2t + \sqrt{3}t^2v - \sqrt{8}h^2v - \sqrt{12}v^2t = (\sqrt{2}h^2t - \sqrt{8}h^2v) + (\sqrt{3}t^2v - \sqrt{12}v^2t) \\ = (\sqrt{2}h^2t - 2\sqrt{2}h^2v) + (\sqrt{3}t^2v - 2\sqrt{3}v^2t) \\ = \sqrt{2}h^2(t - 2v) + \sqrt{3}tv(t - 2v) \\ = (t - 2v)(\sqrt{2}h^2 + \sqrt{3}tv) \\ (t - 2v)(\sqrt{2}h^2 + \sqrt{3}tv) = t(\sqrt{2}h^2 + \sqrt{3}tv) - 2v(\sqrt{2}h^2 + \sqrt{3}tv) \\ = \sqrt{2}h^2t + \sqrt{3}t^2v - 2\sqrt{2}h^2v - 2\sqrt{3}v^2t \\ = \sqrt{2}h^2t + \sqrt{3}t^2v - \sqrt{8}h^2v - \sqrt{12}v^2t \quad \text{التحقق:}$$

مثال (5)

حل المقدار باستعمال خاصية التجميع مع المعكوس:

$$14x^3 - 7x^2 + 3 - 6x = (14x^3 - 7x^2) + (3 - 6x) = 7x^2(2x - 1) + 3(1 - 2x) \\ = 7x^2(2x - 1) + 3(-1)(2x - 1) = 7x^2(2x - 1) - 3(2x - 1) \\ = (2x - 1)(7x^2 - 3)$$

تأكد من فهمك

حل كل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF) وتحقق من صحة الحل:

$$1) \quad 9x^2 - 21x = 3x(3x - 7) \\ 3x(3x - 7) = 9x^2 - 21x \quad \text{الحل} \quad \text{التحقق:}$$

$$2) \quad 10 - 15y + 5y^2 = 5(2 - 3y + y^2) \\ 5(2 - 3y + y^2) = 10 - 15y + 5y^2 \quad \text{الحل} \quad \text{التحقق:}$$

$$3) \quad 14Z^4 - 21Z^2 - 7Z^3 = 7Z^2(2Z^2 - 3 - Z) \\ 7Z^2(2Z^2 - 3 - Z) = 14Z^4 - 21Z^2 - 7Z^3 \quad \text{الحل} \quad \text{التحقق:}$$

$$4) \quad \sqrt{8}t^2r + \sqrt{2}(tr^2 - \sqrt{3}tr) \\ = 2\sqrt{2}t^2r + \sqrt{2}tr^2 - \sqrt{2}\sqrt{3}tr \\ = \sqrt{2}tr(2t + r - \sqrt{3}) \\ \sqrt{2}tr(2t + r - \sqrt{3}) \\ = 2\sqrt{2}t^2r + \sqrt{2}tr^2 - \sqrt{2}tr(\sqrt{3}) \\ = \sqrt{2}t^2r + \sqrt{2}(tr^2 - \sqrt{3}tr) \quad \text{الحل} \quad \text{التحقق:}$$

حل كل مقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر:

$$5) \quad 3y(y - 4) - 5(y - 4) = (y - 4)(3y - 5)$$

$$6) \quad \frac{1}{4}(t + 5) + \frac{1}{3}t^2(t + 5) = (t + 5)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}t^2\right) \quad \text{الحل}$$

$$7) \quad \sqrt{2}n(x + 1) - \sqrt{3}m(x + 1) = (x + 1)(\sqrt{2}n - \sqrt{3}m)$$

$$8) \quad 2x(x^2 - 3) + 7(x^2 - 3) = (x^2 - 3)(2x + 7)$$

حل كل مقدار باستعمال خاصية التجميع وتحقق من صحة الحل:

$$9 \quad 3y^3 - 6y^2 + 7y - 14 = (3y^3 - 6y^2) + (7y - 14) = 3y^2(y - 2) + 7(y - 2) \\ = (y - 2)(3y^2 + 7)$$

$$(y - 2)(3y^2 + 7) = 3y^3 + 7y - 6y^2 - 14 = 3y^3 - 6y^2 + 7y - 14$$

التحقق:

$$10 \quad 21 - 3x + 35x^2 - 5x^3 = (21 - 3x) + (35x^2 - 5x^3) = 3(7 - x) + 5x^2(7 - x) \\ = (7 - x)(3 + 5x^2)$$

$$(7 - x)(3 + 5x^2) = 21 + 35x^2 - 3x - 5x^3 = 21 - 3x + 35x^2 - 5x^3$$

التحقق:

$$11 \quad 2r^2k + 3k^2v - 4r^2v - 6v^2k = (2r^2k - 4r^2v) + (3k^2v - 6v^2k) \\ = 2r^2(k - 2v) + 3kv(k - 2v) = (k - 2v)(2r^2 + 3kv)$$

$$(k - 2v)(2r^2 + 3kv) = 2r^2k + 3k^2v - 4r^2v - 6v^2k$$

التحقق:

$$12 \quad 3Z^3 - \sqrt{18}Z^2 + Z - \sqrt{2} = (3Z^3 + Z) + (-\sqrt{18}Z^2 - \sqrt{2}) \\ = (3Z^3 + Z) + (-3\sqrt{2}Z^2 - \sqrt{2}) \\ = Z(3Z^2 + 1) - \sqrt{2}(3Z^2 + 1) = (3Z^2 + 1)(Z - \sqrt{2})$$

$$(3Z^2 + 1)(Z - \sqrt{2}) = 3Z^3 - 3\sqrt{2}Z^2 + Z - \sqrt{2}$$

التحقق:

حل المقدار باستعمال خاصية التجميع مع المعكوس:

$$13 \quad 21y^3 - 7y^2 + 3 - 9y = (21y^3 - 7y^2) + (3 - 9y) = 7y^2(3y - 1) + 3(1 - 3y) \\ = 7y^2(3y - 1) + 3(-1)(3y - 1) = 7y^2(3y - 1) - 3(3y - 1) \\ = (3y - 1)(7y^2 - 3)$$

$$14 \quad \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4}x^3 + 5 - 10x = \left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4}x^3\right) + (5 - 10x) = \frac{1}{4}x^3(2x - 1) + 5(1 - 2x) \\ = \frac{1}{4}x^3(2x - 1) - 5(2x - 1) = (2x - 1)\left(\frac{1}{4}x^3 - 5\right)$$

$$15 \quad 6Z^3 - 9Z^2 + 12 - 8Z = (6Z^3 - 9Z^2) + (12 - 8Z) = 3Z^2(2Z - 3) + 4(3 - 2Z) \\ = 3Z^2(2Z - 3) + 4(-1)(2Z - 3) \\ = 3Z^2(2Z - 3) - 4(2Z - 3) = (2Z - 3)(3Z^2 - 4)$$

$$16 \quad 5t^3 - 15t^2 - 2t + 6 = (5t^3 - 15t^2) + (-2t + 6) = 5t^2(t - 3) + 2(-t + 3) \\ = 5t^2(t - 3) + 2(-1)(t - 3) = 5t^2(t - 3) - 2(t - 3) = (t - 3)(5t^2 - 2)$$

تدرب وحل التمرينات

حل كل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF) وتحقق من صحة الحل:

17 $12y^3 - 21y^2 = 3y^2(4y - 7)$

$3y^2(4y - 7) = 12y^3 - 21y^2$

الحل
التحقق:

18 $6v^2(3v - 6) + 18v = 18v^3 - 36v^2 + 18v$

$= 18v(v^2 - 2v + 1)$

$18v(v^2 - 2v + 1) = 18v^3 - 36v^2 + 18v$

$= 6v^2(3v - 6) + 18v$

الحل

التحقق:

حل المقدار التالي باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر:

19 $\frac{1}{7}(y + 1) + \frac{1}{3}y^2(y + 1) = (y + 1)\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3}y^2\right)$

الحل

حل كل مقدار باستعمال خاصية التجميع وتحقق من صحة الحل:

20 $5x^3 - 10x^2 + 10x - 20 = (5x^3 - 10x^2) + (10x - 20)$

$= 5x^2(x - 2) + 10(x - 2) = (x - 2)(5x^2 + 10)$

$(x - 2)(5x^2 + 10) = 5x^3 + 10x - 10x^2 - 20 = 5x^3 - 10x^2 + 10x - 20$

الحل

التحقق:

21 $3t^3k + 9k^2s - 6t^3s - 18s^2k = (3t^3k + 9k^2s) + (-6t^3s - 18s^2k)$

$= 3k(t^3 + 3ks) - 6s(t^3 - 3ks) = (t^3 + 3ks)(3k - 6s)$

$(t^3 + 3ks)(3k - 6s) = 3t^3k - 6t^3s + 9k^2s - 18s^2k = 3t^3k + 9k^2s - 6t^3s - 18s^2k$

التحقق:

حل المقدار التالي باستعمال خاصية التجميع مع المعكوس:

22 $12x^3 - 4x^2 + 3 - 9x = (12x^3 - 4x^2) + (3 - 9x) = 4x^2(3x - 1) + 3(1 - 3x)$

$= 4x^2(3x - 1) + 3(-1)(3x - 1) = 4x^2(3x - 1) - 3(3x - 1)$

$= (3x - 1)(4x^2 - 3)$

تدرب وحل مسائل حياتية



23 الطاقة الشمسية: الألواح الشمسية هي المكون الرئيس في أنظمة الطاقة الشمسية التي تقوم بتوليد الكهرباء، وتصنع الخلايا من مواد شبه موصلة مثل السيليكون تمتص الضوء من الشمس. ما أبعاد اللوح الشمسي بدلالة x ، إذا كانت المساحة $3x(x - 4) - 22(x - 4)$ أمتار مربعة؟ **الحل**

$$A = 3x(x - 4) - 22(x - 4) = (x - 4)(3x - 22) \quad (x - 4), (3x - 22) \text{ : أبعاد اللوح الشمسي هي}$$



24 طائر الفلامنكو: طائر الفلامنكو، من جنس النحاميات وهو من الطيور المهاجرة التي تمتاز بشكلها الجميل ولونها الوردية، وتقطع مسافات بعيدة في أثناء موسم الهجرة السنوي مروراً بمنطقة الأهوار جنوبي العراق لتحصل على الغذاء من المسطحات المائية. إذا كانت مساحة المسطح المائي الذي غطته طيور الفلامنكو في أحد الأهوار $4y^2 + 14y + 7(2y + 7)$ أمتار مربعة. فما شكل المسطح وما أبعاده بدلالة y ؟ **الحل**

$$A = 4y^2 + 14y + 7(2y + 7) = 2y(2y + 7) + 7(2y + 7) = (2y + 7)(2y + 7) = (2y + 7)^2$$

شكل المسطح هو مربع. أبعاد المسطح هو: $(2y + 7), (2y + 7)$



25 ساعة بغداد: ساعة بغداد هي مبنى مرتفع تعلوه ساعة معلقة على برج لها أربعة أوجه، يقع المبنى ضمن منطقة ساحة الاحتفالات في بغداد وأنشئت في سنة 1994م. ما نصف قطر الدائرة الداخلية للساعة بدلالة z إذا علمت أن مساحتها $z^2\pi - 3z\pi - \pi(3z - 9)$ ؟ **الحل**

$$A = z^2\pi - 3z\pi - \pi(3z - 9) = z\pi(z - 3) - 3\pi(z - 3) = (z - 3)(z\pi - 3\pi)$$

$$A = (z - 3)\pi(z - 3) \Rightarrow A = \pi(z - 3)^2, \quad A = r^2\pi$$

$$r^2\pi = \pi(z - 3)^2 \quad \} \div \pi$$

$$\frac{r^2\pi}{\pi} = \frac{\pi(z - 3)^2}{\pi} \Rightarrow r^2 = (z - 3)^2 \Rightarrow r = (z - 3) \text{ نصف القطر}$$

فَكَّرْ

26 **تحذّر:** حلّ المقدار التالي إلى أبسط صورة:

$$5x^5y + 7y^3Z - 10x^5Z - 14Z^2y^2 = (5x^5y - 10x^5Z) + (7y^3Z - 14Z^2y^2)$$

$$= 5x^5(y - 2Z) + 7y^2Z(y - 2z) = (y - 2Z)(5x^5 + 7y^2Z)$$

الحل

27 **أصحّ الخطأ:** كتبت ابتسام ناتج تحليل المقدار التالي كما يأتي:

$$\sqrt{2}t^4 - \sqrt{24}t^3 + t^2 - \sqrt{12}t = (t + 2\sqrt{3})(\sqrt{2}t^2 - t)$$

الحل

$$\sqrt{2}t^4 - \sqrt{24}t^3 + t^2 - \sqrt{12}t = (\sqrt{2}t^4 - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}t^3) + (t^2 - 2\sqrt{3}t)$$

$$= \sqrt{2}t^3(t - 2\sqrt{3}) + t(t - 2\sqrt{3}) = (\sqrt{2}t^3 + t)(t - 2\sqrt{3})$$

28 **حسّ عدديّ:** ما العدد المجهول في المقدار

$$x^2 + 3x + 5x + 15 = (x + 3)(x + \boxed{})$$

$$x^2 + 3x + 5x + 15 = (x^2 + 3x) + (5x + 15) = x(x + 3) + 5(x + 3) = (x + 3)(x + 5)$$

الحل

العدد المجهول هو : 5

ناتج طرح المقدار $(x + y)(x - y)$ من المقدار $(x + y)(x + y)$ بأبسط صورة.

أكتب

$$(x + y)(x + y) - (x + y)(x - y) = x^2 + xy + yx + y^2 - (x^2 - y^2)$$

$$= x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + y^2$$

$$= 2xy + 2y^2 = 2y(x + y)$$

الحل

الطريقة الثانية:

$$(x + y)(x + y) - (x + y)(x - y) = (x + y)[x + y - (x - y)]$$

$$= (x + y)(x + y - x + y) = (x + y)2y$$

أمسح الرمز للوصول لهذا الدرس



5

تحليل المقدار الجبري بالمتطابقات

الدرس
[2-3]

[2-3-1] تحليل المقدار الجبري بالفرق بين مربعين

تتكون طريقة الفرق بين مربعين من قوسين أحدهما موجب والآخر سالب . أي أن :

القوس الأول = الجذر التربيعي للحد الأول + الجذر التربيعي للحد الثاني

القوس الثاني = الجذر التربيعي للحد الأول - الجذر التربيعي للحد الثاني

أي أن تحليل المقدار الجبري الذي على صورة فرق بين مربعين : $(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y)$

ملاحظة: إذا كان المقدار بالصورة $x^2 + y^2$ فإنه لا يتحلل .

ملاحظة: نتخلص من الأقواس أن وجدت ثم نجمع أو نطرح الحدود المتشابهة .

يعد ملعب الشعب الدولي في العاصمة العراقية بغداد من الملاعب المهمة في العراق إذ أنشئ عام 1966. إذا كانت مساحة الساحة المخصصة لكرة القدم التي تتوسط أرضيته يمثلها المقدار $x^2 - 400$ متر مربع، فما أبعاد الساحة؟

تعلم

مثال (1)

جد أبعاد ساحة كرة القدم التي مساحتها $x^2 - 400$ متر مربع.

اكتب كل حد على هيئة مربع كامل

اكتب التحليل

$$\begin{aligned} x^2 - 400 &= (x)^2 - (20)^2 \\ &= (x + 20)(x - 20) \end{aligned}$$

القوس الأول: الجذر التربيعي للحد الأول + الجذر التربيعي للحد الثاني

القوس الثاني: الجذر التربيعي للحد الأول - الجذر التربيعي للحد الثاني

لذا طول ساحة كرة القدم $x + 20$ متراً وعرضها $x - 20$ متراً

مثال (2)

حل كل مقدار من المقادير التالية كفرق بين مربعين:

1) $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$

2) $36y^2 - z^2 = (6y + z)(6y - z)$

3) $49 - v^2 = (7 + v)(7 - v)$

4) $h^2 - 7v^2 = (\sqrt{5}h + \sqrt{7}v)(\sqrt{5}h - \sqrt{7}v)$

5) $8x^3y - 2xy^3 = 2xy(4x^2 - y^2) = 2xy(2x + y)(2x - y)$

6) $2x^2 - z^2 = (\sqrt{2}x + z)(\sqrt{2}x - z)$

7) $12 - t^2 = (\sqrt{12} + t)(\sqrt{12} - t) = (2\sqrt{3} + t)(2\sqrt{3} - t)$

8) $\frac{1}{16}z^4 - \frac{1}{81} = \left(\frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{9}\right) = \left(\frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}z - \frac{1}{3}\right)$

الحل

التحليل باستعمال العامل المشترك
التحليل باستعمال الفرق بين المربعين

أمسح الرمز للوصول لهذا الدرس



6

[2-3-2] تحليل المقدار الجبري بالمربع الكامل

هي تحليل مؤلف من ثلاثة حدود على صورة مربع كامل .

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 , \quad x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

يكون المقدار الجبري: $ax^2 + bx + c$ مربعاً كاملاً إذا تحققت الشروط التالية:

- (1) يجب أن تكون إشارة الحد الأول و الأخير موجبة
- (2) نرتب السؤال فقط في حالة أن الحد الوسط ليس في مكانه
- (3) يتكون السؤال من ثلاثة حدود و أعلى أس هو 2 (مثال: $ax^2 + bx + c$ أو $ax^2 - bx + c$)

(4) نحلل المقدار بهذا القانون $(\text{جذر الحد الأخير} \pm \text{جذر الحد الأول})^2$ حسب إشارة الحد الوسط

حل كل مقدار من المقادير التالية التي على صورة مربع كامل:

مثال (3)

[1] $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

[2] $y^2 - 4y + 4 = (y - 2)^2$

[3] $16Z^2 - 8Z + 1 = (4Z - 2)^2$

التحليل على هيئة $(\text{جذر الحد الأخير} \pm \text{جذر الحد الأول})^2$

حدد أي مقدار من المقادير التالية يمثل مربعاً كاملاً وحلّه:

مثال (4)

[1] $x^2 + 10x + 25$

$(x) \quad (5)$

نستخدم إحدى الأدوات وحسب إشارة الحد الوسط.

الحد الوسط

$(+2)(y)(5) = +10x$

المقدار مربع كامل

$(\text{جذر الحد الأخير} \pm \text{جذر الحد الأول})^2$

$(x + 5)^2$

[2] $y^2 + 14y + 36$

$(y) \quad (6)$

نستخدم إحدى الأدوات وحسب إشارة الحد الوسط.

الحد الوسط

$(+2)(y)(6) = +12y$

المقدار مربع كامل

$(y + 6)^2$

[3] $4 - 37v + 9v^2$

الحل

(2) $(3v)$

نستخدم إحدى الأدوات وحسب
إشارة الحد الوسط.

ليس الحد الوسط

$(-2)(2)(3v) = -12v$

المقدار مربع ليس كامل

+2 أو -2

[4] $9h^2 - 6h + 3$

الحل

$(3h)$ $(\sqrt{3})$

نستخدم إحدى الأدوات وحسب
إشارة الحد الوسط.

ليس الحد الوسط

$(-2)(3h)(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}h$

المقدار مربع ليس كامل

+2 أو -2

قانون أيجاد الحد المفقود :

لأيجاد الحد المفقود في المقدار الجبري : $ax^2 + bx + c$ ليصبح مربعاً كاملاً نطبق قانون الحد الوسط :

$$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$$

خطوات الحل :

أولاً : إذا كان الحد الثاني (الوسط) هو المفقود :

1- نكتب قانون bx

2- نعوض المعطيات في القانون

3- نكمل الحل لأيجاد الحد الوسط

ثانياً : إذا كان الحد الأول أو الحد الأخير (الثالث) هو المفقود :

1- نكتب قانون bx

2- نعوض المعطيات في القانون

3- نقسم طرفي المعادلة على (2) للتبسيط (خطوة اختيارية)

4- نربع الطرفين

5- نقسم الطرفين على معامل المجهول

أمسح الرمز للوصول لهذا الدرس
(الحد المفقود)



اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري $ax^2 + bx + c$ ليصبح مربعاً كاملاً وحلّه:

مثال (5)

[1] $25x^2 - \dots + 49$

الحل

$$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$$

$$bx = 2\sqrt{(25x^2)(49)} = 2(5x)(7) = 70x$$

$$25x^2 - 70x + 49 = (5x - 7)^2$$

[2] $\dots + 8x + 16$

الحل

$$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$$

$$8x = 2\sqrt{(ax^2)(16)}$$

بتربيع الطرفين

$$64x^2 = 4(ax^2)(16) \Rightarrow 64x^2 = 64(ax^2)$$

$$ax^2 = \frac{64x^2}{64} = x^2 \Rightarrow x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$$

[3] $y^2 + 14y + \dots$

الحل

$$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$$

$$\frac{7}{2} \frac{14y}{1} = \frac{2}{2} \frac{\sqrt{(y^2)(c)}}{1}$$

نقسم الطرفين على 2
بتربيع الطرفين

$$7y = \sqrt{(y^2)(c)}$$

$$49y^2 = y^2(c) \Rightarrow c = \frac{49y^2}{y^2} = 49$$

$$(جذر الحد الأخير \pm جذر الحد الأول)^2 \Rightarrow y^2 + 14y + 49 = (y + 7)^2$$

تأكّد من فهمك

حل كل مقدار من المقادير التالية كفرق بين مربعين:

1 $x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$

2 $36 - 4x^2 = (6 + 2x)(6 - 2x)$

3 $h^2 - v^2 = (h + v)(h - v)$

4 $9m^2 - 4n^2 = (3m + 2n)(3m - 2n)$

5 $27x^3z - 3xz^3 = 3xz(9x^2 - z^2)$
 $= 3xz(3x + z)(3x - z)$

6 $\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\right)$

الحل

حل كل مقدار من المقادير التالية كمربع كامل:

7 $y^2 - 8y + 16 = (y - 4)^2$

8 $9z^2 - 6z + 1 = (3z - 1)^2$

9 $v^2 + 2\sqrt{3}v + 3 = (v + \sqrt{3})^2$

10 $4h^2 - 20h + 25 = (2h - 5)^2$

الحل

حدد أي مقدار من المقادير التالية يمثل مربعاً كاملاً وحلّه:

11 $x^2 + 18x + 81$

(x) (9)

نستخدم إحدى الأدوات وحسب
إشارة الحد الوسط.

الحد الوسط

$(+2)(x)(9) = +18x$

المقدار مربع كامل

$(\text{جذر الحد الأخير} \pm \text{جذر الحد الأول})^2$

$(x + 9)^2$

+2 أو -2

12 $16 - 14v + v^2$

(4) (v)

نستخدم إحدى الأدوات وحسب
إشارة الحد الوسط.

ليس الحد الوسط

$(-2)(4)(v) = -8v$

المقدار ليس مربع كامل

+2 أو -2

13 $64h^2 - 48h - 9$

الحل

المقدار ليس مربع كامل لأن إشارة الحد الأخير سالبة

14 $3 - 4\sqrt{3}t + 4t^2$

الحل

نستخدم إحدى الأدوات وحسب
إشارة الحد الوسط .

$(\sqrt{3})$

$(2t)$

الحد الوسط

$(-2)(\sqrt{3})(2t) = -4\sqrt{3}t$

المقدار مربع كامل

$(\text{جذر الحد الأخير} \pm \text{جذر الحد الأول})^2$

$(\sqrt{3} - 2t)^2$

اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري $ax^2 + bx + c$ ليصبح مربعاً كاملاً وحلّه:

15 $\dots\dots\dots + 14y + 49$

الحل

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$14y = 2\sqrt{(ay^2)(49)}$ نقسم الطرفين على 2

$7y = \sqrt{(ay^2)(49)}$ بتربيع الطرفين

$49y^2 = (ay^2)(49) \Rightarrow ay^2 = \frac{49y^2}{49}$

$ay^2 = y^2 \Rightarrow y^2 + 14y + 49 = (y + 7)^2$

16 $z^2 + 4z + \dots\dots\dots$

الحل

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$4z = 2\sqrt{(z^2)(C)}$

بتربيع الطرفين

$16z^2 = 4z^2(C) \Rightarrow C = \frac{16z^2}{4z^2} = 4$

$z^2 + 4z + 4 = (z + 2)^2$

18 $4x^2 + 2\sqrt{5}x + \dots\dots\dots$

الحل

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$2\sqrt{5}x = 2\sqrt{(4x^2)(C)}$

بتربيع الطرفين

$20x^2 = 4(4x^2)(C) \Rightarrow 20x^2 = 16x^2(C)$

$C = \frac{20x^2}{16x^2} = \frac{5}{4} \Rightarrow 4x^2 + 2\sqrt{5}x + \frac{5}{4}$

$= \left(2x + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$

17 $3 - \dots\dots\dots + 9x^2$

الحل

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$bx = 2\sqrt{(9x^2)(3)} = 2(3x)(\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}x$

$3 - 6\sqrt{3}x + 9x^2 = (\sqrt{3} - 3x)^2$

تدرب وحل التمرينات

حل كل مقدار من المقادير التالية إلى أبسط صورة:

19 $25 - 4x^2 = (5 + 2x)(5 - 2x)$

الحل

20 $y^2 - 121 = (y + 11)(y - 11)$

21 $12 - 3t^2 = 3(4 - t^2) = 3(2 + t)(2 - t)$

22 $8y^3x - 2x^3y = 2xy(4y^2 - x^2)$
 $= 2xy(2y + x)(2y - x)$

23 $\frac{1}{3}z^5 - \frac{1}{12}z = \frac{1}{12}z(4z^4 - 1)$

الحل

$= \frac{1}{12}z(2z^2 + 1)(\sqrt{2}z + 1)(\sqrt{2}z - 1)$

24 $4x^2 + 20x + 25 = (2x + 5)^2$

25 $16n^2 + 8\sqrt{3}n + 3 = (4n + \sqrt{3})^2$

26 $4t^3 - 12t^2 + 9t = t(4t^2 - 12t + 9)$
 $= t(2t - 3)^2$

حدّد أي مقدار من المقادير التالية يمثل مربعاً كاملاً وحلّه:

27 $4x^2 + 18x + 16$

الحل

$\downarrow \quad \downarrow$
 $(2x) \quad (4)$

نستخدم احدى الاداتين
 وحسب إشارة الحد الوسط .

$(+2)(2x)(4) = +16x$

ليس الحد الوسط

+2 أو **-2**

المقدار ليس مربع كامل

28 $y^2 + 10y + 25$

الحل

$\downarrow \quad \downarrow$
 $(y) \quad (5)$

نستخدم احدى الاداتين وحسب
 إشارة الحد الوسط .

الحد الوسط
 $(+2)(y)(5) = +10y$

المقدار مربع كامل

+2 أو **-2**

$(\text{جذر الحد الأخير} \pm \text{جذر الحد الأول})^2$

$(y + 5)^2$

29 $4v^2 + 4v + 4$

الحل

$\downarrow \quad \downarrow$
 $(7) \quad (v)$

نستخدم احدى الاداتين
 وحسب إشارة الحد الوسط .

$(-2)(2v)(2) = -8v$

ليس الحد الوسط

+2 أو **-2**

المقدار ليس مربع كامل

30 $2h^2 - 12h - 18$

الحل

المقدار ليس مربع كامل لأن إشارة الحد الأخير سالبة
 وهذا لايجوز حيث لا يوجد جذر للعدد السالب

اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري $ax^2 + bx + c$ ليصبح مربعاً كاملاً وحله:

31 $y^2 + \dots + 36$

الحل

$$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$$

$$by = 2\sqrt{(y^2)(36)} = 2(y)(6) = 12y$$

$$y^2 + 12y + 36 = (y + 6)^2$$

32 $25 - 20x + \dots$

الحل

$$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$$

$$20x = 2\sqrt{(ax^2)(25)} \text{ بتربيع الطرفين}$$

$$400x^2 = 4(ax^2)(25) \Rightarrow 400x^2 = 100(ax^2)$$

$$ax^2 = \frac{400x^2}{100} = 4x^2 \Rightarrow 25 - 20x + 4x^2 = (5 - 2x)^2$$

33 $81 + 18Z + \dots$

الحل

$$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$$

$$18Z = 2\sqrt{(aZ^2)(81)}$$

بتربيع الطرفين

$$324Z^2 = 4(aZ^2)(81) \Rightarrow 324Z^2 = 324(aZ^2)$$

$$aZ^2 = \frac{324Z^2}{324} = Z^2 \Rightarrow 81 + 18Z + Z^2 = (9 + Z)^2$$

34 $5 - \dots + 16x^2$

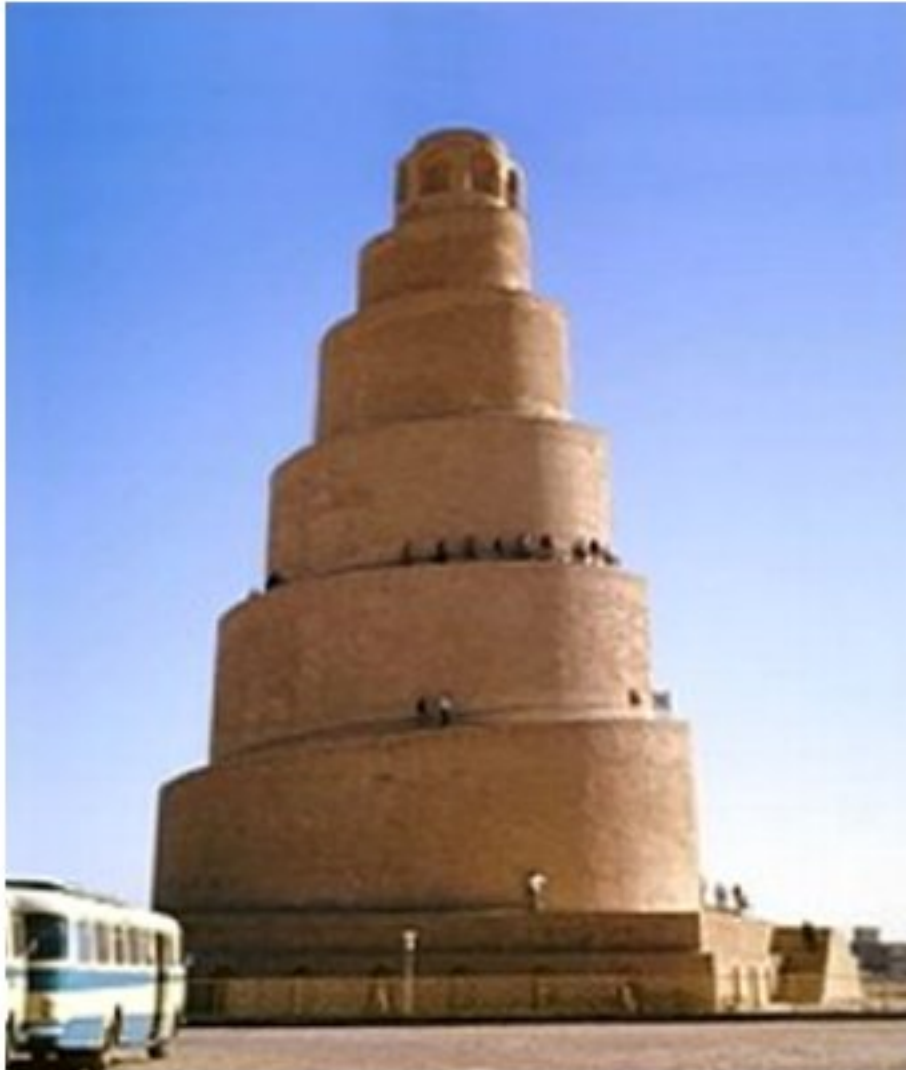
الحل

$$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$$

$$bx = 2\sqrt{(16x^2)(5)} = 2(4x)(\sqrt{5}) = 8\sqrt{5}x$$

$$5 - 8\sqrt{5}x + 16x^2 = (\sqrt{5} - 4x)^2$$

تدرب وحل مسائل حياتية



35 **المنذنة الملوية:** تقع منارة المنذنة الملوية في مدينة سامراء

العراقية، وتعد إحدى معالم العراق المميزة بسبب شكلها الفريد، فهي

إحدى آثار العراق القديمة المشهورة التي تعود لعصر حكم الدولة

العباسية، وترتكز على قاعدة مربعة مساحتها $x^2 - 8x + 16$ متراً

مربعاً. ما طول ضلع القاعدة التي تستند عليها الملوية بدلالة x ؟

الحل

$$A = x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2 \text{ طول ضلع القاعدة}$$



36 **مزرعة أبقار:** لدى سعد مزرعة أبقار مربعة الشكل طول ضلعها x متر، وسَّعَهَا لتصبح مستطيلة الشكل فأصبحت مساحة المزرعة $x^2 - 81$ متراً مربعاً، ما طول المزرعة وعرضها بعد التوسعة بدلالة x ؟

الحل تحليل الفرق بين مربعين

$$A = x^2 - 81 = (x + 9)(x - 9)$$

طول المزرعة $(x + 9)$ ، عرضها $(x - 9)$



37 **لوحة فنية:** رسم بشار لوحة فنية تمثل منطقة الأهوار في جنوب العراق، فكان المقدار $4x^2 - 8x + 9$ سنتمترات مربعة يمثل مساحة اللوحة الفنية. أيمثل مقدار مساحة اللوحة الفنية مربعاً كاملاً أم لا ؟

$$4x^2 - 8x + 9$$

نستخدم احدي الاداتين وحسب
إشارة الحد الوسط .

$$(2x) \quad (3)$$

$$(-2)(2x)(3) = -12x \text{ ليس الحد الوسط}$$

الحل: المقدار ليس مربع كامل

فَكَّرْ

38 **تحذّر:** هل المقدار التالي يمثل مربعاً كاملاً أم لا؟ معللاً إجابتك.

$$\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{16}$$

$(\text{جنر الحد الأول} \pm \text{جنر الحد الأخير})^2$

$$\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}\right)^2$$

المقدار مربع كامل

$$\left(\frac{1}{3}x\right) \quad \left(\frac{1}{4}\right)$$

نستخدم احدي الاداتين وحسب
إشارة الحد الوسط .

$$+2 \text{ أو } -2$$

$$(-2)\left(\frac{1}{3}x\right)\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{6}x \text{ الحد الوسط}$$

39

أصحّ الخطأ: قالت منتهى إنّ المقدار $(2x+1)(2x-1)$ هو تحليل للمربع الكامل $4x^2 - 4x + 1$.
حدّد خطأ منتهى وصحّحه.

الحل

المقدار: $(2x+1)(2x-1)$ هو ليس تحليل للمربع الكامل $4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$

40

حسن عددي: أيّمّثل المقدار $9x^2 + 12x - 4$ مربعاً كاملاً أم لا ؟ وضّح إجابتك.

الحل

المقدار لا يمثّل مربعاً كاملاً لأن إشارة الحد الأخير (الثالث) سالبة.

أكتب

تحليل للمقدار $4x^2 - 8x + 4$

الحل

$$4x^2 - 8x + 4 = (2x)^2 - 2(x \times 4) + (2)^2 = (2x - 2)^2$$

امسح الرمز للوصول الى
الجزء الأول لهذا الدرس



8

الدرس
[2-4]

تحليل المقدار الجبري من ثلاثة حدود بالتجربة

[2-4-1] تحليل المقدار الجبري x^2+bx+c

طريقة حل المقدار الجبري من ثلاثة حدود بالتجربة:

- (1) تتكون من قوسين صغيرين نضع إشارة الحد الثاني في القوس الأول ونضرب إشارة الحد الثاني في إشارة الحد الثالث ونضعها في القوس الثاني.
- (2) نحلل الحد الأول الى حاصل ضرب حدين متشابهين ووضع كل حد في بداية كل قوس.
- (3) نحلل الحد الأخير (الثالث) الى حاصل ضرب عددين حيث اذا كانت الاشارات متشابهة نجمع أما اذا كانت الاشارات مختلفة نطرح.
- (4) للتأكد من صحة الحل يجب ان يكون حاصل ضرب الوسطين $\pm$ حاصل ضرب الطرفين
= الحد الوسط

تعلم

الثور المجنح الآشوري (شيدو لاماسو) هكذا يرد اسمه في الكتابات الآشورية، وأصل كلمة لاماسو هو من لامو و Lammu السومرية ويوجد تمثال له في متحف مدينة الموصل.
ما أبعاد اللوحة الفنية للثور المجنح التي مساحتها $x^2 + 10x + 21$ سنتماً مربعاً؟

مثال (1)

$$x^2 + 10x + 21 = (x + 3)(x + 7)$$

الحد لوسط : $+ 7x + 3x = +10x$

الحل

مثال (2)

حلل المقدار الجبري: $y^2 + y - 12$

حاصل ضرب الطرفين $+ 4y$

$$y^2 + y - 12 = (y - 3)(y + 4)$$

حاصل ضرب الوسطين $- 3x$

بالجمع

الحد الأوسط $+ y$

الحل

مثال (3)

حلل المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

الحل

i) $z^2 - z - 6 = (z - 3)(z + 2)$

الحد الأوسط $2z - 3z = - z$

ii) $x^2 - 9x + 18 = (x - 3)(x - 6)$

الحد الأوسط $- 6x - 3x = - 9x$

iii) $y^2 + 6y - 27 = (y + 9)(y - 3)$

الحد الأوسط $- 3y + 9y = + 6y$

iv) $x^2 - xy - 20y^2 = (x - 5y)(x + 4y)$

الحد الأوسط $+ 4xy - 5xy = - xy$

v) $15 - 8z + z^2 = (5 - z)(3 - z)$

الحد الأوسط $- 5z - 3z = - 8z$

[2-4-2] تحليل المقدار الجبري ax^2+bx+c وإن $a \neq 0$

مثال (4)

حل كل مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

الحل

[1] $6x^2 + 17x + 7 = (2x + 1)(3x + 7)$

القريب X القريب
البعيد X البعيد

لأختبار الحل نضرب الطرفين و الوسطين
و نجمع أو نطرح حسب الإشارة

[2] $7y^2 - 26y - 8 = (y - 4)(7y + 2)$

أمسح الرمز للوصول للجزء الثاني
لهذا الدرس

[3] $3z^2 - 17z + 10 = (3z - 2)(z - 5)$

[4] $4v^2 - v - 3 = (v - 1)(4v + 3)$

[5] $15 + 11h + 2h^2 = (5 + 2h)(3 + h)$

[6] $3x^2 - 10xy + 3y^2 = (3x - y)(x - 3y)$

[7] $6x^2 - 51x + 63 = 3(2x^2 - 17x + 21) = 3(x - 7)(2x - 3)$



مثال (5) حل كل مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

i) $3z^2 - 17z + 10 = (3z - 2)(z - 5)$

ii) $4v^2 - v - 3 = (4v + 3)(v - 1)$

iii) $15 + 11h + 2h^2 = (5 + 2h)(3 + h)$

iv) $6x^2 - 51x + 63 = 3(2x^2 - 17x + 21) = 3(x - 7)(2x - 3)$

v) $3x^2 - 10xy + 3y^2 = (3x - y)(x - 3y)$

الحل الحد الأوسط $-15z - 2z = -17z$

الحد الأوسط $-4v + 3v = -v$

الحد الأوسط $+5h + 6h = 11h$

الحد الأوسط $-3x - 14x = -17x$

الحد الأوسط $-9xy - xy = -10xy$

تأكد من فهمك

حل كل مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

1 $x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4)$

2 $1 - 2Z + Z^2 = (1 - Z)(1 - Z)$

3 $x^2 - 13x + 12 = (x - 1)(x - 12)$

4 $3 + 2Z - Z^2 = (1 + Z)(3 - Z)$

5 $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$

6 $15 - 8Z + Z^2 = (5 - Z)(3 - Z)$

حل كل مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

7 $2x^2 + 5x + 3 = (2x + 3)(x + 1)$

8 $3y^2 - 14y + 8 = (3y - 2)(y - 4)$

9 $3x^2 - 10x + 8 = (3x - 4)(x - 2)$

10 $8 - 25Z + 3Z^2 = (8 - Z)(1 - 3Z)$

11 $5y^2 - y - 6 = (5y - 6)(y + 1)$

12 $6 + 29Z - 5Z^2 = (1 + 5Z)(6 - Z)$

13 $x^2 - 9xy + 20y^2 = (x - 4y)(x - 5y)$

14 $3y^2 - 19yx - 14x^2 = (y - 7x)(3y + 2x)$

ضع الإشارات بين الحدود في الأقواس ليكون تحليل المقدار الجبري صحيحا:

15 $x^2 + 9x + 20 = (x + 5)(x + 4)$

16 $6x^2 - 7x + 2 = (2x - 1)(3x - 2)$

17 $y^2 - 12y + 20 = (y - 2)(y - 10)$

18 $20 - 7y - 3y^2 = (5 - 3y)(4 + y)$

تدرب وحل التمرينات

حل كل مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

19 $x^2 + 9x + 14 = (x + 7)(x + 2)$

20 $y^2 - 5y + 6 = (y - 3)(y - 2)$

21 $3 + 2Z - Z^2 = (1 + Z)(3 - Z)$ الحل

22 $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$

حل كل مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

23 $2x^2 + 12x - 14 = 2(x^2 + 6x - 7)$
 $= 2(x + 7)(x - 1)$

24 $4y^2 - 6y + 2 = 2(2y^2 - 3y + 1)$
 $= 2(2y - 1)(y - 1)$

25 $10 + 9Z - 9Z^2 = (2 + 3Z)(5 - 3Z)$

26 $2x^2 + 3x + 1 = (2x + 1)(x + 1)$ الحل

27 $13y^2 - 11y - 2 = (y - 1)(13y + 2)$

28 $30x^2 - xy - y^2 = (5x - y)(6x + y)$

ضع الإشارات بين الحدود في الأقواس ليكون تحليل المقدار الجبري صحيحاً:

29 $x^2 + x - 20 = (x - 4)(x + 5)$

30 $35 + 3y - 2y^2 = (5 - y)(7 + 2y)$ الحل

تدرب وحل مسائل حياتية



31 **قلعة الأخضر:** هي قلعة أثرية تقع في محافظة كربلاء وسط

العراق ولا تزال أطلال القلعة قائمة إلى يومنا هذا، الأخضر من الحصون الدفاعية الفريدة من نوعها ويحيط به سور عظيم مستطيل الشكل. ما أبعاد السور الخارجية بدلالة x ، إذا كانت مساحة القلعة مع السور يمثلها المقدار $6x^2 - 39x + 60$ متراً مربعاً؟

الحل أبعاد السور هي $(x - 4)$ ، $(2x - 5)$

$$6x^2 - 39x + 60 = 3(2x^2 - 13x + 20) = 3(2x - 5)(x - 4)$$



32 **ألعاب ترفيحية:** تعد أرجوحة ديسكفري من الألعاب الخطرة في

مدينة الألعاب، ويمثل المقدار $5t^2 + 5t - 30$ مسار أرجوحة ديسكفري في مدينة الألعاب، إذ يمثل زمن الحركة. وتحليل المقدار يساعد على معرفة الوقت الذي تستغرقه أرجوتها في المرة الأولى. حل المقدار. الحل

$$5t^2 + 5t - 30 = 5(t^2 + t - 6) = 5(t + 6)(t - 5)$$



33 مترو الأنفاق: يعد مترو الأنفاق نظام سكك حديد تحت الأرض تسير عليه القطارات، وهو أحد وسائل النقل السريعة في المدن الكبيرة وذات الكثافة السكانية العالية، ويتألف كل قطار من عدة عربات، فإذا كان المقدار $14y^2 - 23y + 3$ يمثل مساحة أرضية العربة بالمتر المربع، فما أبعادها بدلالة y ؟ **الحل**

أبعاد العربة هي: $(2y - 3)$, $(7y - 1)$

$$14y^2 - 23y + 3 = (7y - 1)(2y - 3)$$

فكّر

34 تحدّ: حلّ المقدار الجبري التالي إلى أبسط صورة:

$$4x^3 + 4x^2 - 9x - 9 = (4x^3 + 4x^2) + (-9x - 9) = 4x^2(x + 1) - 9(x + 1) \\ = (x + 1)(4x^2 - 9) = (x + 1)(2x + 3)(2x - 3)$$

الحل

35 أصحّ الخطأ: حلّ سعد المقدار $6z^2 - 16z - 6$ كما يأتي: **اكتشف خطأ سعد وصحّحه.**

$$6Z^2 - 16Z - 6 = (2Z - 6)(3Z + 1) \quad \text{خطأ الحد الوسط } +18Z - 2Z = +16Z \neq -16Z \\ \text{الحد الوسط : } +2Z - 18Z = -16Z$$

الحل

36 حسّ عدديّ: أيّمكن تحديد ما إذا كانت إشارات القوسين في تحليل المقدار $x^2 - 12x + 35$ مختلفة أم متشابهة ومن دون تحليل المقدار؟ وضّح إجابتك.

الحل تكون إشارة القوسين متشابهة (سالبة) حيث نضع إشارة الحد الثاني (-)

في القوس الأول ونضرب إشارة الحد الثاني في إشارة الحد الثالث ونضعها في القوس الثالث (-)

الإشارات بين الحدود في الأقواس ليكون تحليل المقدار الجبري صحيحاً:

أكتب

$$6z^2 + 5z - 56 = (3z \dots 8)(2z \dots 7)$$

الحل

$$6Z^2 + 5Z - 56 = (3Z - 8)(2Z + 7) \quad \text{الحد الوسط : } +21Z - 16Z = +5Z$$

امسح الرمز للوصول الى
الجزء الأول لهذا الدرس



10

تحليل المقدار الجبري مجموع مكعبين أو الفرق بين مكعبين

الدرس
[2-5]

[2-5-1] تحليل المقدار الجبري مجموع مكعبين

هو تحليل المقدار الجبري المؤلف من حدين والذي على صورة مجموع مكعبين:

(مربع الثاني + الأول × الثاني - مربع الأول) (جذر الثاني + جذر الأول)

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \quad \text{توضيح}$$

تعلم

مثال (1)

$$V = L^3$$

حجم المكعب

حرفه 4dcm ؟

$$v_1 + v_2 = 3^3 + 4^3 = (3 + 4)(3^2 - 3 \times 4 + 4^2) \\ = (7)(9 - 12 + 16) = (7)(13) = 91 \text{ cm}^3$$

الحل

حل كل مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

مثال (2)

$$[1] \quad x^3 + 5^3 = (x + 5)(x^2 - 5x + 5^2) = (x + 5)(x^2 - 5x + 25)$$

$$[2] \quad y^3 + 8 = y^3 + 2^3 = (y + 2)(y^2 - 2y + 4)$$

$$[3] \quad 8z^3 + 27 = 2^3z^3 + 3^3 = (2z + 3)(4z^2 - 6z + 9)$$

$$[4] \quad \frac{1}{a^3} + \frac{1}{64} = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{4^3} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{4a} + \frac{1}{16}\right)$$

$$[5] \quad \frac{27}{x^3} + \frac{8}{125} = \frac{3^3}{x^3} + \frac{2^3}{5^3} = \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{5}\right)\left(\frac{9}{x^2} - \frac{6}{5x} + \frac{4}{25}\right)$$

$$[6] \quad \frac{1}{2}y^3 + 4 = \frac{1}{2}(t^3 + 8) = \frac{1}{2}(t^3 + 2^3) = \frac{1}{2}(t + 2)(t^2 - 2t + 4)$$

$$[7] \quad 0.125 + v^3 = (0.5)^3 + v^3 = (0.5 + v)(0.25 - 0.5v + v^2)$$



امسح الرمز للوصول الى
الجزء الثاني لهذا الدرس

[2-5-2] تحليل المقدار الجبري فرق بين مكعبين

(مربع الثاني + الأول × الثاني + مربع الأول) (جذر الثاني - جذر الأول)

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

توضيح

11

مثال (3)

حوض مكعب الشكل طول ضلعه 1m مملوء بالماء أفرغ منه في حوض اخر اكبر منه مكعب الشكل طول ضلعه 1.1m ما كمية الماء الإضافية التي نحتاج اليها ليمتلئ الحوض الكبير؟

$$v = L^3 \quad \text{حجم المكعب}$$

الحل

كمية الماء الإضافية اللازمة = حجم المكعب الكبير - حجم المكعب الصغير

$$\begin{aligned} v_1 - v_2 &= (1.1)^3 - 1^3 = (1.1 - 1)[(1.1)^2 - 1.1 \times 1 + 1^2] \\ &= (0.1)(1.21 + 1.1 + 1) = (0.1)(3.31) = 0.331m^3 \end{aligned}$$

طريقة 1

$$v_1 - v_2 = (1.1)^3 - 1^3 = 1.331 - 1 = 0.331m^3$$

طريقة 2

مثال (4) حل كل مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

مثال (4)

$$[1] \quad x^3 - 3^3 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$$

$$[2] \quad y^3 - 64 = y^3 - 4^3 = (y - 4)(y^2 + 4y + 16)$$

$$[3] \quad 27Z^3 - 8 = 3^3Z^3 - 2^3 = (3Z - 2)(9Z^2 + 6Z + 4)$$

$$[4] \quad \frac{1}{b^3} - \frac{1}{125} = \frac{1}{b^3} - \frac{1}{5^3} = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{5b} + \frac{1}{25}\right)$$

$$[5] \quad \frac{1}{3}t^3 - 9 = \frac{1}{3}(t^3 - 27) = \frac{1}{3}(t^3 - 3^3) = \frac{1}{3}(t - 3)(t^2 + 3t + 9)$$

$$[6] \quad 0.216 - n^3 = (0.6)^3 - n^3 = (0.6 - n)(0.36 + 0.6n + n^2)$$

$$[7] \quad 1 - 0.125Z^3 = 1^3 - (0.5)^3Z^3 = (1 - 0.5Z)(1 + 0.5Z + 0.25Z^2)$$

$$[8] \quad 32 - \frac{1}{2}m^3 = \frac{1}{2}(64 - m^3) = \frac{1}{2}(4^3 - m^3) = \frac{1}{2}(4 - m)(16 + 4m + m^2)$$

تأكد من فهمك

حل كل مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

1 $y^3 + 216 = (y + 6)(y^2 - 6y + 36)$

الحل

2 $x^3 + z^3 = (x + z)(x^2 - xz + z^2)$

3 $125 + 8z^3 = 5^3 + 2^3z^3 = (5 + 2z)(25 - 10z + 4z^2)$

4 $\frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{8} = \frac{1}{3^3}x^3 + \frac{1}{2^3} = \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{4}\right)$

5 $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{64} = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{4^3} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{4a} + \frac{1}{16}\right)$

6 $\frac{1}{3}t^3 + 9 = \frac{1}{3}(t^3 + 27) = \frac{1}{3}(t^3 + 3^3) = \frac{1}{3}(t + 3)(t^2 - 3t + 9)$

7 $0.125 + v^3 = (0.5)^3 + v^3 = (0.5 + v)(0.25 - 0.5v + v^2)$

8 $1 + 0.008z^3 = 1^3 + (0.2)^3z^3 = (1 + 0.2z)(1 - 0.2z + 0.04z^2)$

حل كل مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

9 $a^3 - 8^3 = (a - 8)(a^2 + 8a + 64)$

الحل

10 $8y^3 - 64 = 8(y^3 - 8) = 8(y^3 - 2^3) = 8(y - 2)(y^2 + 2y + 4)$

11 $\frac{1}{c^3} - \frac{1}{8} = \frac{1}{c^3} - \frac{1}{2^3} = \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{2c} + \frac{1}{4}\right)$

12 $\frac{1}{2}v^3 - 4 = \frac{1}{2}(v^3 - 8) = \frac{1}{2}(v^3 - 2^3) = \frac{1}{2}(v - 2)(v^2 + 2v + 4)$

13 $0.125 - m^3 = (0.5)^3 - m^3 = (0.5 - m)(0.25 + 0.5m + m^2)$

14 $25 - \frac{1}{5}n^3 = \frac{1}{5}(125 - n^3) = \frac{1}{5}(5^3 - n^3) = \frac{1}{5}(5 - n)(25 + 5n + n^2)$

15 $3b^3 - 81 = 3(b^3 - 27) = 3(b^3 - 3^3) = 3(b - 3)(b^2 + 3b + 9)$

16 $0.216v^3 - 0.008t^3 = (0.6)^3v^3 - (0.2)^3t^3$
 $= (0.6v - 0.2t)(0.36v^2 + 0.12vt + 0.04t^2)$

تدرب وحل التمرينات

حل كل مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

17 $6^3 + x^3 = (6 + x)(6 - 6x + x^2)$

الحل

18 $27 + 64x^3 = 3^3 + 4^3x^3 = (3 + 4x)(9 - 12x + 16x^2)$

19 $125y^3 + 1 = 5^3y^3 + 1^3 = (5y + 1)(25y^2 - 5y + 1)$

20 $\frac{1}{64} + \frac{8}{125}y^3 = \frac{1}{4^3} + \frac{2^3}{5^3}y^3 = \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{5}y\right)\left(\frac{1}{16} - \frac{2}{20}y + \frac{4}{25}y^2\right)$

21 $\frac{1}{5}v^3 + 25 = \frac{1}{5}(v^3 + 125) = \frac{1}{5}(v^3 + 5^3) = \frac{1}{5}(v + 5)(v^2 - 5v + 25)$

حل كل مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

22 $y^3 - 64 = y^3 - 4^3 = (y - 4)(y^2 + 4y + 16)$

الحل

23 $\frac{1}{x^3} - \frac{27}{8} = \frac{1}{x^3} - \frac{3^3}{2^3} = \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{2x} + \frac{9}{4}\right)$

24 $9 - \frac{1}{3}n^3 = \frac{1}{3}(27 - n^3) = \frac{1}{3}(3^3 - n^3) = \frac{1}{3}(3 - n)(9 + 3n + n^2)$

25 $25c^3 - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}(125c^3 - 1) = \frac{1}{5}(5^3c^3 - 1^3) = \frac{1}{5}(5c - 1)(25c^2 + 5c + 1)$

26 $0.001x^3 - 0.008y^3 = (0.1)^3x^3 - (0.2)^3y^3$
 $= (0.1x - 0.2y)(0.01x^2 + 0.02xy + 0.04y^2)$

أمسح للرمز للوصول الى هذه المسألة
و مسائل أخرى



15

تدرب وحل مسائل حياتية

27 مكتبة: مكتبة مدينة شتوتغارت هي واحدة من أجمل المكتبات في العالم وأفخمها وتقع في ألمانيا، كما أنها من أكثر المكتبات تماشياً مع متطلبات التعليم الحديثة. بناية المكتبة على شكل مكعب طول حرفه $\frac{1}{2}y^3 - 13\frac{1}{2}$ متر. حلّ المقدار الذي يمثل طول حرفه.

الحل

$$\frac{1}{2}y^3 - 13\frac{1}{2} = \frac{1}{2}y^3 - \frac{27}{2} = \frac{1}{2}(y^3 - 27) = \frac{1}{2}(y^3 - 3^3) = \frac{1}{2}(y - 3)(y^2 + 3y + 9)$$



28 حوض سمك: حوض سمك الزينة حجمه $25x^3$ متراً مكعباً، وُضِعَ في داخله حجر مكعب الشكل حجمه $\frac{1}{5}$ متر مكعب، مُلئَ بالماء كاملاً. اكتب المقدار الذي يمثل حجم الماء ثم حلّه؟

الحل

$$25x^3 + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}(125x^3 + 1) = \frac{1}{5}(5^3x^3 + 1^3) = \frac{1}{5}(5x + 1)(25x^2 - 5x + 1)$$



29 سكن: بدأت المنازل تأخذ أشكالاً مختلفة في التصميم مع تطور هندسة العمارة فصُمِّمَتْ هذه المنازل على شكل مكعبات. فإذا كان حجم المنزل الأول $\frac{8}{a^3}$ متر مكعب، وحجم المنزل الثاني $\frac{27}{b^3}$ متر مكعب. اكتب حجم المنزلين معاً ثم حلّ المقدار.

الحل

$$v_1 + v_2 = \frac{8}{a^3} + \frac{27}{b^3} = \frac{2^3}{a^3} + \frac{3^3}{b^3} = \left(\frac{2}{a} + \frac{3}{b}\right)\left(\frac{4}{a^2} - \frac{6}{ab} + \frac{9}{b^2}\right)$$

فكّر

30 تحدّ: حل المقدار الجبري التالي إلى أبسط صورة: $0.002z^3 - 0.016y^3$

$$0.002Z^3 - 0.016y^3 = 0.002(Z^3 - 8y^3) = 0.002(Z^3 - (2)^3y^3) \\ = 0.002(Z - 2y)(Z^2 + 2Zy + 4y^2)$$

الحل

31 **أصحّ الخطأ:** حلّلت بشرى المقدار $8v^3 - 0.001$ كما يأتي:

$$8v^3 - 0.001 = (2v + 0.1)(4v^2 - 0.4v + 0.01)$$

اكتشف خطأ بشرى وصحّحه.

الحل

$$8v^3 - 0.001 = 2^3v^3 - (0.1)^3 = (2v - 0.1)(4v^2 + 0.2v + 0.01)$$

32 **حسّ عدديّ:** هل يمكن جمع العددين 8 ، 27 بطريقة تحليل مجموع مكعبين؟ وضّح إجابتك.

الحل

$$8 + 27 = 2^3 + 3^3 = (2 + 3)(4 - 6 + 9) = (5)(7) = 35$$

أكتب

الإشارات بين الحدود في الأقواس ليكون تحليل المقدار الجبري صحيحاً:

$$125 - x^3 = (5 \dots x)(25 \dots 5x \dots x^2)$$

الحل

$$125 - x^3 = (5 - x)(25 + 5x + x^2)$$

امسح الرمز للوصول الى
الجزء الأول لهذا الدرس



12

تبسيط المقادير الجبرية النسبية

الدرس
[2-6]

[2-6-1] تبسيط ضرب المقادير الجبرية النسبية وقسمتها

ملاحظة:

- 1) نحل كل حدودية بطرق التحليل السابقة للبسط والمقام.
- 2) اذا وجدت علامة القسمة (÷) نبدل القسمة الى ضرب (×) وقلب الحد ما بعد القسمة.
- 3) نختصر الحدود المتشابهة بين البسط والمقام.
- 4) نضرب البسط في البسط والمقام في المقام.

تعلم

اشترى حسن مجموعة من باقات الزهور بمبلغ $x^2 - x - 6$ دينار، فكانت كلفة باقة الزهور الواحدة عليه $2x - 6$ دينار. اكتب نسبة ثمن الباقة الواحدة إلى الثمن الكلي لباقات الزهور وبأبسط صورة.

مثال (1)

الحل

$$\frac{\text{ثمن باقة الزهور}}{\text{ثمن الباقات الكلية للزهور}} = \frac{2x - 6}{x^2 - x - 6} = \frac{2(x - 3)}{(x - 3)(x + 2)}$$

حل البسط والمقام

$$= \frac{2(x - 3)}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{2}{x + 2}$$

بقسمة كل من البسط والمقام على العامل المشترك

مثال (2)

أكتب كل مقدار من المقادير التالية بأبسط صورة:

الحل

$$[1] \quad \frac{y^2 - 4}{y^2 - 4y + 4} = \frac{(y + 2)(y - 2)}{(y - 2)(y - 2)} = \frac{y + 2}{y - 2}$$

$$[2] \quad \frac{5Z + 10}{Z - 3} \times \frac{Z^3 - 27}{Z^2 + 6Z + 8} = \frac{5(Z + 2)}{Z - 3} \times \frac{(Z - 3)(Z^2 + 2Z + 9)}{(Z + 2)(Z + 4)} = \frac{5(Z^2 + 3Z + 9)}{Z + 4}$$

$$[3] \quad \frac{16 - x^2}{3x + 5} \times \frac{3x^2 + 2x - 5}{x^2 + 3x - 4} = \frac{(4 + x)(4 - x)}{3x + 5} \times \frac{(3x + 5)(x - 1)}{(x + 4)(x - 1)} = 4 - x$$

$$[4] \quad \frac{8 + t^3}{4 - 2t + t^2} \div \frac{(2 + t)^3}{t^2 + 9t + 14} = \frac{8 + t^3}{4 - 2t + t^2} \times \frac{t^2 + 9t + 14}{(2 + t)^3}$$

$$= \frac{(2 + t)(4 - 2t + t^2)}{4 - 2t + t^2} \times \frac{(t + 2)(t + 7)}{(2 + t)^2(2 + t)} = \frac{t + 7}{2 + t} = \frac{t + 7}{t + 2}$$

امسح الرمز للوصول الى
الجزء الثاني لهذا الدرس



13

[2-6-2] تبسيط جمع المقادير الجبرية النسبية وطرحها

خطوات الحل:

- (1) نحلل البسط والمقام بأحدي طرق التحليل السابقة ونختصر العوامل المتشابهة بين بسط ومقام نفس الحدودية.
- (2) نلاحظ المقامات اذا كانت متشابهة نجري عملية الجمع أو الطرح للبسط وبأخذ احدي المقامات.
- (3) اذا كانت المقامات مختلفة (غير متشابهة) نوحدها ذلك بأخذ المضاعف المشترك الأصغر للمقامات وبدون تكرار واستخراج للمقامات وبدون تكرار البسط الجديد

$$\frac{y^2}{(y+2)} - \frac{4}{(y+2)} = \frac{y^2 - 4}{(y+2)}$$

$$= \frac{(y+2)(y-2)}{(y+2)} = y - 2$$

مثال (3) أكتب المقدار الجبري النسبي بأبسط صورة:

المضاعف المشترك الأصغر (y + 2)

تحليل البسط على صورة فرق بين مربعين
بقسمة كل من البسط والمقام على y + 2

مثال (4) أكتب كل مقدار من المقادير التالية بأبسط صورة:

$$[1] \frac{7x-14}{x^2-4} + \frac{5}{x+2} = \frac{7(x-2)}{(x+2)(x-2)} + \frac{5}{x+2} = \frac{7}{x+2} + \frac{5}{x+2} = \frac{7+5}{x+2} = \frac{12}{x+2}$$

$$[2] \frac{4Z}{2Z-5} - \frac{Z}{Z+3} = \frac{4Z(Z+3) - Z(2Z-5)}{(2Z-5)(Z+3)} = \frac{4Z^2 + 12Z - 2Z^2 + 5Z}{(2Z-5)(Z+3)}$$

$$= \frac{2Z^2 + 17Z}{(2Z-5)(Z+3)} = \frac{Z(2Z+17)}{(2Z-5)(Z+3)}$$

$$[3] \frac{t^2 + 2t + 4}{t^3 - 8} + \frac{12}{3t - 6} = \frac{t^2 + 2t + 4}{(t-2)(t^2 + 2t + 4)} + \frac{12}{3(t-2)} = \frac{1}{t-2} + \frac{4}{t-2} = \frac{5}{t-2}$$

$$[4] \frac{8}{v+4} + \frac{2}{v-4} - \frac{1}{v^2-16} = \frac{8}{v+4} + \frac{2}{v-4} - \frac{1}{(v+4)(v-4)} = \frac{8(v-4) + 2(v+4) - 1}{(v+4)(v-4)}$$

$$= \frac{8v - 32 + 2v + 8 - 1}{(v+4)(v-4)} = \frac{10v - 25}{(v+4)(v-4)} = \frac{5(2v-5)}{(v+4)(v-4)}$$

تأكد من فهمك

أكتب كل مقدار من المقادير التالية بأبسط صورة:

الحل

$$1 \quad \frac{2z^2 - 4z + 2}{z^2 - 7z + 6} = \frac{2(z^2 - 2z + 1)}{(z - 6)(z - 1)} = \frac{2(z - 1)(z - 1)}{(z - 6)(z - 1)} = \frac{2(z - 1)}{z - 6}$$

$$2 \quad \frac{y^3 + 27}{y^3 - 3y^2 + 9y} = \frac{(y + 3)(y^2 - 3y + 9)}{y(y^2 - 3y + 9)} = \frac{y + 3}{y}$$

$$3 \quad \frac{5x + 3}{x + 3} \cdot \frac{x^2 + 5x + 6}{25x^2 - 9} = \frac{5x + 3}{x + 3} \cdot \frac{(x + 2)(x + 3)}{(5x + 3)(5x - 3)} = \frac{x + 2}{5x - 3}$$

$$4 \quad \frac{z^2 + 7z - 8}{z - 1} \cdot \frac{z^2 - 4}{z^2 + 6z - 16} = \frac{(z + 8)(z - 1)}{z - 1} \cdot \frac{(z - 2)(z + 2)}{(z + 8)(z - 2)} = z + 2$$

$$5 \quad \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 4} \times \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 6} = \frac{(x + 3)(x - 3)}{(x - 2)(x - 2)} \times \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{x + 3}{x - 2}$$

$$6 \quad \frac{2y^2 - 2y}{y^2 - 9} \div \frac{y^2 + y - 2}{y^2 + 2y - 3} = \frac{2y(y - 1)}{(y + 3)(y - 3)} \cdot \frac{(y + 3)(y - 1)}{(y + 2)(y - 1)} = \frac{2y(y - 1)}{(y - 3)(y + 2)}$$

أكتب كلَّ مقدار من المقادير التالية بأبسط صورة:

7 $\frac{2}{x^2 - 9} + \frac{3}{x^2 - 4x + 3} = \frac{2}{(x + 3)(x - 3)} + \frac{3}{(x - 3)(x - 1)}$ الحل

$$= \frac{2(x - 1)}{(x + 3)(x - 3)(x - 1)} + \frac{3(x + 3)}{(x + 3)(x - 3)(x - 1)}$$

$$= \frac{2x - 2 + 3x + 9}{(x + 3)(x - 3)(x - 1)} = \frac{5x + 7}{(x + 3)(x - 3)(x - 1)}$$

8 $\frac{2y^3 - 128}{y^3 + 4y^2 + 16y} - \frac{y - 1}{y} = \frac{2(y^3 - 64)}{y(y^2 + 4y + 16)} - \frac{y - 1}{y}$

$$= \frac{2(y - 4)(y^2 + 4y + 16)}{y(y^2 + 4y + 16)} - \frac{y - 1}{y}$$

$$= \frac{2(y - 4)}{y} - \frac{y - 1}{y} = \frac{2y - 8 - y + 1}{y} = \frac{y - 7}{y}$$

9 $\frac{z^2 + z + 1}{z^4 - z} - \frac{z + 3}{z^2 + 2z - 3} = \frac{z^2 + z + 1}{z(z^3 - 1)} - \frac{z + 3}{(z + 3)(z - 1)}$

$$= \frac{z^2 + z + 1}{z(z - 1)(z^2 + z + 1)} - \frac{1}{z - 1}$$

$$= \frac{1}{z(z - 1)} - \frac{1}{z - 1} = \frac{1}{z(z - 1)} - \frac{z}{z(z - 1)}$$

$$= \frac{1 - z}{z(z - 1)} = \frac{-(z - 1)}{z(z - 1)} = \frac{-1}{z}$$

$$10 \quad \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} - 1 = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} - 1 = \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x-1} = \frac{x+1-x+1}{x-1} = \frac{2}{x-1}$$

$$11 \quad \frac{3}{Z-1} + \frac{2}{Z+3} + \frac{8}{Z^2+2Z-3} = \frac{3}{Z-1} + \frac{2}{Z+3} + \frac{8}{(Z+3)(Z-1)} = \frac{3(Z+3) + 2(Z-1) + 8}{(Z+3)(Z-1)} \\ = \frac{3Z+9+2Z-2+8}{(Z+3)(Z-1)} = \frac{5Z+15}{(Z+3)(Z-1)} = \frac{5(Z+3)}{(Z+3)(Z-1)} = \frac{5}{Z-1}$$

$$12 \quad \frac{y-3}{y-1} + \frac{5y-15}{(y-3)^2} - \frac{3y+1}{y^2-4y+3} = \frac{y-3}{y-1} + \frac{5(y-3)}{(y-3)^2} + \frac{3y+1}{(y-1)(y-3)} \\ = \frac{y-3}{y-1} + \frac{5}{y-3} + \frac{3y+1}{(y-1)(y-3)} \\ = \frac{(y-3)(y-3)}{(y-1)(y-3)} + \frac{5(y-1)}{(y-3)(y-1)} - \frac{3y+1}{(y-1)(y-3)} \\ = \frac{y^2-3y-3y+9+5y-5-3y-1}{(y-1)(y-3)} \\ = \frac{y^2-4y+3}{(y-1)(y-3)} = \frac{(y-1)(y-3)}{(y-1)(y-3)} = 1$$

تدرب وحل التمرينات

أكتب كل مقدار من المقادير التالية بأبسط صورة:

$$13 \quad \frac{x+5}{12x} \cdot \frac{6x-30}{x^2-25} = \frac{x+5}{12x} \cdot \frac{6(x-5)}{(x+5)(x-5)} = \frac{6}{12x} = \frac{1}{2x}$$

الحل

$$14 \quad \frac{3-x}{4-2x} \cdot \frac{x^2+x-6}{9-x^2} = \frac{3-x}{2(2-x)} \cdot \frac{(x+3)(x-2)}{(3+x)(3-x)} = \frac{-1}{2}$$

$$15 \quad \frac{y^2-7y}{y^3-27} \div \frac{y^2-49}{y^2+3y+9} = \frac{y(y-7)}{(y-3)(y^2+3y+9)} \cdot \frac{y^2+3y+9}{(y+7)(y-7)} \\ = \frac{y}{(y-3)(y+7)}$$

أكتب كل مقدار من المقادير التالية بأبسط صورة:

$$16 \quad \frac{5}{x^2-36} - \frac{2}{x^2-12x+36} = \frac{5}{(x+6)(x-6)} - \frac{2}{(x-6)^2} \\ = \frac{5(x-6) - 2(x+6)}{(x+6)(x-6)^2} = \frac{5x-30-2x-12}{(x+6)(x-6)^2} \\ = \frac{3x-42}{(x+6)(x-6)^2}$$

الحل

$$17 \quad \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-2} + \frac{4+2x+x^2}{x^3-8} = \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-2} + \frac{4+2x+x^2}{(x-2)(x^2+2x+4)} \\ = \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x-2} = \frac{2}{x-2}$$

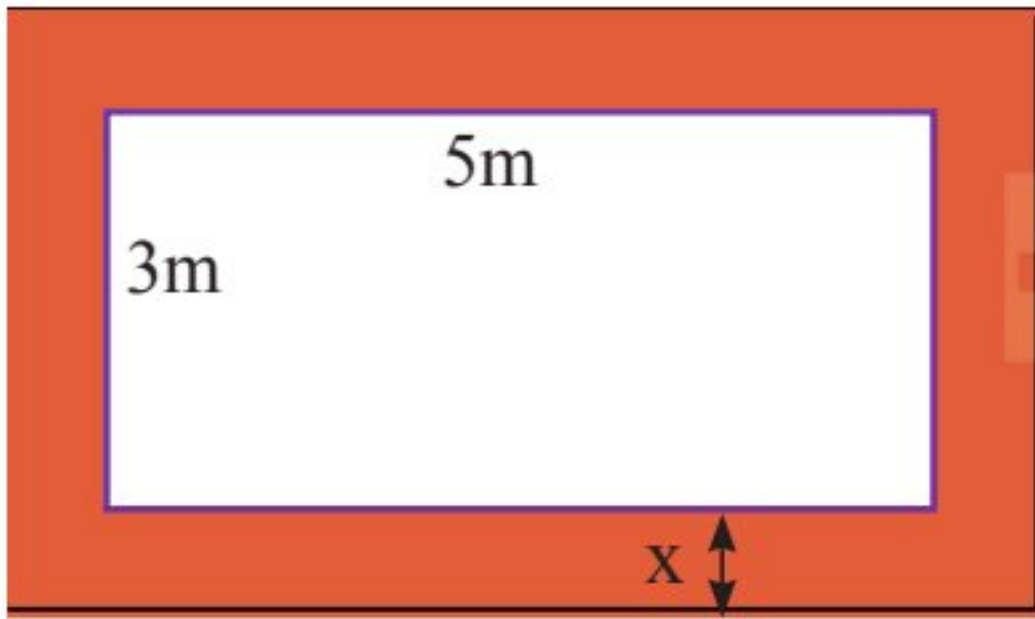
تدرب وحل مسائل حياتية



18 مكتبة: إذا كان المقدار الجبري $x^2 - 4$ يمثل عدد الكتب العلمية في المكتبة، والمقدار الجبري $x^2 + x - 6$ يمثل عدد الكتب الأدبية فيها. اكتب نسبة الكتب العلمية إلى الكتب الأدبية بأبسط صورة.

الحل

$$\frac{\text{عدد الكتب العلمية}}{\text{عدد الكتب الأدبية}} = \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-2)} = \frac{x+2}{x+3}$$



19 هندسة: مستطيل أبعاده 3 ، 5 أمتار وُسِّعَ إلى مستطيل أكبر وذلك بإحاطته بممر عرضه x متر. اكتب المقدار الجبري الذي يمثل مجموع نسبتي طول المستطيل قبل التوسيع إلى طوله بعد التوسيع ونسبة عرض المستطيل قبل التوسيع إلى عرضه بعد التوسيع بأبسط صورة.

الحل

$$\text{طول المستطيل قبل التوسيع} = 3, \quad \text{طول المستطيل بعد التوسيع} = x + 3$$

$$\text{عرض المستطيل قبل التوسيع} = 5, \quad \text{عرض المستطيل بعد التوسيع} = x + 5$$

$$\begin{aligned} \frac{\text{طول المستطيل قبل التوسيع}}{\text{طول المستطيل بعد التوسيع}} + \frac{\text{عرض المستطيل قبل التوسيع}}{\text{عرض المستطيل بعد التوسيع}} &= \frac{3}{x+3} + \frac{5}{x+5} = \frac{3(x+5) + 5(x+3)}{(x+3)(x+5)} \\ &= \frac{3x+15+5x+15}{(x+3)(x+5)} = \frac{8x+30}{(x+3)(x+5)} \end{aligned}$$



20 ألعاب نارية: المقدار الجبري $20 + 15t - 5t^2$ يمثل الارتفاع بالأمتار لقذيفة ألعاب نارية أُطلقت من سطح بناية ارتفاعها 20 متراً، إذ تمثل t زمن وصول القذيفة بالثواني إلى الهدف. والمقدار الجبري $4 + 19t - 5t^2$ يمثل ارتفاع قذيفة أخرى أُطلقت من سطح بناية ارتفاعها 4 أمتار. اكتب نسبة ارتفاع القذيفة الأولى إلى ارتفاع القذيفة الثانية بأبسط صورة.

الحل

$$\frac{\text{ارتفاع القذيفة الأولى}}{\text{ارتفاع القذيفة الثانية}} = \frac{20 + 15t - 5t^2}{4 + 19t - 5t^2} = \frac{5(4 + 3t - t^2)}{(1 + 5t)(4 - t)} = \frac{5(1+t)(4-t)}{(1+5t)(4-t)} = \frac{5(1+t)}{1+5t}$$

فكّر

21 **تحذّر:** بسّط المقدار الجبري التالي إلى أبسط صورة:

$$\frac{y^2 - 5}{2y^3 - 16} \div \frac{y - \sqrt{5}}{2y^2 + 4y + 8} = \frac{(y + \sqrt{5})(y - \sqrt{5})}{2(y^3 - 8)} \div \frac{y - \sqrt{5}}{2(y^2 + 2y + 4)}$$

$$= \frac{(y + \sqrt{5})(y - \sqrt{5})}{2(y - 2)(y^2 + 2y + 4)} \times \frac{2(y^2 + 2y + 4)}{y - \sqrt{5}} = \frac{y + \sqrt{5}}{y - 2}$$

22 **أصحّ الخطأ:** بسّطت سماح المقدار الجبري وكتبت به بأبسط صورة كما يأتي:

$$\frac{z^2 - z - 30}{5 + z} \times \frac{2z + 12}{z^2 - 36} = 1$$

اكتشف خطأ سماح وصحّحه.

الحل

$$\frac{z^2 - z - 30}{5 + z} \times \frac{2z + 12}{z^2 - 36} = \frac{(z - 6)(z + 5)}{5 + z} \times \frac{2(z + 6)}{(z + 6)(z - 6)} = 2$$

23 **حسن عدديّ:** ما ناتج جمع المقدارين الجبريين بدون استعمال الورقة والقلم؟ وضّح إجابتك.

$$\frac{5}{x^2 - 49} + \frac{-4}{(x - 7)(x + 7)}$$

الحل

$$\frac{5}{x^2 - 49} + \frac{-4}{(x - 7)(x + 7)} = \frac{5}{(x + 7)(x - 7)} + \frac{-4}{(x - 7)(x + 7)} = \frac{5 - 4}{(x + 7)(x - 7)} = \frac{1}{(x + 7)(x - 7)}$$

$$\frac{z^2 + z - 6}{2z^2 + 2z - 12} \div \frac{z^2 - 16}{2z + 8}$$

الحل

قيمة المقدار الجبري بأبسط صورة

أكتب

$$\frac{z^2 + z - 6}{2z^2 + 2z - 12} \div \frac{z^2 - 16}{2z + 8} = \frac{z^2 + z - 6}{2z^2 + 2z - 12} \times \frac{2z + 8}{z^2 - 16} = \frac{z^2 + z - 6}{2(z^2 + z - 6)} \times \frac{2(z + 4)}{(z + 4)(z - 4)} = \frac{1}{z - 4}$$

اختبار الفصل

جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين:

1 $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$

الحل

2 $(v - \sqrt{2})(v + \sqrt{2}) = v^2 - (\sqrt{2})^2 = v^2 - 2$

3 $(2 - x)(5 - x) = 10 - 2x - 5x + x^2$
 $= 10 - 7x + x^2$

4 $(2y - 3)(y + 9) = 3y^2 + 27y - 3y - 27$
 $= 3y^2 + 24y - 27$

جد ناتج ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود:

5 $(x + 11)(x^2 - 11x + 121) = x^3 + 11^3 = x^3 - 1331$

الحل

6 $\left(\frac{1}{3} - y\right)\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}y + y^2\right) = \left(\frac{1}{3}\right) - y^3 = \frac{1}{27} - y^3$

7 $(y - 1)^3 = (y - 1)(y - 1)^2 = (y - 1)(y^2 - 2y + 1)$
 $= y^3 - 2y^2 + y - y^2 + 2y - 1 = y^3 - 3y^2 + 3y - 1$

8 $\left(z + \frac{1}{4}\right)^3 = \left(z + \frac{1}{4}\right)\left(z + \frac{1}{4}\right)^2 = \left(z + \frac{1}{4}\right)\left(z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{16}\right)$
 $= z^3 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{16}z + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{8}z + \frac{1}{64} = z^3 + \frac{3}{4}z^2 + \frac{3}{16}z + \frac{1}{64}$

حلل المقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF) وتحقق من صحة الحل:

9 $8x^2 - 12x = 4x(2x - 3)$

$4x(2x - 3) = 8x^2 - 12x$ التحقق:

11 $\sqrt{18}Z^3r + \sqrt{2}(Zr^2 - Zr)$

$= 3\sqrt{2}Z^3r + \sqrt{2}Zr^2 - \sqrt{2}Zr$

$= \sqrt{2}Zr(3Z^2 + r - 1)$

الحل

التحقق:

10 $7y^3 + 14y^2 - 21y = 7y(y^2 + 2y - 3)$

التحقق:

$7y(y^2 + 2y - 3) = 7y^3 + 14y^2 - 21y$

$\sqrt{2}Zr(3Z^2 + r - 1)$

$= 3\sqrt{2}Z^3r + \sqrt{2}Zr^2 - \sqrt{2}Zr$

$= \sqrt{18}Z^3r + \sqrt{2}(Zr^2 - Zr)$

حلل المقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر:

12 $\frac{2}{3}(y + 5) + \frac{1}{3}y(y + 5) = (y + 5)\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}y\right)$

الحل

13 $\sqrt{5}Z(Z^2 - 1) - \sqrt{2}Z^2(Z^2 - 1) = (Z^2 - 1)(\sqrt{5}Z - \sqrt{2}Z^2)$

حلل المقدار باستعمال خاصية التجميع:

14 $6x^4 - 18x^3 + 10x - 30 = (6x^4 - 18x^3) + (10x - 30)$

$= 6x^3(x - 3) + 10(x - 3) = (x - 3)(6x^3 + 10)$

الحل

15 $56 - 8y + 14y^2 - 2y^3 = (56 - 8y) + (14y^2 - 2y^3)$

$= 8(7 - y) + 2y^2(7 - y) = (7 - y)(8 + 2y^2)$

حلل المقدار بالتجميع مع المعكوس:

16 $9x^3 - 6x^2 + 8 - 12x = (9x^3 - 6x^2) + (8 - 12x) = 3x^2(3x - 2) + 4(2 - 3x)$
 $= 3x^2(3x - 2) + 4(-1)(3x - 2) = 3x^2(3x - 2) - 4(3x - 2)$
 $= (3x - 2)(3x^2 - 4)$

الحل

17 $\sqrt{11}z^3 - \sqrt{44}z^2 + 5(2 - z) = (\sqrt{11}z^3 - 2\sqrt{11}z^2) + 5(2 - z)$
 $= \sqrt{11}z^2(z - 1) + 5(-1)(z - 2) = \sqrt{11}z^2(z - 1) - 5(z - 2)$
 $= (z - 2)(\sqrt{11}z^2 - 5)$

حلل كل مقدار جبري من المقادير الآتية:

18 $16 - x^2 = (4 + x)(4 - x)$

22 $81 - 18y + y^2 = (9 - y)^2$

الحل

19 $\frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{27} = \frac{1}{3}\left(z^2 - \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{3}\left(z + \frac{1}{3}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right)$

23 $7z^2 - 36z + 5 = (7z - 1)(z - 5)$

20 $\frac{1}{16}v - \frac{1}{2}v^4 = \frac{1}{2}v\left(\frac{1}{8} - v^3\right) = \frac{1}{2}v\left(\frac{1}{2} - v\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}v + v^2\right)$

21 $8x^3 - \frac{1}{125} = \left(2x - \frac{1}{5}\right)\left(4x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{25}\right)$

حدد أي من المقادير الجبرية التالية يمثل مربعاً كاملاً وحلله:

24 $25x^2 + 30x + 9$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $(5x) \quad (3)$

جذر الأخير x جذر الأول 2 x

الحد الوسط $2 \times (5x)(3) = 30x$

$25x^2 + 30x + 9 = (5x + 3)^2$

25 $49 - 14y + y^2$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $(7) \quad (y)$

جذر الأخير x جذر الأول -2 x

الحد الوسط $-2 \times (7)(y) = -14y$

$49 - 14y + y^2 = (7 + y)^2$

الحل

26 $4v^2 + 4\sqrt{5}v + 5$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $(2v) \quad (\sqrt{5})$

جذر الأخير x جذر الأول 2 x

$4v^2 + 4\sqrt{5}v + 5 = (2v + \sqrt{5})^2$

الحد الوسط $2 \times (2v)(\sqrt{5}) = 4\sqrt{5}v$

الحل

اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري $ax^2 + bx + c$ ليصبح مربعاً كاملاً وحلله:

27 $x^2 + \dots + 81$

الحل

$$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$$

$$bx = 2\sqrt{(x^2)(81)} = 2(x)(9) = 18x$$

$$x^2 + 18x + 81 = (x + 9)^2$$

28 $36 - 12y + \dots$

الحل

$$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$$

$$\frac{12y}{2} = \frac{2\sqrt{(ay^2)(36)}}{2} \quad \text{بقسمة الطرفين على 2}$$

$$6y = \sqrt{(ay^2)(36)} \quad \text{بترتيب الطرفين}$$

$$36y^2 = (ay^2)(36) \Rightarrow ay^2 = \frac{36y^2}{36}$$

$$ay^2 = y^2 \Rightarrow 36 - 12y + y^2 = (6 - y)^2$$

29 $7 - \dots + 4Z^2$

الحل

$$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$$

$$bZ = 2\sqrt{(4Z^2)(7)} = 2(2Z)(\sqrt{7}) = 4\sqrt{7}Z$$

$$7 - 4\sqrt{7}Z + 4Z^2 = (\sqrt{7} - 2Z)^2$$

حل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية:

30 $x^2 + 7x + 10 = (x + 5)(x + 2)$

31 $x^2 - 5\sqrt{3}x + 12 = (x - 4\sqrt{3})(x - \sqrt{3})$

32 $2v^2 + 9v + 7 = (2v + 7)(v + 1)$

33 $32 - 16x + 2x^2 = 2(16 - 8x + x^2)$
 $= 2(4 - x)(4 - x)$

34 $\frac{1}{4}y^2 - 2y + 3 = \frac{1}{4}(y^2 - 8y + 12)$
 $= \frac{1}{4}(y - 2)(y - 6)$

35 $12 - 7\sqrt{2}v + 2v^2$
 $= (3\sqrt{2} - v)(4\sqrt{2} - 2v)$

36 $8 + 27x^3 = 2^3 + 3^3x^3$
 $= (2 + 3x)(4 - 6x + 9x^2)$

37 $125y^3 - 1 = 5^3y^3 - 1^3$
 $= (5y - 1)(25y^2 + 5y + 1)$

38 $\frac{1}{v^3} - \frac{8}{27} = \frac{1^3}{v^3} - \frac{2^3}{3^3}$
 $= \left(\frac{1}{v} - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{v^2} + \frac{2}{3v} + \frac{4}{9}\right)$

39 $1 + 0.125y^3 = 1^3 + (0.5)^3y^3$
 $= (1 + 0.5y)(1 - 0.5y + 0.25y^2)$

40 $z^3 - 0.027 = z^3 - (0.3)^3$
 $= (z - 0.3)(z^2 + 0.3z + 0.09)$

41 $3 - \frac{1}{9}v^3 = \frac{1}{9}(27 - v^3) = \frac{1}{9}(3^3 - v^3)$
 $= \frac{1}{9}(3 - v)(9 + 3v + v^2)$

اكتب كل مقدار من المقادير التالية على أبسط صورة:

$$42 \quad \frac{27 - 8Z^3}{4Z^2 - 9} \div \frac{9 + 6Z + 4Z^2}{9 + 6Z} = \frac{27 - 8Z^3}{4Z^2 - 9} \times \frac{9 + 6Z}{9 + 6Z + 4Z^2}$$

$$= \frac{(3-2Z)(9+6Z+4Z^2)}{(2Z+3)(2Z-3)} \times \frac{3(3+2Z)}{9+6Z+4Z^2} = \frac{-3(2Z-3)}{(2Z-3)} = -3$$

$$43 \quad \frac{7}{x^2 - 25} - \frac{6}{x^2 + 10x + 25} = \frac{7}{(x+5)(x-5)} - \frac{6}{(x+5)^2} = \frac{7(x+5) - 6(x-5)}{(x-5)(x+5)^2}$$

$$= \frac{7x + 35 - 6x + 30}{(x-5)(x+5)^2} = \frac{x + 65}{(x-5)(x+5)^2}$$

$$44 \quad \frac{y^2-1}{1-y^3} + \frac{1+y}{1+2y+y^2} = \frac{(y+1)(y-1)}{(1-y)(1+y+y^2)} + \frac{1+y}{(1+y)(1+y)}$$

$$= \frac{(y+1)(y-1)}{-(y-1)(1+y+y^2)} + \frac{1}{1+y} = \frac{-(y+1)}{1+y+y^2} + \frac{1}{1+y}$$

$$= \frac{-(y+1)(1+y) + 1+y+y^2}{(1+y+y^2)(1+y)} = \frac{-(y+y^2+1+y) + 1+y+y^2}{(1+y+y^2)(1+y)}$$

$$= \frac{-2y-y^2-1+1+y+y^2}{(1+y+y^2)(1+y)} = \frac{-y}{(1+y+y^2)(1+y)}$$

$$45 \quad \frac{Z+3}{Z+5} - \frac{Z-5}{Z-3} + \frac{1}{Z^2+2Z-15} = \frac{Z+3}{Z+5} - \frac{Z-5}{Z-3} + \frac{1}{(Z+5)(Z-3)}$$

$$= \frac{(Z+3)(Z-3) - (Z-5)(Z+5) + 1}{(Z+5)(Z-3)} = \frac{Z^2 - 9 - (Z^2 - 25) + 1}{(Z+5)(Z-3)}$$

$$= \frac{Z^2 - 9 - Z^2 + 25 + 1}{(Z+5)(Z-3)} = \frac{17}{(Z+5)(Z-3)}$$

أختبروا مستواكم في وزاريات الفصل الثاني

السؤال (1)

جد ناتج ما يأتي

1 $(x - 3)(x - 2)$ 2 $(3y - 4)(y + 3)$ 3 $(\frac{1}{3}y + 3)(\frac{1}{3}y + 2)$

4 $(n - \sqrt{3})(5n - \sqrt{3})$ 5 $(y-3)(y^2 + 3y + 9)$ 6 $(y+2)^3$

السؤال (2)

يعد فندق بغداد أحد الفنادق السياحية المهمة في العاصمة العراقية بغداد، يبلغ طول المسبح فيه $(x + 9)$ أمتار وعرضه $(x + 1)$ متر، ومحاط بممر عرضه 1 متر. اكتب مساحة المسبح مع الممر بأبسط صورة بدلالة x .

السؤال (3)

جد ناتج ما يأتي بأبسط صورة:

$$(x + 1)^2 - (x - 2)^2$$

السؤال (4)

حلل المقادير الآتية

1 $9x^2 - 21x$ 2 $2x^2 - 32$ 3 $6x^3 + 9x^2 - 18x$ 4 $2x(x^2 - 3) + 7(x^2 - 3)$

5 $21 - 3x + 35x^2 - 5x^3$ 6 $6z^3 - 9z^2 + 12 - 8z$ 7 $14x^3 - 7x^2 + 3 - 6x$

8 $x^2 - 16$ 9 $36 - 4x^2$ 10 $9m^2 - 4n^2$ 11 $27x^3z - 3xz^3$ 12 $\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{16}$

13 $y^3 + 216$ 14 $x^3 - 125$ 15 $8y^3 - 64$ 16 $\frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{8}$ 17 $25 - \frac{1}{5}n^3$

18 $\frac{1}{3}t^3 + 9$ 19 $3b^3 - 81$ 20 $1 + 0.008z^3$ 21 $0.125 - m^3$ 22 $0.216v^3 - 0.008t^3$

السؤال (5)

حدد أي مقدار من المقادير التالية يمثل مربعاً كاملاً وحلّله:

1 $y^2 + 14y + 36$ 2 $x^2 + 10x + 25$ 3 $64h^2 - 48h - 9$ 4 $3 - 4\sqrt{3}t + 4t^2$

السؤال (6)

اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري $ax^2 + bx + c$ ليصبح مربعاً كاملاً وحلله:

- 1 $25x^2 - \dots + 49$ 2 $\dots + 8x + 16$ 3 $4h^2 + 20h + \dots$

السؤال (7)

حلل المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

- 1 $15 - 8z + z^2$ 2 $5y^2 - y - 6$ 3 $10 + 9z - 9z^2$ 4 $3x^2 - 10x + 8$
5 $15 + 11h + 2h^2$ 6 $6x^2 - 39x + 60$

السؤال (8)

أكتب كل مقدار من المقادير التالية بأبسط صورة:

- 1 $\frac{16 - x^2}{3x + 5} \times \frac{(3x^2 + 2x - 5)}{(x^2 + 3x - 4)}$ 2 $\frac{y^3 + 27}{y^3 - 3y^2 + 9y}$ 3 $\frac{7x - 14}{x^2 - 4} + \frac{5}{(x + 2)}$
4 $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} - 1$ 5 $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 4} \times \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 6}$ 6 $\frac{3}{x - 2} - \frac{2}{x - 2} + \frac{4 + 2x + x^2}{x^3 - 8}$

السؤال (9)

مكتبة مدينة شتوتغارت هي واحدة من أجمل المكتبات في العالم وأفخمها وتقع في ألمانيا، كما أنها من أكثر المكتبات تماشياً مع متطلبات التعليم الحديثة. بنائية المكتبة على شكل مكعب طول حرفه $\frac{1}{2}y^3 - 13\frac{1}{2}$ متر. حلل المقدار الذي يمثل طول حرفه.

السؤال (10)

اشترى حسن مجموعة من باقات الزهور بمبلغ $x^2 - x - 6$ دينار، فكانت كلفة باقة الزهور الواحدة عليه $2x - 6$ دينار. اكتب نسبة ثمن الباقة الواحدة إلى الثمن الكلي لباقات الزهور وبأبسط صورة.

السؤال (11)

إذا كان المقدار الجبري $x^2 - 4$ يمثل عدد الكتب العلمية في المكتبة، والمقدار الجبري $x^2 + x - 6$ يمثل عدد الكتب الأدبية فيها. اكتب نسبة الكتب العلمية إلى الكتب الأدبية بأبسط صورة.

أمسح الرمز للوصول الى
المراجعة المركزة للفصل الثاني
2025



تصوير 2025

الفصل الثالث : المعادلات

3



شاهد هذا الدرس على يوتيوب

الدرس 3-1 حل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين

[3-1-1] حل نظام من معادلتين خطيتين بيانياً

لتكن $L_1 : a_1x + b_1y = c_1$ ، $L_2 : a_2x + b_2y = c_2$ معادلتين من الدرجة الأولى (خطيتين) بمتغيرين x ، y ، لحل هذا النظام بيانياً نتبع ما يأتي: (1) تمثيل كل من المستقيمين في المستوي الإحداثي. (2) إيجاد إحداثي نقطة تقاطع المستقيمين يُرسم عمودان من النقطة على المحورين الصادي والسيني فتكون نقطة التقاطع تمثل مجموعة الحل.

$$x - y = 1 \quad (1)$$

$$x + y = 3 \quad (2)$$

جد مجموعة حل النظام بيانياً في R

مثال (1)

الحل:

نرمز للمعادلة (1) : $x - y = 1$ بالرمز L_1

x	y	(x, y)
0	-1	(0, -1)
1	0	(1, 0)

$$0 - y = 1 \Rightarrow -y = 1 \Rightarrow y = -1$$

$$x - 0 = 1 \Rightarrow x = 1$$

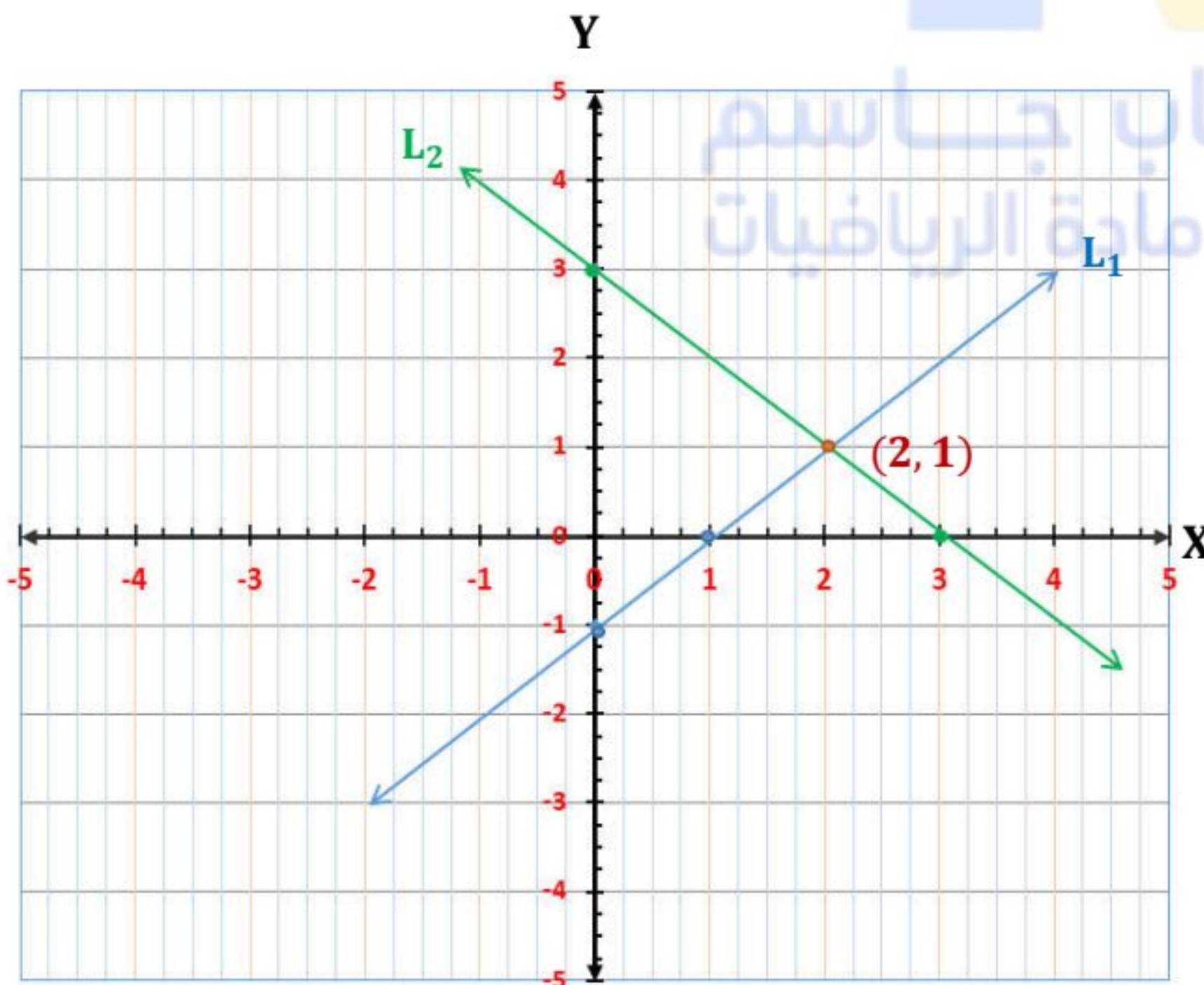
نرمز للمعادلة (2) : $x + y = 3$ بالرمز L_2

x	y	(x, y)
0	3	(0, 3)
3	0	(3, 0)

$$0 + y = 3 \Rightarrow y = 3$$

$$x - 0 = 3 \Rightarrow x = 3$$

مجموعة الحل هي : $S = [(2, 1)]$



شاهد هذا الدرس على يوتيوب



[2-1-3] حل نظام من معادلتين خطيتين بالتعويض

خطوات الحل

- [1] إذا كان المتغيرين x, y في إحدى المعادلتين في أطراف مختلفة فلا حاجة لإيجاد معادلة ثالثة ونعوض معادلة 1 في 2 أو العكس كلاهما صحيح
- [2] أما إذا كان المتغيرين x, y في نفس الطرف فيجب إيجاد معادلة ثالثة من إحدى المعادلتين بدلالة x أو y
- [3] إذا وجدنا المعادلة الثالثة من المعادلة الأولى نعوضها بالثانية و إذا كانت من المعادلة الثانية نعوضها بالأولى
- [4] نبسط الحل ونجد قيمة أحد المتغيرين و نعود لتعويض قيمة هذا المتغير في المعادلة الثالثة أو أي معادلة أخرى لإيجاد قيمة المتغير الآخر

مثال (2) جد مجموعة الحل للنظام باستعمال التعويض:

i)
$$\begin{cases} y = 4x & \dots\dots (1) \\ y = x + 6 & \dots\dots (2) \end{cases} \Rightarrow 4x = x + 6$$

نعوض عن قيمة y من المعادلة (1) في المعادلة (2)
نحل المعادلة ونجد قيمة المتغير x

$$\Rightarrow 4x - x = 6 \Rightarrow x = 2$$

نعوض عن قيمة x بالمعادلة (2) لإيجاد قيمة المتغير y

$$y = x + 6 \Rightarrow y = 2 + 6 \Rightarrow y = 8$$

لذا مجموعة الحل للنظام هي $\{(2, 8)\}$

ii)
$$\begin{cases} x + 8y = 10 & \dots\dots (1) \\ x - 4y = 2 & \dots\dots (2) \end{cases} \Rightarrow x = 2 + 4y \dots\dots (3)$$

نجد معادلة 3 من معادلة 2
نعوض معادلة 3 في معادلة 1

$$2 + 4y + 8y = 10 \Rightarrow 12y = 8 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$$

نجد قيمة y ثم نعوضها في معادلة 3
لايجاد قيمة x

$$x = 2 + 4\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow x = 2 + \frac{8}{3} \Rightarrow x = \frac{14}{3}$$

جمع
ضرب

لذا مجموعة الحل للنظام هي $\left\{\left(\frac{14}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\}$



شاهد هذا الدرس على يوتيوب

[3-1-3] حل نظام من معادلتين خطيتين بالحذف

خطوات الحل

- [1] نتلخص هذه الطريقة بحذف احد المتغيرين x, y وذلك بجعل المعاملات في احد المتغيرين متساوية بالقيمة ومختلفاً بالإشارة في كلا المعادلتين
- [2] نساوي المعاملات من خلال عملية الضرب وتذكر انه المعادلة كلها تضرب بالرقم وليس المتغير المقصود فقط (**الضرب يتوزع على حدود المعادلة كلها**)
- [3] اذا كانت معاملات احد المتغيرين متساوية في كلا المعادلتين فلا نحتاج للضرب ونجعل الاشارات في كلا المعادلتين مختلفة و اذا كانت مختلفة من الاصل فلا حاجة لهذه الخطوة و نحذف مباشرة
- [4] عند حذف متغيرين مختلفين في الاشارة من الاصل نقول (**بالجمع**) وعند حذف متغيرين متساويين في الاشارة من الاصل نقول (**بالطرح**)
- [5] نبسط الحل كالعادة ونجد قيمة أحد المتغيرين ونعوّضها في المعادلة 1 أو 2 لإيجاد المتغير الآخر

مثال (3)

جد مجموعة الحل للنظام باستعمال الحذف:

$$\left. \begin{array}{l} \text{i) } x + 2y = 5 \quad \dots\dots\dots(1) \\ 3x - y = 1 \quad \dots\dots\dots(2) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 5 \quad \dots\dots\dots(1) \\ 6x - 2y = 2 \quad \dots\dots\dots(2) \end{array} \right. \quad \text{بالجمع}$$

$$7x = 7 \Rightarrow x = 1$$

$$x + 2y = 5 \Rightarrow 1 + 2y = 5 \Rightarrow 2y = 4 \Rightarrow y = 2$$

لذا مجموعة الحل للنظام هي $\{(1, 2)\}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ii) } 3x + 4y = 10 \quad \dots\dots\dots(1) \\ 2x + 3y = 7 \quad \dots\dots\dots(2) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6x + 9y = 21 \quad \dots\dots\dots(2) \\ \mp 6x \mp 8y = \mp 20 \quad \dots\dots\dots(1) \end{array} \right. \quad \text{بالطرح}$$

$$y = 1$$

$$2x + (3 \times 1) = 7 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

لذا مجموعة الحل للنظام هي $\{(2, 1)\}$

تأكّد من فهمك

جد مجموعة الحل للنظام بيانياً:



نرمز للمعادلة (1) : $3x - y = 3$ بالرمز L_1

x	y	(x, y)
0	-6	(0, -6)
2	0	(2, 0)

$$3(0) - y = 3 \Rightarrow -y = 3 \Rightarrow y = -3$$

$$3x - 0 = 3 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{3} = 1$$

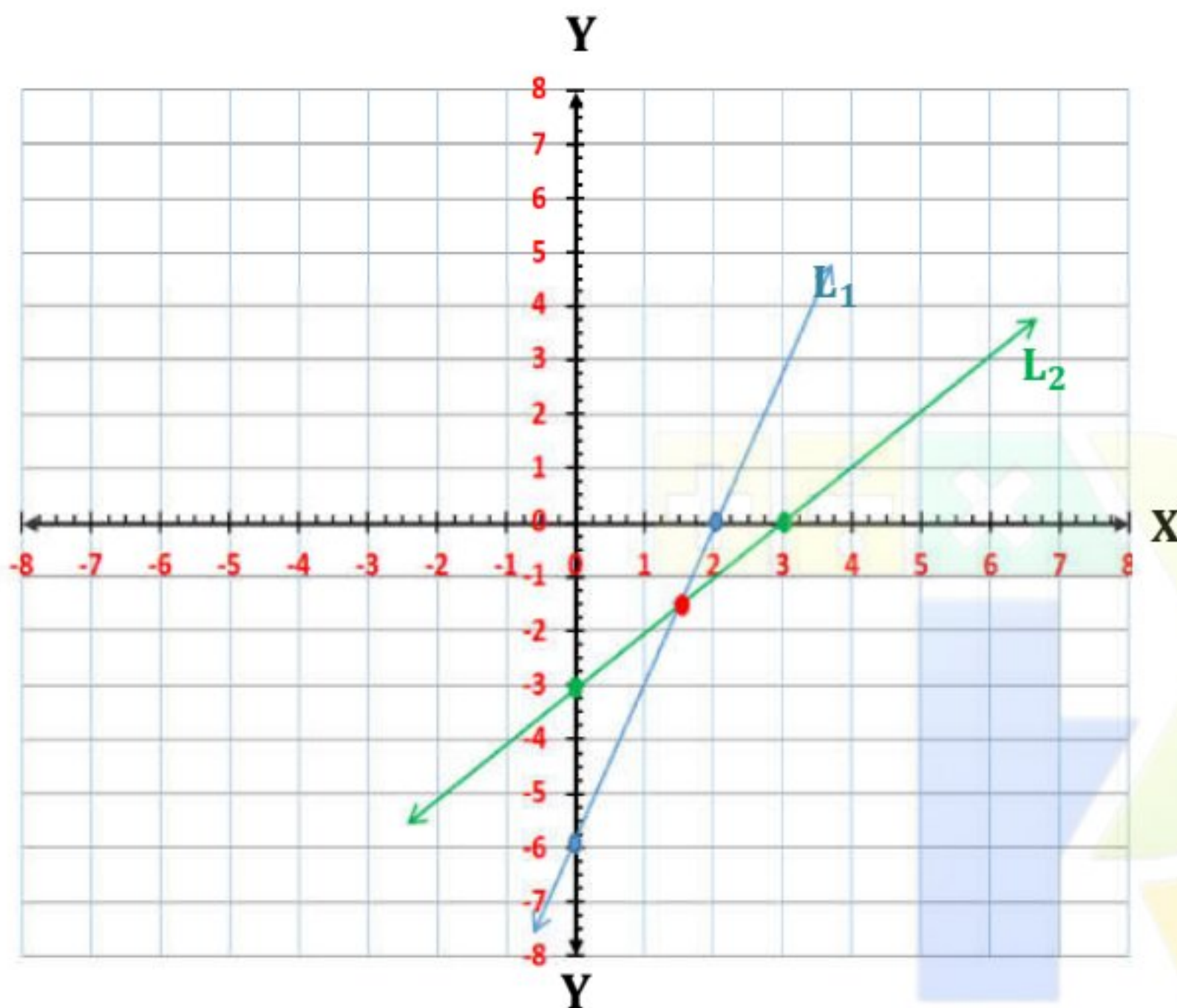
نرمز للمعادلة (2) $x - y = 3$ بالرمز L_2

x	y	(x, y)
0	-3	(0, -3)
3	0	(3, 0)

$$0 - y = 3 \Rightarrow -y = 3 \Rightarrow y = -3$$

$$x - 0 = 3 \Rightarrow x = 3$$

مجموعة حل النظام : $S = \left\{ \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right) \right\}$



2 $y - x = 3$ ——— (1)

$y + x = 0$ ——— (2)



نرمز للمعادلة (1) : $y - x = 3$ بالرمز L_1

x	y	(x, y)
0	3	(0, 3)
-3	0	(-3, 0)

$$y - 0 = 3 \Rightarrow y = 3$$

$$0 - x = 3 \Rightarrow -x = 3 \Rightarrow x = -3$$

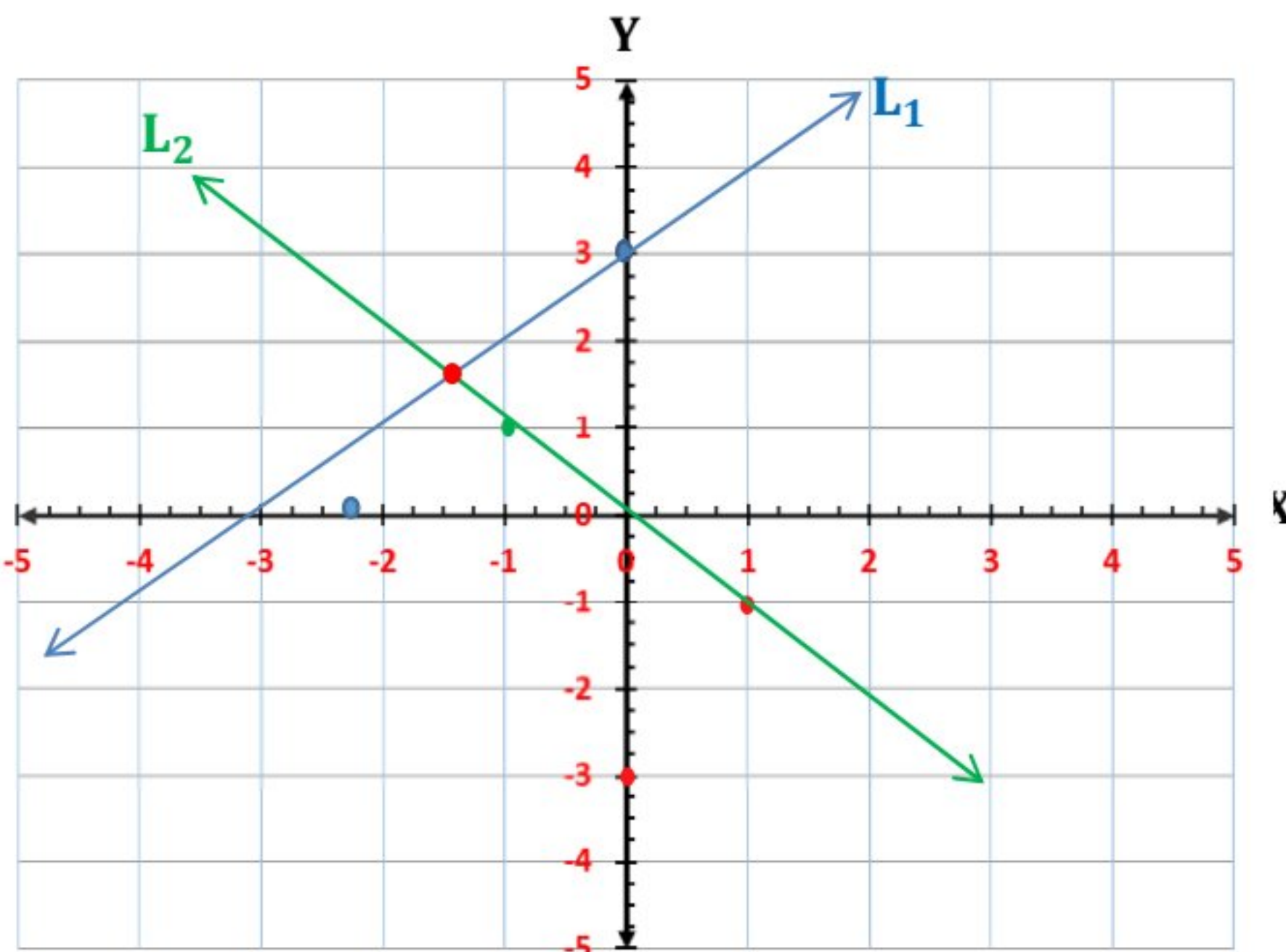
نرمز للمعادلة (2) : $y + x = 0$ بالرمز L_2

x	y	(x, y)
1	-1	(1, -1)
-1	1	(-1, 1)

$$y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$$

$$1 + x = 0 \Rightarrow x = -1$$

مجموعة حل النظام : $\left\{ \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right) \right\}$



3 $y = x - 2$ ——— (1)
 $y = 3 - x$ ——— (2)



نرمز للمعادلة (1) $y = x - 2$ بالرمز L_1

x	y	(x, y)
0	-2	(0, -2)
2	0	(2, 0)

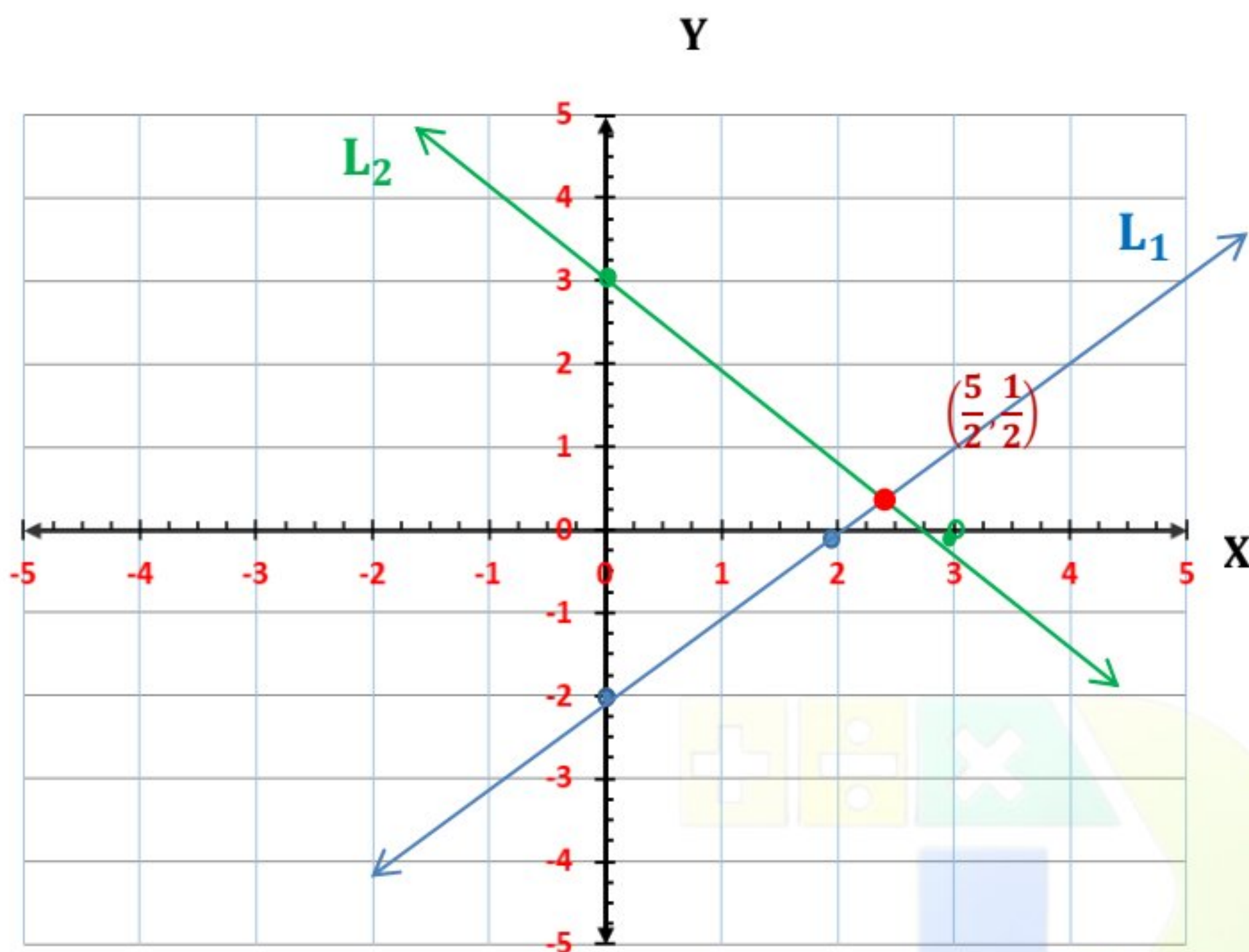
$y = 0 - 2 \Rightarrow y = -2$
 $0 = x - 2 \Rightarrow x = 2$

نرمز للمعادلة (2) $y = 3 - x$ بالرمز L_2

x	y	(x, y)
0	3	(0, 3)
3	0	(3, 0)

$y = 3 - 0 \Rightarrow y = 3$
 $0 = 3 - x \Rightarrow x = 3$

مجموعة حل النظام: $\left\{\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$



3 $y = x - 2$ ——— (1)
 $y = 3 - x$ ——— (2)



نرمز للمعادلة (1) $y = x - 2$ بالرمز L_1

x	y	(x, y)
0	-2	(0, -2)
2	0	(2, 0)

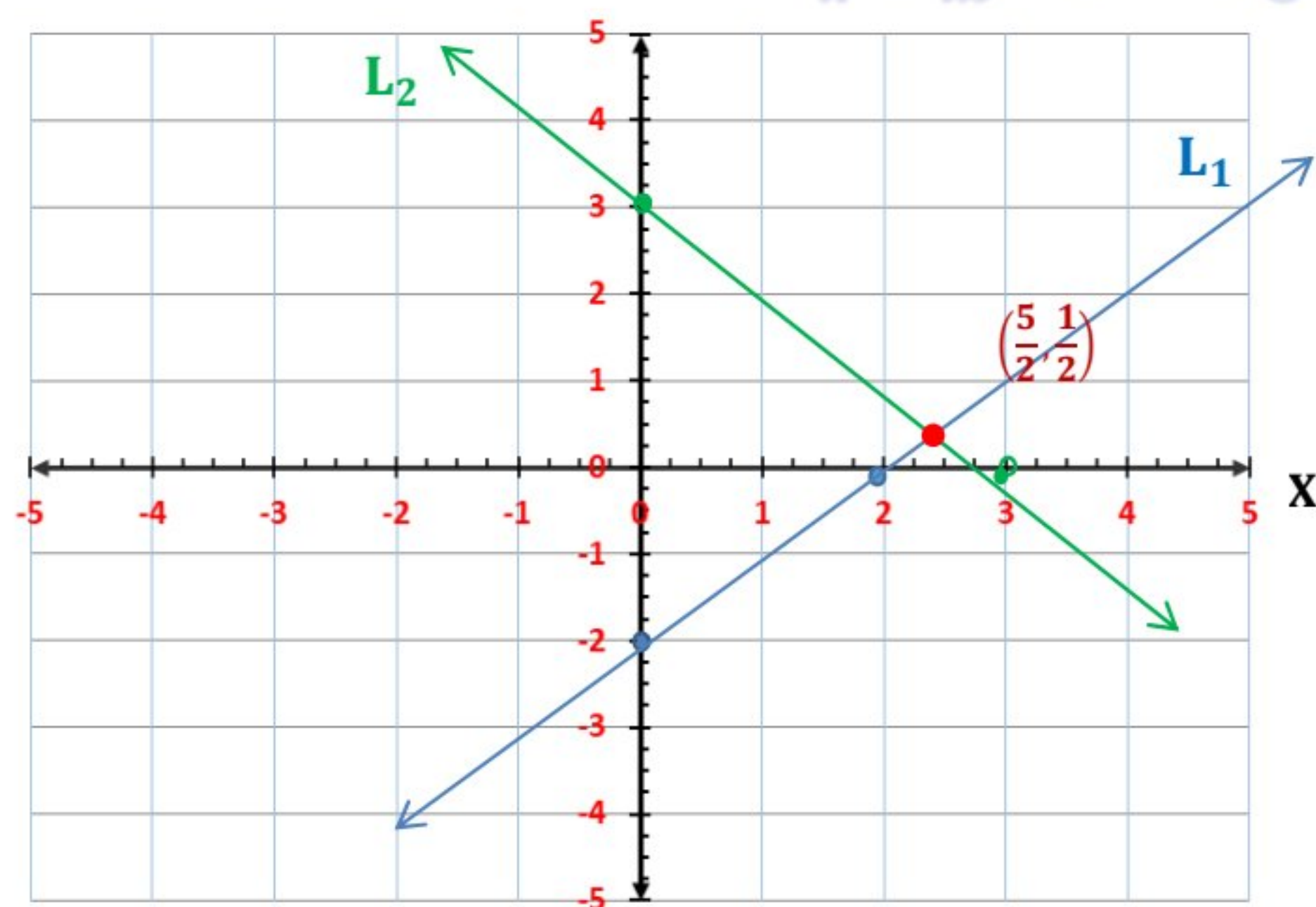
$y = 0 - 2 \Rightarrow y = -2$
 $0 = x - 2 \Rightarrow x = 2$

نرمز للمعادلة (2) $y = 3 - x$ بالرمز L_2

x	y	(x, y)
0	3	(0, 3)
3	0	(3, 0)

$y = 3 - 0 \Rightarrow y = 3$
 $0 = 3 - x \Rightarrow x = 3$

مجموعة حل النظام: $\left\{\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$



جد مجموعة الحل للنظام باستعمال طريقة التعويض لكل مما يأتي:

4 $2x + 3y = 1$ ————— (1)
 $3x - 2y = 0$ ————— (2)



$3x = 2y \Rightarrow x = \frac{2}{3}y$ ————— (3)

من معادلة (2) نحصل على:

نعوض معادلة (3) في معادلة (1)

$2\left(\frac{2}{3}y\right) + 3y = 1 \Rightarrow \frac{4}{3}y + 3y = 1 \} \times 3$

$4y + 9y = 3 \Rightarrow 13y = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{13}$

نعوض قيمة $y = \frac{3}{13}$ في معادلة (3)

$x = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{13}\right) = \frac{2}{13}$

مجموعة حل النظام: $\left\{\left(\frac{2}{13}, \frac{3}{13}\right)\right\}$

5 $x - 2y = 11$ ————— (1)
 $2x - 3y = 18$ ————— (2)



من معادلة (1) نحصل على:

$x = 11 + 2y$ ————— (3)

نعوض معادلة (3) في معادلة (2)

$2(11 + 2y) - 3y = 18 \Rightarrow 22 + 4y - 3y = 18$
 $y = 18 - 22 = -4$

نعوض قيمة $y = -4$ في معادلة (3)

$x = 11 + 2(-4) = 11 - 8 = 3$

مجموعة حل النظام: $\{(3, -4)\}$

6 $y - 5x = 10$ ————— (1)
 $y - 3x = 8$ ————— (2)



من معادلة (1) نحصل على:

$y = 10 + 5x$ ————— (3)

نعوض معادلة (3) في معادلة (2)

$10 + 5x - 3x = 8 \Rightarrow 2x = 8 - 10$
 $2x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{2} = -1$

نعوض قيمة $x = -1$ في معادلة (3)

$y = 10 + 5(-1) = 10 - 5 = 5$

مجموعة حل النظام: $\{(-1, 5)\}$

جد مجموعة الحل للنظام باستعمال طريقة الحذف لكل مما يأتي:

7
$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 12 & \text{---(1)} \\ 5x + 2y &= -6 & \text{---(2)} \end{aligned} \quad \} \times 2$$

الحل

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 12 & \text{---(1)} \\ 10x + 4y &= -12 & \text{---(2)} \end{aligned} \quad \text{بالجمع}$$

بضرب معادلة (2) في العدد 2

نعوض قيمة $x = 0$ في معادلة (2)

$$\begin{aligned} 5(0) + 2y &= -6 \Rightarrow 2y = -6 \\ y &= \frac{-6}{2} = -3 \end{aligned}$$

مجموعة حل النظام: $\{(0, -3)\}$

8
$$\begin{aligned} x - 3y &= 6 & \text{---(1)} \\ 2x - 4y &= 24 & \text{---(2)} \end{aligned} \quad \} \times 2$$

الحل

بضرب معادلة (1) في العدد 2

$$\begin{aligned} 2x - 6y &= 12 & \text{---(1)} \\ 2x - 4y &= 24 & \text{---(2)} \end{aligned} \quad \text{بالطرح}$$

نعوض قيمة $y = 6$ في معادلة (1)

$$\begin{aligned} x - 3(6) &= 6 \Rightarrow x - 18 = 6 \\ x &= 6 + 18 = 24 \end{aligned}$$

مجموعة حل النظام: $\{(24, 6)\}$

9
$$\begin{aligned} 3y - 2x - 7 &= 0 & \text{---(1)} \\ y + 3x + 5 &= 0 & \text{---(2)} \end{aligned} \quad \} \times 3$$

الحل

بضرب معادلة (2) في العدد 3

$$\begin{aligned} 3y - 2x - 7 &= 0 & \text{---(1)} \\ 3y + 9x + 15 &= 0 & \text{---(2)} \end{aligned} \quad \text{بالطرح}$$

نعوض قيمة $x = -2$ في معادلة (2)

$$\begin{aligned} y + 3(-2) + 5 &= 0 \Rightarrow y - 6 + 5 = 0 \\ y - 1 &= 0 \Rightarrow y = 1 \end{aligned}$$

مجموعة حل النظام: $\{(-2, 1)\}$

جد مجموعة الحل للنظام وتحقق من صحة الحل:

10 $\frac{2x}{3} - \frac{y}{2} = 1$ ————— (1) $\times 6$ هنا لم يحدد طريقة حل معينة لذلك نختار الطريقة التي نرغب بها
 $\frac{3y}{3} - \frac{x}{3} = 4$ ————— (2) $\times 3$ ولتكن طريقة الحذف لأنها سهلة وسريعة

بضرب معادلة (1) في العدد 6 ومعادلة (2) في العدد 3

$4x - 3y = 6$ ————— (1)
 $3y - x = 12 \Rightarrow -x + 3y = 12$ ————— (2)

$4x - 3y = 6$ ————— (1)
 $-x + 3y = 12$ ————— (2) بالجمع

$3x = 18 \Rightarrow x = \frac{18}{3} = 6$

نعوض قيمة $x = 6$ في معادلة (2)

$-6 + 3y = 12 \Rightarrow 3y = 12 + 6$
 $3y = 18 \Rightarrow y = \frac{18}{3} = 6$

مجموعة حل النظام: $\{(6, 6)\}$

تحقق من صحة الحل:

نعوض قيم $x = 6, y = 6$ في إحدى المعادلتين لتكن

معادلة (2) $-x + 3y = -6 + 3(6) = -6 + 18 = 12$

11 $0.2x - 6y = 4$ ————— (1)
 $0.1x - 7y = -2$ ————— (2) $\times 2$

بضرب معادلة (2) في العدد 2

$0.2x - 6y = 4$ ————— (1)
 $\mp 0.2x \pm 14y = \pm 4$ ————— (2) بالطرح
 $8y = 8 \Rightarrow y = \frac{8}{8} = 1$

نعوض قيمة $y = 1$ في معادلة (1)

$0.2x - 6(1) = 4 \Rightarrow 0.2x - 6 = 4$
 $0.2x = 4 + 6 \Rightarrow 0.2x = 10$
 $x = \frac{10}{0.2} = \frac{100}{2} = 50$

مجموعة حل النظام: $\{(50, 1)\}$

تحقق من صحة الحل: نعوض قيم $x = 50, y = 1$ في

معادلة (1) $0.2x - 6y = 0.2(50) - 6(1) = 10 - 6 = 4$

$$12 \quad \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 2\frac{3}{4} \text{ ————— (1)}$$

$$\frac{1}{4}x - \frac{2}{3}y = 6\frac{1}{4} \text{ ————— (2)}$$



نبسط المعادلتين وذلك

بالتخلص من الاعداد الكسرية

نضرب المعادلتين في 12 للتخلص من الكسور

$$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = \frac{11}{4} \text{ ————— (1) } \times 12$$

$$\frac{1}{4}x - \frac{2}{3}y = \frac{25}{4} \text{ ————— (2) } \times 12$$

$$6x + 8y = 33 \text{ ————— (1)}$$

$$3x - 8y = 75 \text{ ————— (2)}$$

بالجمع

$$9x = 108 \Rightarrow x = \frac{108}{9} = 12$$

نعوض قيمة $x = 12$ في معادلة (1)

$$6(12) + 8y = 33 \Rightarrow 72 + 8y = 33$$

$$8y = 33 - 72 \Rightarrow 8y = -39 \Rightarrow y = \frac{-39}{8} \quad \left\{ \left(12, -\frac{39}{8} \right) \right\} \text{ مجموعة حل النظام}$$

تحقق من صحة الحل: نعوض قيم $x = 12, y = -\frac{39}{8}$ في معادلة (1)

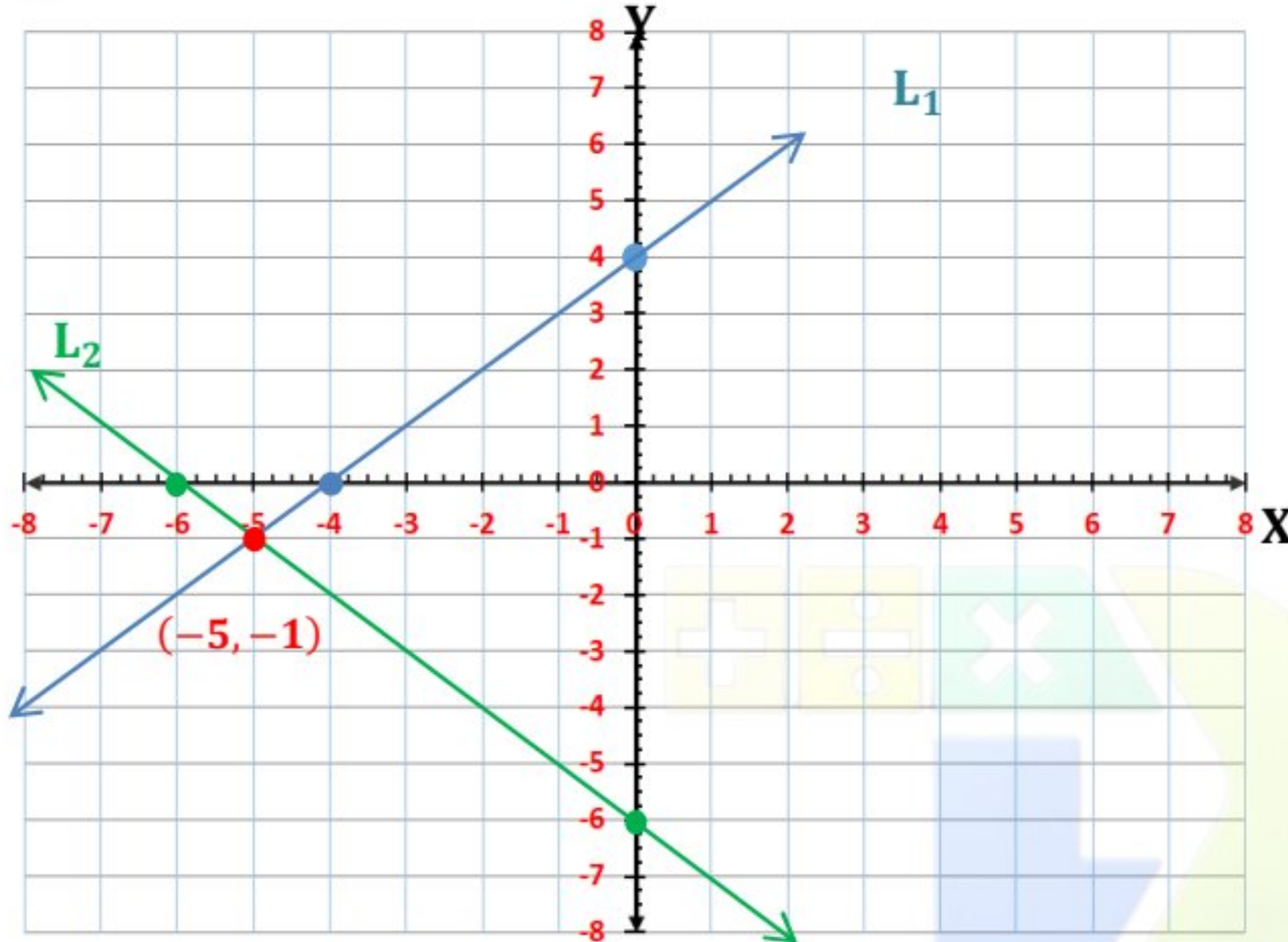
$$6x + 8y = 6(12) + 8\left(-\frac{39}{8}\right) = 72 - 39 = 33$$

تدرب وحل التمرينات

جد مجموعة حل للنظام بيانياً:

13 $x - y = -4$ ----- (1)
 $y + x = -6$ ----- (2)

الحل



نرمز للمعادلة (1) $x - y = -4$ بالرمز L_1

x	y	(x, y)
0	4	(0, 4)
-4	0	(-4, 0)

$0 - y = -4 \Rightarrow y = 4$
 $x - 0 = -4 \Rightarrow x = -4$

نرمز للمعادلة (2) $y + x = -6$ بالرمز L_2

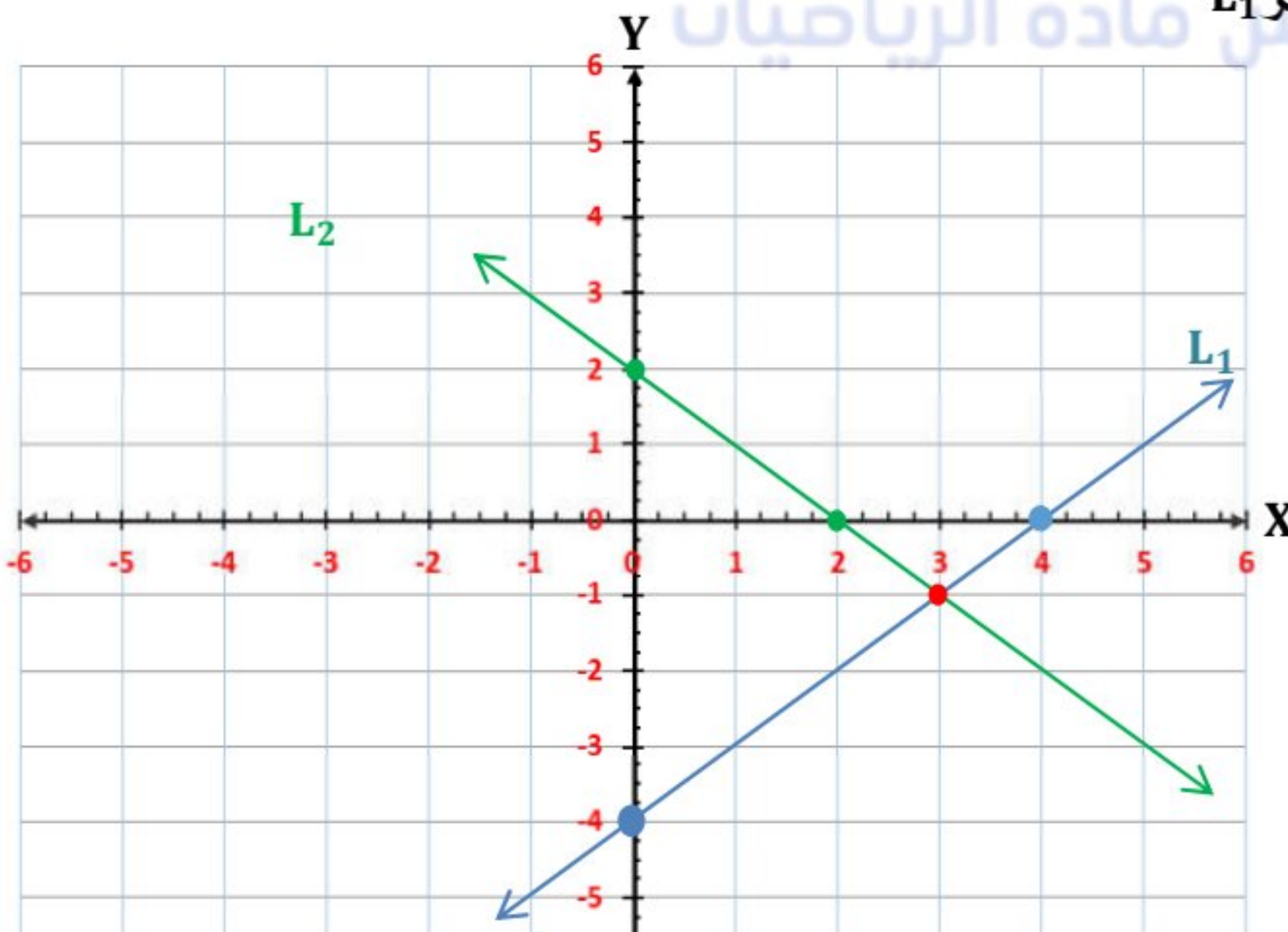
x	y	(x, y)
0	-6	(0, -6)
-6	0	(-6, 0)

$y + 0 = -6 \Rightarrow y = -6$
 $0 + x = -6 \Rightarrow x = -6$

مجموعة الحل: $\{(-5, -1)\}$

14 $y = x - 4$ ----- (1)
 $x = 2 - y$ ----- (2)

الحل



نرمز للمعادلة (1) $y = x - 4$ بالرمز L_1

x	y	(x, y)
0	-4	(0, -4)
4	0	(4, 0)

$y = 0 - 4 \Rightarrow y = -4$
 $0 = x - 4 \Rightarrow x = 4$

نرمز للمعادلة (2) $x = 2 - y$ بالرمز L_2

x	y	(x, y)
0	2	(0, 2)
2	0	(2, 0)

$0 = 2 - y \Rightarrow y = 2$
 $x = 2 - 0 = 2$

مجموعة حل النظام: $\{(3, -1)\}$

جد مجموعة الحل للنظام باستعمال طريقة التعويض لكل مما يأتي:

15 $3x + 2y = 2$ ——— (1)
 $x - y = 8$ ——— (2) **الحل**

من معادلة (2) نحصل على:

$$x = 8 + y$$

نعوض معادلة (3) في معادلة (1)

$$3(8 + y) + 2y = 2 \Rightarrow 24 + 3y + 2y = 2$$

$$5y = 2 - 24 \Rightarrow 5y = -22 \Rightarrow y = \frac{-22}{5}$$

نعوض قيمة $y = -\frac{22}{5}$ في معادلة (3)

$$x = 8 - \frac{22}{5} = \frac{40 - 22}{5} = \frac{18}{5}$$

مجموعة حل النظام: $\left\{\left(\frac{18}{5}, -\frac{22}{5}\right)\right\}$

16 $2x - y = -4$ ——— (1)
 $3x - y = 3$ ——— (2) **الحل**

من معادلة (2) نحصل على:

$$y = 3x - 3$$

نعوض معادلة (3) في معادلة (1)

$$2x - (3x - 3) = -4 \Rightarrow 2x - 3x + 3 = -4$$

$$-x = -4 - 3 \Rightarrow -x = -7 \Rightarrow x = 7$$

نعوض قيمة $x = 7$ في معادلة (3)

$$y = 3(7) - 3 = 21 - 3 = 18$$

مجموعة حل النظام $\{(7, 18)\}$

جد مجموعة الحل للنظام باستعمال طريقة الحذف لكل مما يأتي:

17 $3x = 22 - 4y$ ——— (1)
 $4y = 3x - 14$ ——— (2) **الحل**

نرتب المعادلتين:

$$\begin{array}{r} 3x + 4y = 22 \text{ ——— (1)} \\ -3x + 4y = -14 \text{ ——— (2)} \\ \hline 8y = 8 \Rightarrow y = \frac{8}{8} = 1 \end{array}$$

نعوض قيمة $y = 1$ في معادلة (1)

$$3x = 22 - 4(1) \Rightarrow 3x = 22 - 4$$

$$3x = 18 \Rightarrow x = \frac{18}{3} = 6$$

مجموعة حل النظام: $\{(6, 1)\}$

18 $5x - 3y = 6$ ——— (1) $\times 5$
 $2x + 5y = -10$ ——— (2) $\times 3$ **الحل**

بضرب معادلة (1) في العدد 5 ومعادلة (2) في العدد 3

$$\begin{array}{r} 25x - 15y = 30 \text{ ——— (1)} \\ 6x + 15y = -30 \text{ ——— (2)} \\ \hline 31x = 0 \Rightarrow x = 0 \end{array}$$

نعوض قيمة $x = 0$ في معادلة (2)

$$2(0) + 5y = -10 \Rightarrow 5y = -10$$

$$y = \frac{-10}{5} = -2$$

مجموعة حل النظام: $\{(0, -2)\}$

هذه المسألة تم حلها مع
مسائل أخرى في الدرس



14

تدرب وحل مسائل حياتية

19 طقس: تقل عدد الأيام (x) التي تنخفض فيها درجة الحرارة في مدينة بغداد لشهر كانون الثاني عن 10 درجات سيليزية بمقدار 9 أيام على عدد الأيام (y) التي تزداد فيها درجة الحرارة على 10 درجات سيليزية. اكتب معادلتين تمثل هذا الموقف، ثم جد حلّهما بطريقة الحذف لإيجاد عدد الأيام في كل حالة.

عدد أيام شهر كانون الثاني = 31 يوم

نفرض عدد الأيام التي تنخفض بها درجة الحرارة = x

نفرض عدد الأيام التي تزداد بها درجة الحرارة = y

نعوض قيمة $y = 20$ في معادلة (1)

$$y + x = 31 \text{ -----(1)}$$

$$y - x = 9 \text{ -----(2)}$$

$$2y = 40 \Rightarrow y = \frac{40}{2} = 20$$

$$20 + x = 31 \Rightarrow x = 31 - 20 = 11 \Rightarrow S = \{(11, 20)\}$$

بالجمع



الصف الثالث المتوسط



20 تجارة: باع متجر 25 ثلاجة وغسالة، بسعر مليون دينار للثلاجة ونصف مليون دينار للغسالة. إذا كان ثمن هذه الأجهزة 20 مليون دينار فكم جهازاً باع من كل نوع؟ اكتب معادلتين تمثلان المسألة ثم حلّهما بطريقة التعويض.

نفرض عدد الثلاجات = x , عدد الغسالات = y

سعر الثلاجة = $1000000x$, سعر الغسالة = $500000y$

$$x + y = 25 \text{ -----(1)}$$

$$1000000x + 500000y = 20000000 \} \div 500000$$

$$2x + y = 40 \text{ -----(2)}$$

$$y = 25 - x \text{ -----(3)}$$

$$2x + 25 - x = 40 \Rightarrow x = 40 - 25 \Rightarrow x = 15$$

$$y = 25 - 15 = 10 \Rightarrow S = \{(15, 10)\}$$

من معادلة (1) نحصل على:

نعوض معادلة (3) في معادلة (2)

نعوض قيمة $x = 15$ في معادلة (3)





21 حفلة تخرج: عمل سجاد وأنور حفلة بمناسبة تخرجهما من الكلية فكان عدد الأصدقاء الذين دعاهم سجاد أكثر بثلاثة من عدد الأصدقاء الذين دعاهم أنور. وكان عدد المدعوين 23 شخصاً، فكم شخصاً دعا كل منهما؟ اكتب معادلتين تمثلان المسألة ثم حلّهما لإيجاد المطلوب.

الحل

نفرض عدد الأشخاص الذين دعاهم سجاد x

عدد الأشخاص الذين دعاهم أنور y

$$x + y = 23 \text{ ----- (1)}$$

$$x - y = 3 \text{ ----- (2) بالجمع}$$

$$2x = 26 \Rightarrow x = \frac{26}{2} = 13$$

عدد الاشخاص الذين دعاهم سجاد

نعوض قيم $x = 1$ في معادلة (1)

$$13 + y = 23 \Rightarrow y = 23 - 13 = 10$$

الذين دعاهم أنور

فكّر

$$\frac{2}{6}x - \frac{1}{3}y = 1 \text{ ----- (1) } \times 6$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 3 \text{ ----- (2) } \times 2$$

نسب المعادلتين ذلك بضرب معادلة (1) في العدد 6 والمعادلة (2) في العدد 2

$$2x - 2y = 6 \text{ ----- (1)}$$

$$x + y = 6 \text{ ----- (2) } \times 2$$

$$2x + 2y = 12 \text{ ----- (2)}$$

$$2x - 2y = 6 \text{ ----- (1)}$$

بالجمع

$$4x = 18 \Rightarrow x = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

$$\frac{9}{2} + y = 6 \Rightarrow y = 6 - \frac{9}{2} = \frac{12 - 9}{2} = \frac{3}{2}$$

مجموعة حل النظام: $\left\{\left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right)\right\}$

22 تحدّ: جد مجموعة الحل للنظام:

هذا السؤال تم حلها مع مسائل أخرى في الدرس



23

أصحّ الخطأ: قال أحمد إن مجموعة حل للنظام: $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$ هي المجموعة $\{(\frac{5}{16}, \frac{5}{9})\}$ اكتشف خطأ أحمد وصحّحه.



بضرب معادلة (1) في العدد 2 والمعادلة (2) في العدد 3

$$\begin{array}{rcl} 4x + 6y = 12 & \text{---} & (1) \\ \mp 9x + \mp 6y = \mp 3 & \text{---} & (2) \end{array} \quad \text{بالطرح}$$

$$-5x = 9 \Rightarrow x = -\frac{9}{5}$$

نعوض قيمة $x = -\frac{9}{5}$ في معادلة (2)

$$\begin{aligned} 3\left(-\frac{9}{5}\right) + 2y &= 1 \Rightarrow -\frac{27}{5} + 2y = 1 \quad \times 5 \\ -27 + 10y &= 5 \Rightarrow 10y = 5 + 27 \Rightarrow 10y = 32 \Rightarrow y = \frac{32}{10} = \frac{16}{5} \end{aligned}$$

مجموعة حل النظام: $\left\{-\frac{9}{5}, \frac{16}{5}\right\}$
خطأ أحمد هو أيجاد مجموعة الحل.

أكتب

$$\begin{cases} 5x - 6y = 0 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \quad \text{مجموعة حل للنظام:}$$



$$\begin{array}{rcl} 5x - 6y = 0 & \text{---} & (1) \\ x + 2y = 4 & \text{---} & (2) \end{array} \quad \times 3$$

بضرب معادلة (2) في العدد 3

$$\begin{array}{rcl} 5x - 6y = 0 & \text{---} & (1) \\ 3x + 6y = 12 & \text{---} & (2) \end{array} \quad \text{بالجمع}$$

$$8x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

نعوض قيمة $x = \frac{3}{2}$ في معادلة (2)

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} + 2y &= 4 \quad \times 2 \Rightarrow 3 + 4y = 8 \Rightarrow 4y = 8 - 3 \\ 4y &= 5 \Rightarrow y = \frac{5}{4} \Rightarrow \left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)\right\} \end{aligned}$$

مجموعة الحل:



شاهد هذا الدرس على يوتيوب

الدرس 3-2 حل المعادلات التربيعية بمتغير واحد

[3-2-1] حل المعادلات بالتحليل فرق بين مربعين

لحل المعادلة بطريقة التحليل فرق بين مربعين نتبع ما يأتي:

[1] نتخلص من الأقواس أن وجدت ثم نجمع أو نطرح الحدود المتشابهة.

[2] نجعل المعادلة بالصورة: $x^2 - a^2 = 0$

[3] نحل المعادلة بطريقة الفرق بين مربعين بالصورة: $(x + a)(x - a) = 0$

[4] نجد قيم x بجعل أما: $x + a = 0 \Rightarrow x = -a$ أو $x - a = 0 \Rightarrow x = a$

[5] نكتب مجموعة الحل: $S = \{-a, a\}$

تعلم

تعد الزقورة من المعالم الحضارية في العراق إذ انها تقع في جنوب العراق. رسمَ باسل لوحةً جداريةً للزقورة مربعة الشكل مساحتها $9m^2$ على جدار إسمنتي. جد طول ضلع اللوحة.

مثال (1)

اكتب معادلة تمثل مساحة اللوحة، ثم حلها لإيجاد طول ضلع اللوحة.

$$x^2 = 9$$

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 3) = 0$$

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \quad \text{يهمل}$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \quad \text{أو}$$

نفرض طول ضلع اللوحة x

مساحة اللوحة = طول الضلع $\times$ نفسه

طول ضلع اللوحة هو: $3m$

الحل

مثال (2)

حل المعادلة التالية باستعمال الفرق بين مربعين وتحقق من صحة الحل:

$$(4 + y)(4 - y) = 0$$

$$4 + y = 0 \Rightarrow y = -4 \quad \text{أما}$$

$$4 - y = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow S = \{4, -4\} \quad \text{أو}$$

الحل

تحقق من صحة الحل: نعوض قيم y في المعادلة

$$y = 4 \Rightarrow 16 - y^2 = 16 - (4)^2 = 16 - 16 = 0$$

$$y = -4 \Rightarrow 16 - y^2 = 16 - (-4)^2 = 16 - 16 = 0$$

مثال (3)

حل المعادلات التالية باستعمال الفرق بين مربعين:

i) $4x^2 - 25 = 0 \Rightarrow (2x + 5)(2x - 5) = 0 \Rightarrow 2x + 5 = 0 \text{ or } 2x - 5 = 0$
 $\Rightarrow x = -\frac{5}{2} \text{ or } x = \frac{5}{2} \Rightarrow S = \{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\}$



ii) $3z^2 - 12 = 0 \Rightarrow 3(z^2 - 4) = 0 \Rightarrow (z + 2)(z - 2) = 0$
 $\Rightarrow z + 2 = 0 \text{ or } z - 2 = 0 \Rightarrow S = \{-2, 2\}$

بقسمة الطرفين على 3 ثم التحليل

بقسمة الطرفين على 2 ثم التحليل

iii) $2y^2 - 6 = 0 \Rightarrow y^2 - 3 = 0 \Rightarrow (y + \sqrt{3})(y - \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow y = -\sqrt{3} \text{ or } y = \sqrt{3} \Rightarrow S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

iv) $x^2 - 5 = 0 \Rightarrow (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{5} \text{ or } x = \sqrt{5} \Rightarrow S = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$

v) $(z + 1)^2 - 36 = 0 \Rightarrow (z + 1 + 6)(z + 1 - 6) = 0 \Rightarrow (z + 7)(z - 5) = 0 \Rightarrow S = \{-7, 5\}$

شاهد هذا الدرس على يوتيوب



5

[3-2-2] حل المعادلات بخاصية الجذر التربيعي

لحل المعادلات بخاصية الجذر التربيعي نتبع ما يأتي

[1] نتخلص من الأقواس أن وجدت ثم نجمع أو نطرح الحدود المتشابهة.

[2] نجعل المتغيرات التي تحتوي x^2 في طرف والأعداد في طرف آخر.

[3] نقسم الطرفين على معامل x^2 أي جعل المعادلة بالصورة: $x^2 = a$

[4] نأخذ الجذر التربيعي للطرفين واضعين اشارتي $(\pm)$ أمام العدد. أي أن: $x = \pm\sqrt{a}$

[5] نكتب مجموعة الحل: $S = \{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$

مثال (3)

حل المعادلة التالية باستعمال قاعدة الجذر التربيعي وتحقق من صحة الحل:

$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3$
 $\Rightarrow S = \{3, -3\}$

باستعمال قاعدة الجذر التربيعي

مجموعة الحل للمعادلة



مثال (4)

حل المعادلة التالية باستعمال قاعدة الجذر التربيعي:

i) $y^2 = 36 \Rightarrow y = \pm \sqrt{36} \Rightarrow y = \pm 6 \Rightarrow S = \{6, -6\}$

ii) $z^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow z = \pm \sqrt{\frac{9}{25}} \Rightarrow z = \pm \frac{3}{5} \Rightarrow S = \{\frac{3}{5}, -\frac{3}{5}\}$

iii) $x^2 + 81 = 0 \Rightarrow x^2 = -81$ (لا يوجد عدد حقيقي مربعه سالب)

iv) $3y^2 = 7 \Rightarrow y^2 = \frac{7}{3} \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{7}{3}} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \Rightarrow S = \{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\}$

v) $4x^2 - 5 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5}{4}} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow S = \{\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}\}$



خطوات حل المعادلات التي تحتوي على جذور :

- [1] نقسم طرفي المعادلة على معامل الجذر و اذا لم يكن هناك معامل مع الجذر ننتقل مباشرة للخطوة 2 .
- [2] نربع الطرفين للتخلص من الجذر التربيعي .
- [3] نكتب مجموعة الحل .

مثال (4)

حل المعادلات التالية:

[1] $3\sqrt{x} = 18 \} \div 3$



$\Rightarrow \sqrt{x} = 6$ بتربيع الطرفين

$(\sqrt{x})^2 = (6)^2 \Rightarrow x = 36 \Rightarrow S = \{36\}$

[2] $\sqrt{y+8} = 3$ بتربيع الطرفين



$(\sqrt{y+8})^2 = (3)^2 \Rightarrow y+8 = 9$

$y = 9 - 8 = 1 \Rightarrow S = \{1\}$

[3] $\sqrt{5z} = 7$ بتربيع الطرفين



$(\sqrt{5z})^2 = (7)^2 \Rightarrow 5z = 49 \} \div 5$

$z = \frac{49}{5} \Rightarrow S = \{\frac{49}{5}\}$

[4] $\sqrt{\frac{x}{13}} = 1$ بتربيع الطرفين



$(\sqrt{\frac{x}{13}})^2 = (1)^2 \Rightarrow \frac{x}{13} = 1$

$x = 13 \Rightarrow S = \{13\}$

تأكد من فهمك

حل المعادلات التالية باستعمال الفرق بين مربعين وتحقق من صحة الحل:

1 $x^2 - 16 = 0$

الحل

$$(x + 4)(x - 4) = 0$$

أما $x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$

أو $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow S = \{-4, 4\}$

تحقق من صحة الحل: نعوض قيم x في المعادلة:

$$x = 4 \Rightarrow x^2 - 16 = (4)^2 - 16 = 16 - 16 = 0$$

$$x = -4 \Rightarrow x^2 - 16 = (-4)^2 - 16 = 16 - 16 = 0$$

2 $81 - y^2 = 0$

الحل

$$(9 + y)(9 - y) = 0$$

أما $9 + y = 0 \Rightarrow y = -9$

أو $9 - y = 0 \Rightarrow y = 9 \Rightarrow S = \{-9, 9\}$

تحقق من صحة الحل: نعوض قيم y في المعادلة:

$$y = 9 \Rightarrow 81 - y^2 = 81 - (9)^2 = 81 - 81 = 0$$

$$y = -9 \Rightarrow 81 - y^2 = 81 - (-9)^2 = 81 - 81 = 0$$

3 $2Z^2 - 8 = 0$

الحل

$$2(Z^2 - 4) = 0 \} \div 2 \Rightarrow Z^2 - 4 = 0 \Rightarrow (Z + 2)(Z - 2) = 0$$

أما $Z + 2 = 0 \Rightarrow Z = -2$

أو $Z - 2 = 0 \Rightarrow Z = 2 \Rightarrow S = \{-2, 2\}$

تحقق من صحة الحل: نعوض قيم Z في المعادلة:

$$Z = 2 \Rightarrow 2Z^2 - 8 = 2(2)^2 - 8 = 8 - 8 = 0$$

$$Z = -2 \Rightarrow 2Z^2 - 8 = 2(-2)^2 - 8 = 8 - 8 = 0$$

حل المعادلات التالية باستعمال الفرق بين مربعين:

4 $4x^2 - 9 = 0$

الحل

$$(2x + 3)(2x - 3) = 0$$

أما $2x + 3 = 0 \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

أو $2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

$$S = \left\{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$$

5 $5y^2 - 20 = 0 \} \div 5$

الحل

$$y^2 - 4 = 0 \Rightarrow (y + 2)(y - 2) = 0$$

أما $y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2$

أو $y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow S = \{-2, 2\}$

6 $(y + 2)^2 - 49 = 0$

الحل

$$(y + 2 + 7)(y + 2 - 7) = 0$$

$$(y + 9)(y - 5) = 0$$

أما $y + 9 = 0 \Rightarrow y = -9$

$y - 5 = 0 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow S =$

أو $\{-9, 5\}$

7 $(3 - Z)^2 - 1 = 0$

الحل

$$(3 - Z + 1)(3 - Z - 1) = 0 \Rightarrow (4 - Z)(2 - Z) = 0$$

أما $4 - Z = 0 \Rightarrow Z = -4$

أو $2 - Z = 0 \Rightarrow Z = 2 \Rightarrow S = \{-4, 2\}$

8 $x^2 - 3 = 0$

الحل

$$(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$$

أما $x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{3}$

أو $x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{3}$

$$\Rightarrow S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$$

9 $y^2 - \frac{1}{9} = 0$

الحل

$$\left(y + \frac{1}{3}\right)\left(y - \frac{1}{3}\right) = 0$$

أما $y + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$

أو $y - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow S = \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$$

حل المعادلات التالية باستعمال قاعدة الجذر التربيعي:

10 $x^2 = 64$

الحل

$$x = \pm\sqrt{64} \Rightarrow x = \pm 8 \Rightarrow S = \{8, -8\}$$

11 $Z^2 = 7$

الحل

$$Z = \pm\sqrt{7} \Rightarrow S = \{\sqrt{7}, -\sqrt{7}\}$$

12 $2y^2 = \frac{49}{8}$

الحل

$$y^2 = \frac{49}{16} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{49}{16}}$$

$$y = \pm\frac{7}{4} \Rightarrow S = \left\{\frac{7}{4}, -\frac{7}{4}\right\}$$

13 $6Z^2 - 5 = 0$

الحل

$$6Z^2 = 5 \Rightarrow Z^2 = \frac{5}{6} \Rightarrow Z = \pm\sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$Z = \pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \Rightarrow S = \left\{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\right\}$$

14 $4(x^2 - 12) = 13$

الحل

$$4x^2 - 48 = 13 \Rightarrow 4x^2 = 13 + 48 \Rightarrow 4x^2 = 63$$

$$x^2 = \frac{63}{4} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{63}{4}}$$

$$x = \pm \frac{3\sqrt{7}}{2} \Rightarrow S = \left\{ \frac{3\sqrt{7}}{2}, -\frac{3\sqrt{7}}{2} \right\}$$

15 $z^2 + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$

الحل

$$z^2 = \frac{5}{6} - \frac{2}{3} \Rightarrow z^2 = \frac{5-4}{6} \Rightarrow z^2 = \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow z = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$$

حل المعادلات التالية:

16 $3\sqrt{x} = 15$

الحل

$$\sqrt{x} = \frac{15}{3} \Rightarrow \sqrt{x} = 5 \quad \text{بتربيع الطرفين}$$

$$(\sqrt{x})^2 = (5)^2 \Rightarrow x = 25 \Rightarrow S = \{25\}$$

18 $\sqrt{2z} = 6$

بتربيع الطرفين

الحل

$$(\sqrt{2z})^2 = (6)^2 \Rightarrow 2z = 36$$

$$z = \frac{36}{2} = 18 \Rightarrow S = \{18\}$$

17 $\sqrt{y-5} = 2$

بتربيع الطرفين

الحل

$$(\sqrt{y-5})^2 = (2)^2 \Rightarrow y-5 = 4$$

$$y = 4 + 5 = 9 \Rightarrow S = \{9\}$$

تدرب وحل التمرينات

حل المعادلات التالية وتحقق من صحة الحل:

19 $x^2 = 49$

الحل

$$x = \pm \sqrt{49} \Rightarrow x = \pm 7 \Rightarrow S = \{7, -7\}$$

تحقق من صحة الحل: نعوض قيم x في المعادلة:

$$x = 7 \Rightarrow x^2 = (7)^2 = 49$$

$$x = -7 \Rightarrow x^2 = (-7)^2 = 49$$

20 $[2] \quad 5y^2 - 10 = 0 \quad \} \div 5$

الحل

$$y^2 - 2 = 0 \Rightarrow y^2 = 2$$

$$y = \pm \sqrt{2} \Rightarrow S = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$$

تحقق من صحة الحل: نعوض قيم y في المعادلة:

$$y = \sqrt{2} \Rightarrow 5y^2 - 10 = 5(\sqrt{2})^2 - 10 = 10 - 10 = 0$$

$$y = -\sqrt{2} \Rightarrow 5y^2 - 10 = 5(-\sqrt{2})^2 - 10 = 10 - 10 = 0$$

حل المعادلات التالية باستعمال الفرق بين مربعين:

21 $9x^2 - 36 = 0$

الحل

$$(3x + 6)(3x - 6) = 0$$

أما $3x + 6 = 0 \Rightarrow 3x = -6 \Rightarrow x = -\frac{6}{3} = -2$

أو $3x - 6 = 0 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{3} = 2$

$$S = \{2, -2\}$$

22 $9(x^2 - 1) - 7 = 0$

الحل

$$9x^2 - 9 - 7 = 0 \Rightarrow 9x^2 - 16 = 0$$

$$(3x + 4)(3x - 4) = 0$$

أما $3x + 4 = 0 \Rightarrow 3x = -4 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$

أو $3x - 4 = 0 \Rightarrow 3x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$

$$\Rightarrow S = \left\{\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right\}$$

23 $y^2 - \frac{1}{36} = 0$

الحل

$$\left(y + \frac{1}{6}\right)\left(y - \frac{1}{6}\right) = 0$$

أما $y + \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{6}$

أو $y - \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{6} \Rightarrow S = \left\{\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right\}$

حل المعادلات التالية باستعمال قاعدة الجذر التربيعي:

24 $x^2 = 121$

الحل

$$x = \pm\sqrt{121} \Rightarrow x = \pm 11 \Rightarrow S = \{11, -11\}$$

25 $50 - 2y^2 = 0 \quad \} \div 2$

الحل

$$25 - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 25 \Rightarrow y = \pm\sqrt{25}$$

$$y = \pm 5 \Rightarrow S = \{5, -5\}$$

26 $x^2 = \frac{1}{64}$

الحل

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{64}} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{8} \Rightarrow S = \left\{\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right\}$$

27 $7(x^2 - 2) = 50$

الحل

$$7x^2 - 14 = 50 \Rightarrow 7x^2 = 50 + 14$$

$$7x^2 = 64 \Rightarrow x^2 = \frac{64}{7} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{64}{7}}$$

$$x = \pm\frac{8}{\sqrt{7}} \Rightarrow S = \left\{\frac{8}{\sqrt{7}}, -\frac{8}{\sqrt{7}}\right\}$$

حل المعادلات التالية:

28 $6\sqrt{x} = 30 \quad \} \div 3$

الحل

$$\sqrt{x} = \frac{30}{6} \Rightarrow \sqrt{x} = 5 \quad \text{بتربيع الطرفين}$$

$$(\sqrt{x})^2 = (5)^2 \Rightarrow x = 25 \Rightarrow S = \{25\}$$

29 $\sqrt{4Z} = 8$ بتربيع الطرفين

الحل

$$(\sqrt{4Z})^2 = (8)^2 \Rightarrow 4Z = 64$$

$$\Rightarrow Z = \frac{64}{4} = 16 \quad S = \{16\}$$

تدرب وحل مسائل حياتية

هذه المسألة تم حلها مع مسائل أخرى في الدرس



14

$$A = 12 \times 3 = 36 \text{ m}^2$$

$$A = x^2 \iff \text{مساحة المربع} = \text{طول الضلع} \times \text{نفسه}$$

$$x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm\sqrt{36} \Rightarrow x = \pm 6$$

نفرض طول ضلع المربع x

مساحة المستطيل = مساحة المربع

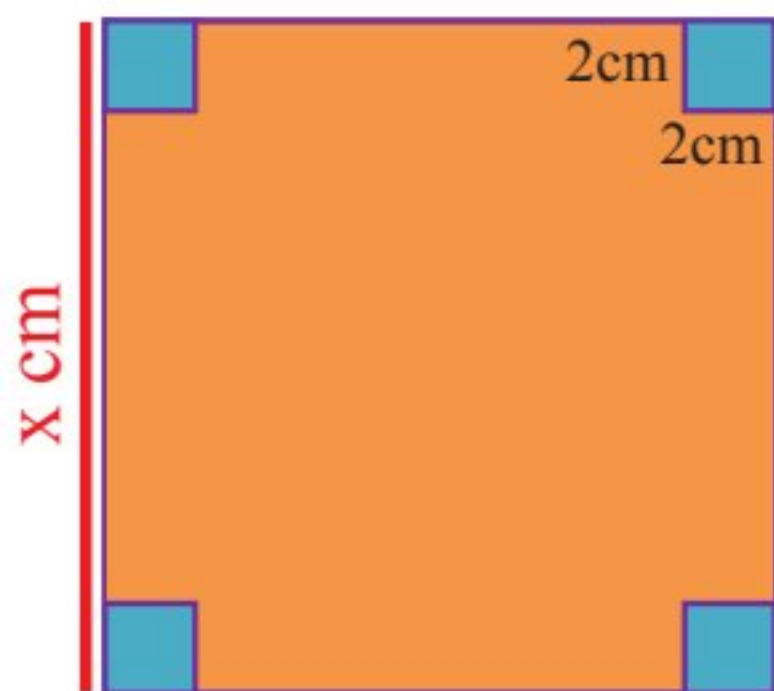
طول ضلع الغرفة 6m

مساحة المستطيل = الطول $\times$ العرض



30

موكيت سجاد: قطعة موكيت سجاد مستطيلة طولها 12m وعرضها 3m، قُطعت إلى أجزاء لتغطية أرضية غرفة مربعة الشكل. أكتب معادلة تمثل المسألة ثم جد طول ضلع الغرفة.



هندسة: قطعة كارتون مربعة الشكل طول ضلعها x cm، قطعت إلى أربعة مربعات متساوية من زواياها طول ضلع كل مربع 2cm، وثُبتت لتكون صندوقاً دون غطاء على شكل متوازي سطوح مستطيلة حجمه 32 cm^3 . أكتب معادلة تمثل المسألة ثم جد طول ضلع قطعة الكارتون الأصلية.

الارتفاع = 2 وبعدي القاعدة $(x - 4)$

حجم متوازي السطوح المستطيلة = الطول $\times$ العرض $\times$ الارتفاع

$$2(x - 4)(x - 4) = 32 \} \div 2$$

$$(x - 4)^2 = 16 \Rightarrow x - 4 = \pm\sqrt{16}$$

$$x - 4 = \pm 4$$

$$\text{أما } x - 4 = 4 \Rightarrow x = 4 + 4 = 8 \text{ cm}$$

$$\text{أو } x - 4 = -4 \Rightarrow x = -4 + 4 = 0 \text{ يهمل}$$

طول ضلع قطعة الكارتون



32 نافورة: صُمِّمَ حوض سباحة مربع الشكل طول ضلعه 3m في منتصف حديقة مربعة الشكل، فكانت المساحة المتبقية من الحديقة والمحيطة بالحوض $40m^2$ ، أكتب معادلة تمثل المسألة ثم جد طول ضلع الحديقة.

الحل

نفرض طول ضلع الحديقة x

المساحة المتبقية = مساحة الحديقة - مساحة الحوض

$$x^2 - 3^2 = 40 \Rightarrow x^2 - 9 = 40 \Rightarrow x^2 = 40 + 9$$

$$x^2 = 49 \Rightarrow x = \pm\sqrt{49} \Rightarrow x = \pm 7$$

طول ضلع الحديقة $x = 7m$ أو $x = -7$ **يهمل** أما

فَكَّرْ

33 تحدّ: حل المعادلات التالية:

الحل

i) $9(x^2 + 1) = 34$

$$9x^2 + 9 - 34 = 0 \Rightarrow 9x^2 - 25 = 0$$

$$(3x + 5)(3x - 5) = 0$$

أما $3x + 5 = 0 \Rightarrow 3x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{3}$

أو $3x - 5 = 0 \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

$$S = \left\{ \frac{5}{3}, -\frac{5}{3} \right\}$$

ii) $4x^2 - 3 = 0$

$$4x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

34 هل المجموعة المعطاة تمثل مجموعة الحل للمعادلة أم لا؟

الحل

i) $2y^2 = \frac{16}{10}$, $\left\{\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}\right\}$

الحل

$$y^2 = \frac{16}{20} \Rightarrow y^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{4}{5}}$$

$$y = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow S = \left\{\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$$

$$\left\{\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}\right\} \text{ لا تمثل مجموعة الحل}$$

ii) $3x^2 - 7 = 0$, $\left\{\frac{7}{\sqrt{3}}, -\frac{7}{\sqrt{3}}\right\}$

$$3x^2 = 7 \Rightarrow x^2 = \frac{7}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{7}{3}}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \Rightarrow S = \left\{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right\}$$

$$\left\{\frac{7}{\sqrt{3}}, -\frac{7}{\sqrt{3}}\right\} \text{ لا تمثل مجموعة الحل}$$

35 **أصحّ الخطأ:** قال صلاح إن المجموعة $\left\{\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}\right\}$ تمثل مجموعة الحل للمعادلة $5x^2 = 4$ اكتشف خطأ صلاح وصحّحه.

الحل

$$5x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{5}}$$

$$x = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow S = \left\{\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$$

36 **حسن عددي:** عدد صحيح موجب من رقم واحد لو أنقص من مربعه واحد لكان الناتج عدد من مضاعفات العشرة. ما العدد؟

الحل

$$x^2 - 1 = 80 \Rightarrow x^2 = 80 + 1$$

$$x^2 = 81 \Rightarrow x = \pm \sqrt{81} \Rightarrow x = \pm 9$$

$$x = -9 \text{ يهمل}$$

$$x = 9 \text{ الصحيح}$$

مجموعة الحل للمعادلة:

فكر

$$(8 - 3y + 1)(8 - 3y - 1) = 0 \Rightarrow (9 - 3y)(7 - 3y) = 0$$

$$\text{أما } 9 - 3y = 0 \Rightarrow 3y = 9 \Rightarrow y = \frac{9}{3} = 3$$

$$\text{أو } 7 - 3y = 0 \Rightarrow 3y = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{3} \Rightarrow S = \left\{3, \frac{7}{3}\right\}$$



شاهد الجزء الأول من هذا الدرس

[3-3] حل المعادلات التربيعية بالتجربة

تحليل المقدار الى قوسين بإشارتين مختلفتين أو متشابهتين بحسب إشارة الحد المطلق (الثالث) والحد الوسط (الثاني)

تعلم

إذا كان طول ملعب كرة السلة يزيد بمقدار $2m$ على ضعف عرضه، ومساحته $480m^2$. فما بُعْدِي الملعب؟



مثال (1)

إيجاد بُعْدِي ملعب كرة السلة.

نفرض أن عرض الملعب بالمتغير x ، ولذا فإن طول الملعب يكون $2x + 2$

مساحة الملعب = الطول $\times$ العرض

يزيد $\leftarrow$ جمع

$$x(2x + 2) = 480 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 480 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 240 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 16)(x - 15) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 16 = 0 \Rightarrow x = -16 \\ \text{or } x - 15 = 0 \Rightarrow x = 15 \end{cases}$$

الحد الأوسط $-15x + 16x = x$

يهمل لأنه لا يوجد طول بالسالب

لذا عرض الملعب $15m$ وطوله $2 \times 15 + 2 = 32m$

مثال (2)

حل المعادلات التالية بالتحليل بالتجربة:

[1] $x^2 - 7x + 12 = 0$



$$(x - 4)(x - 3) = 0$$

$$\text{أما } x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$\text{أو } x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow S = \{4, 3\}$$

[2] $y^2 + 8y + 15 = 0$



$$(y + 5)(y + 3) = 0$$

$$\text{أما } y + 5 = 0 \Rightarrow y = -5$$

$$y + 3 = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow S = \{-5, -3\}$$

[3] $z^2 - z - 30 = 0$



$$(z - 6)(z + 5) = 0$$

$$\text{أما } z - 6 = 0 \Rightarrow z = 6$$

$$\text{أو } z + 5 = 0 \Rightarrow z = -5 \Rightarrow S = \{6, -5\}$$

[4] $x^2 - 2x - 63 = 0$



$$(x - 9)(x + 7) = 0$$

$$\text{أما } x - 9 = 0 \Rightarrow x = 9$$

$$x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7 \Rightarrow S = \{9, -7\}$$

(5) ما العدد الذي مربعه يزيد عليه بمقدار 12؟

$$x^2 - x = 12 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x - 4)(x + 3) = 0$$

$$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ أو } x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

نفرض العدد x ، مربع العدد x^2

يزيد $\Leftarrow$ طرح



[3-3-2] حل المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$



مسبح يقل طوله عن ثلاثة أمثال عرضه بمقدار 1m .
فإذا كانت مساحة المسبح 140 m^2 ، جد أبعاده.

مثال (3)

نفرض عرض الملعب x ، طول الملعب $3x - 1$ ، يقل $\Leftarrow$ طرح

مساحة الملعب = الطول $\times$ العرض

المعادلة التي تمثل المسألة هي $x(3x - 1) = 140$ ، نحل المعادلة:

$$x(3x - 1) = 140 \Rightarrow 3x^2 - x - 140 = 0$$

$$\Rightarrow (3x + 20)(x - 7) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 20 = 0 \Rightarrow x = -\frac{20}{3} \\ \text{or } x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7 \end{cases}$$

يهمل لأنه لا يوجد طول بالسالب

لذا عرض المسبح 7m وطوله 20m

شاهد الجزء الثاني من هذا الدرس



7

ملاحظات مهمة عن مسائل الفرضية

- [1] كلمة يزيد في مسائل مالمعد $\Leftarrow$ عملية طرح
- [2] كلمة يزيد في مسائل الطول والعرض $\Leftarrow$ عملية جمع
- [3] كلمة يقل أو ينقص $\Leftarrow$ عملية طرح
- [4] كلمة تصغير $\Leftarrow$ عملية طرح
- [5] كلمة أضيف إليه $\Leftarrow$ عملية جمع
- [6] كلمة مثليه أو مثلي $\Leftarrow 2x$
- [7] كلمات ثلاثة أمثاله أو أربعة أمثاله الخ $\Leftarrow 3x, 4x$
- [8] كلمة مربعة $\Leftarrow x^2$
- [9] كلمة ضعفة $\Leftarrow 2x$

مثال (4) حل المعادلات التالية بالتحليل بالتجربة:

[1] $4y^2 - 14y + 6 = 0$

الحل

$(4y - 2)(y - 3) = 0$

أما $4y - 2 = 0 \Rightarrow 4y = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

أو $y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow S = \left\{3, \frac{1}{2}\right\}$

[2] $3x^2 + 18x - 21 = 0$

الحل

$(x + 7)(3x - 3) = 0$

أما $x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7$

$3x - 3 = 0 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{3} = 1$

أو

$S = \{1, -7\}$

[3] $20 + 13Z + 2Z^2 = 0$

الحل

$(4 + Z)(5 + 2Z) = 0$

أما $4 + Z = 0 \Rightarrow Z = -4$

أو $5 + 2Z = 0 \Rightarrow 2Z = -5 \Rightarrow Z = -\frac{5}{2}$

$S = \left\{-4, -\frac{5}{2}\right\}$

[4] $9x^2 - 69x - 24 = 0 \} \div 3$

الحل

$3x^2 - 23x - 8 = 0 \Rightarrow (x - 8)(3x + 1) = 0$

أما $x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8$

أو $3x + 1 = 0 \Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

$S = \left\{8, -\frac{1}{3}\right\}$

تأكد من فهمك

حل المعادلات التالية بالتحليل بالتجربة:

1 $x^2 - 9x + 18 = 0$

الحل

$(x - 6)(x - 3) = 0$

أما $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$

أو $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow S = \{6, 3\}$

2 $x^2 - 4x - 32 = 0$

الحل

$(x - 8)(x + 4) = 0$

أما $x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8$

أو $x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow S = \{8, -4\}$

3 $y^2 + 48y - 49 = 0$

الحل

$(y + 49)(y - 1) = 0$

أما $y + 49 = 0 \Rightarrow y = -49$

أو $y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow S = \{1, -49\}$

4 $x^2 - 9x - 36 = 0$

الحل

$(x - 12)(x + 3) = 0$

أما $x - 12 = 0 \Rightarrow x = 12$

أو $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow S = \{12, -3\}$

5 $x^2 - 3x + 2 = 0$

الحل

$$(x - 2)(x - 1) = 0$$

أما $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

أو $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow S = \{1, 2\}$

6 $y^2 - 8y - 33 = 0$

الحل

$$(y - 11)(y + 3) = 0$$

أما $y - 11 = 0 \Rightarrow y = 11$

أو $y + 3 = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow S = \{11, -3\}$

7 ما العدد الذي مربعه يزيد على ضعفه بمقدار 35 ؟

الحل

نفرض العدد هو x ، مربع العدد x^2

ضعف العدد $2x$ ، يزيد $\Leftarrow$ طرح

$$x^2 - 2x = 35 \Rightarrow x^2 - 2x - 35 = 0$$

$$(x - 7)(x + 5) = 0$$

أما $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$

أو $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5 \Rightarrow S = \{7, -5\}$

8 ما العدد الذي لو أضيف 4 أمثاله إلى مربعه لكان الناتج 45 ؟

الحل

نفرض العدد هو x ، مربع العدد x^2

أربعة أضعاف العدد $4x$ ، أضيف $\Leftarrow$ جمع

$$x^2 + 4x = 45 \Rightarrow x^2 + 4x - 45 = 0$$

$$(x + 9)(x - 5) = 0$$

أما $x + 9 = 0 \Rightarrow x = -9$

أو $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow S = \{5, -9\}$

9 سجادة طولها يزيد على عرضها بمقدار 2m ومساحتها $48m^2$. ما أبعاد السجادة؟

الحل

نفرض عرض السجادة x ، طول السجادة $x + 2$

يزيد $\Leftarrow$ جمع

مساحة السجادة = الطول $\times$ العرض

$$x(x + 2) = 48 \Rightarrow x^2 + 2x - 48 = 0$$

$$(x + 8)(x - 6) = 0$$

أما $x + 8 = 0 \Rightarrow x = -8$ **يهمل**

أو $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6m$ عرض السجادة

طول السجادة $x + 2 = 6 + 2 = 8m$

10 $15x^2 - 11x - 14 = 0$



$$(5x - 7)(3x + 2) = 0$$

أما $5x - 7 = 0 \Rightarrow 5x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{5}$

أو $3x + 2 = 0 \Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$

$$S = \left\{ \frac{7}{5}, -\frac{2}{3} \right\}$$

12 $42 + 64y + 24y^2 = 0 \} \div 2$



$$21 + 32y + 12y^2 = 0$$

$$(3 + 2y)(7 + 6y) = 0$$

أما $3 + 2y = 0 \Rightarrow 2y = -3 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$

أو $7 + 6y = 0 \Rightarrow 6y = -7 \Rightarrow y = -\frac{7}{6}$

$$S = \left\{ -\frac{7}{6}, -\frac{3}{2} \right\}$$

11 $6 + 7x - 5x^2 = 0$



$$(3 + 5x)(2 - x) = 0$$

أما $3 + 5x = 0 \Rightarrow 5x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{5}$

أو $2 - x = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow S = \left\{ 2, -\frac{3}{5} \right\}$

13 $36 - 75x + 6x^2 = 0 \} \div 3$



$$12 - 25x + 2x^2 = 0 \Rightarrow (12 - x)(1 - 2x) = 0$$

أما $12 - x = 0 \Rightarrow x = 12$

أو $1 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$$S = \left\{ 12, \frac{1}{2} \right\}$$

14 $70 - 33y + 2y^2 = 0 \Rightarrow (5 - 2y)(14 - y) = 0$



أما $5 - 2y = 0 \Rightarrow 2y = 5 \Rightarrow y = \frac{5}{2}$

أو $14 - y = 0 \Rightarrow y = 14 \Rightarrow S = \left\{ 14, \frac{5}{2} \right\}$

15 أرض مستطيلة الشكل يزيد طولها بمقدار 4m على عرضها. ما بُعد الأرض إذا

كانت مساحتها $60m^2$ ؟

$$x(x + 4) = 60 \Rightarrow x^2 + 4x - 60 = 0$$

$$(x + 10)(x - 6) = 0$$

أما $x + 10 = 0 \Rightarrow x = -10$ **يهمل**

أو $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6m$ **العرض**

$x + 4 = 6 + 4 = 10m$ **الطول**

نفرض العرض x الطول $x + 4$

يزيد ← جمع

مساحة المستطيل = الطول × العرض



تدرب وحل التمرينات

حل المعادلات التالية بالتحليل بالتجربة:

16 $x^2 - 15x + 56 = 0$

الحل

$(x - 8)(x - 7) = 0$

أما $x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8$

أو $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow S = \{8, 7\}$

17 $y^2 + 16y + 63 = 0$

الحل

$(y + 9)(y + 7) = 0$

أما $y + 9 = 0 \Rightarrow y = -9$

$y + 7 = 0 \Rightarrow y = -7 \Rightarrow S = \{-9, -7\}$

18 $x^2 + 15x - 16 = 0$

الحل

$(x + 16)(x - 1) = 0$

أما $x + 16 = 0 \Rightarrow x = -16$

أو $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow S = \{1, -16\}$

19 $y^2 - y - 42 = 0$

الحل

$(y - 7)(y + 6) = 0$

أما $y - 7 = 0 \Rightarrow y = 7$

أو $y + 6 = 0 \Rightarrow y = -6 \Rightarrow S = \{7, -6\}$

20 قطعة معدن مستطيلة الشكل ينقص عرضها بمقدار 2m عن طولها. ما بُعدا القطعة المعدنية إذا كانت مساحتها $24m^2$ ؟

الحل نفرض طول القطعة x ، عرض القطعة $x - 2$ ، ينقص ← طرح

مساحة القطعة = الطول × العرض $x(x - 2) = 24 \Rightarrow x^2 - 2x - 24 = 0$

$(x - 6)(x + 4) = 0$

أما $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6m$ طول القطعة

أو $x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$ يهمل

عرض القطعة $x - 2 = 6 - 2 = 4m$

21 صالة طعام ينقص طولها عن مثلي عرضها بمقدار 3m ومساحتها $54m^2$. ما أبعاد الصالة؟

نفرض عرض الصالة = x ، مثلي عرضها = $2x$

طول الصالة = $2x - 3$ ، ينقص $\Leftarrow$ طرح

$$x(2x - 3) = 54 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 54 = 0$$

$$(x - 6)(2x + 9) = 0$$

مساحة الصالة = الطول $\times$ العرض

$$x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6m \quad \text{عرض الصالة}$$

$$2x + 9 = 0 \Rightarrow 2x = -9 \Rightarrow x = -\frac{9}{2} \quad \text{يهمل}$$

$$2x - 3 = 2(6) - 3 = 12 - 3 = 9m \quad \text{طول الصالة}$$

جد مجموعة الحل للمعادلات التالية وتحقق من صحة الحل:

22 $x^2 - 4x + 3 = 0$

$$(x - 3)(x - 1) = 0$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \quad \text{أما}$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow S = \{3, 1\} \quad \text{أو}$$

تحقق من صحة الحل: نعوض قيم x بالمعادلة:

$$x = 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = (3)^2 - 4(3) + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = (1)^2 - 4(1) + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$$

23 $y^2 - 9y - 36 = 0$

$$(y - 12)(y + 3) = 0$$

$$y - 12 = 0 \Rightarrow y = 12 \quad \text{أما}$$

$$y + 3 = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow S = \{12, -3\} \quad \text{أ}$$

تحقق من صحة الحل: نعوض قيم y بالمعادلة:

$$y = 12 \Rightarrow y^2 - 9y - 36 = (12)^2 - 9(12) - 36 = 144 - 108 - 36 = 0$$

$$y = -3 \Rightarrow y^2 - 9y - 36 = (-3)^2 - 9(-3) - 36 = 9 + 27 - 36 = 0$$

24 $4 - 26x + 12x^2 = 0$

$$(4 - 2x)(1 - 6x) = 0$$

$$4 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{أما}$$

$$1 - 6x = 0 \Rightarrow 6x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{6} \quad \text{أو}$$

تدرب وحل مسائل حياتية



25 رياضة: إذا كان طول صورة إعلانية لملاعب كرة القدم يزيد بمقدار 4m على ضعف عرضها، فما بعدا الصورة إذا كانت مساحتها 160 m^2 ؟ **الحل**

نفرض عرض الصورة x ، ضعف العرض $2x$ ، طول الصورة $2x + 4$ ، يزيد $\Rightarrow$ جمع

هذه المسألة تم حلها مع مسائل أخرى في الدرس



15

$$\begin{aligned} x(2x + 4) &= 160 \\ 2x^2 + 4x - 160 &= 0 \} \div 2 \\ x^2 + 2x - 80 &= 0 \\ (x + 10)(x - 8) &= 0 \\ x + 10 = 0 &\Rightarrow x = -10 \quad \text{يهمل} \\ x - 8 = 0 &\Rightarrow x = 8 \text{m} \quad \text{عرض الصورة} \\ 2x + 4 &= 2(8) + 4 = 16 + 4 = 20 \text{m} \quad \text{طول الصورة} \end{aligned}$$

المساحة = الطول $\times$ العرض



26 حقل نعام: إذا كان طول حقل لتربية طيور النعام يقل بمقدار 4m عن ضعف عرضه، فإذا كانت مساحة الحقل 96 m^2 ، فهل يكفي سياج طوله 44m لتحويط الحقل؟ **الحل**

نفرض عرض الحقل x ، ضعف العرض $2x$ ، طول الحقل $2x - 4$ ، يقل $\Rightarrow$ طرح

$$\begin{aligned} x(2x - 4) &= 96 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 96 = 0 \} \div 2 \\ x^2 - 2x - 48 &= 0 \Rightarrow (x + 6)(x - 8) = 0 \\ x + 6 = 0 &\Rightarrow x = -6 \quad \text{يهمل} \\ x - 8 = 0 &\Rightarrow x = 8 \text{m} \quad \text{عرض} \\ 2x - 4 &= 2(8) - 4 = 16 - 4 = 12 \text{m} \quad \text{طول الحقل} \end{aligned}$$

محيط المستطيل = $2 \times (\text{الطول} + \text{العرض})$

$$P = 2 \times (12 + 8) = 2 \times 20 = 40 \text{m} \quad \text{نعم يكفي}$$



27

إطار صورة: اشترى سامر إطار لصورة، طوله ضعف عرضه. يحتاج سامر إلى تصغير الإطار بمقدار 2cm من طوله وعرضه ليصبح مناسباً للصورة، فما أبعاد الإطار الذي اشتراه سامر، إذا كانت مساحة الصورة 40cm^2 ؟

الحل

تصغير $\Leftarrow$ عملية طرح

نفرض عرض الإطار x ، طول الإطار $2x$ ،

بعد التصغير يصبح: العرض $(x - 2)$ ، الطول $(2x - 2)$

المساحة = الطول $\times$ العرض

$$(2x - 2)(x - 2) = 40$$

$$2x^2 - 4x - 2x + 4 - 40 = 0$$

$$2x^2 - 6x - 36 = 0 \quad \} \div 2 \Rightarrow x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$(x - 6)(x + 3) = 0$$

$$\text{أما } x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6\text{m}$$

$$\text{أو } x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

$$2x = 2(6) = 12\text{m} \quad \text{طول}$$

العرض

يهمل

فَكَّرْ

28

تحذّر: حل المعادلات التالية بالتحليل بالتجربة:

i) $(x - 3)(x + 2) = 14$

الحل

$$x^2 + 2x - 3x - 6 - 14 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 20 = 0$$

$$(x - 5)(x + 4) = 0$$

$$\text{أما } x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$$

$$\text{أو } x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$$

$$\Rightarrow S = \{5, -4\}$$

ii) $3y^2 - 11y + 10 = 80$

الحل

$$3y^2 - 11y + 10 - 80 = 0$$

$$3y^2 - 11y - 70 = 0 \Rightarrow (y - 7)(3y + 10) = 0$$

$$\text{أما } y - 7 = 0 \Rightarrow y = 7$$

$$\text{أو } 3y + 10 = 0 \Rightarrow 3y = -10 \Rightarrow y = -\frac{10}{3}$$

$$S = \left\{7, -\frac{10}{3}\right\}$$

28 **وضّح:** هل أن المجموعة المعطاة تمثل مجموعة حل للمعادلة أم لا؟

i) $4x^2 + 2x = 30$, $\{-\frac{2}{5}, 3\}$

الحل

$$(2x + 6)(2x - 5) = 0$$

أما $2x - 6 = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$

أو $2x - 5 = 0 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

$S = \{\frac{5}{2}, 3\}$ لا تمثل مجموعة حل

ii) $42 - 33y + 6y^2 = 0$, $\{2, \frac{7}{2}\}$

الحل

$$(7 - 2y)(6 - 3y) = 0$$

أما $7 - 2y = 0 \Rightarrow 2y = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{2}$

أو $6 - 3y = 0 \Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{3} = 2$

$S = \{2, \frac{7}{2}\}$ تمثل مجموعة حل

29 **أصحّ الخطأ:** قالت رنا إن مجموعة الحل للمعادلة $2x^2 - 34x + 60 = 0$ هي $\{3, 15\}$.

أحدّد خطأ رنا وأصحّحه.

الحل

$$(2x - 4)(x - 15) = 0$$

أما $2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{2} = 2$

أو $x - 15 = 0 \Rightarrow x = 15 \Rightarrow S = \{2, 15\}$

خطأ رنا مجموعة الحل.

معادلة تمثل المسألة التالية ثم جد حلها:
ما العدد الذي ينقص ضعفه عن مربعه بمقدار 35؟

أكتب

الحل نفرض العدد x , ضعف العدد $2x$, مربع العدد x^2 , ينقص $\Leftarrow$ طرح

$$x^2 - 2x = 35 \Rightarrow x^2 - 2x - 35 = 0$$

$$(x - 7)(x + 5) = 0$$

أما $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$

أو $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5 \Rightarrow S = \{7, -5\}$

هذا السؤال تم حله مع
مسائل أخرى في الدرس



شاهد هذا الدرس على يوتيوب



8

الدرس 3-4 حل المعادلات التربيعية بالمربع الكامل

[3-4-1] حل المعادلات التربيعية بالمربع الكامل

تعرفت سابقاً كيفية تحليل مقدار جبري على هيئة مربع كامل والآن سوف نستخدم هذا التحليل في حل معادلات بالتحليل بالمربع الكامل لإيجاد مجموعة الحل للمعادلة. أي أن:

$$ax^2 + bx + c = (\sqrt{ax^2} \pm \sqrt{c})^2$$

حيث الإشارة $\pm$ حسب إشارة الحد الوسط (الثاني).

التحليل على هيئة $(\text{جذر الحد الأخير} \pm \text{جذر الحد الأول})$ حسب إشارة الحد الثاني أو الوسط

تعلم

الجاكوار (Panthera onca) هو أحد السنوريات الكبرى المنتمية لجنس النمر، جد قيمة x من المعادلة $x^2 - 20x + 100 = 0$ والتي تمثل طول ضلع المنطقة المربعة المحددة له بالمتري المربع في حديقة الحيوانات.

ما المقدار الذي يمثل طول ضلع المنطقة المربعة؟

مثال (1)

$$x^2 - 20x + 100 = 0 \quad (\text{جذر الحد الأخير} \pm \text{جذر الحد الأول})$$

إشارة الحد الوسط $\rightarrow$ إشارة الحد الأوسط $\Rightarrow x - 10 = 0 \Rightarrow x = 10$

طول ضلع المنطقة المربعة المخصصة للنمر هو: 10m

مثال (2) حل المعادلات التالية بالمربع الكامل:

[1] $4x^2 + 20x + 25 = 0$



$$(2x + 5)^2 = 0 \Rightarrow 2x + 5 = 0$$

$$2x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$$

[2] $y^2 - y + \frac{1}{4} = 0$



$$\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow y - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

[3] $3 - 6\sqrt{3}z + 9z^2 = 0$



$$(\sqrt{3} - 3z)^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{3} - 3z = 0 \Rightarrow 3z = \sqrt{3} \Rightarrow z = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

شاهد هذا الدرس على يوتيوب



9

[3-4-2] حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع

خطوات الحل :

- (1) نضع المعادلة التربيعية بالصورة $ax^2 + bx = -c$ ، حيث $a \neq 0$.
- (2) إذا كان $a \neq 1$ فنقسم المعادلة على a .
- (3) نضيف إلى طرفي المعادلة المقدار (مربع نصف معامل x) .
- (4) نحلل الطرف الأيسر الذي أصبح مربعاً كاملاً بعد الخطوة 3 ، ونبسّط .
- (5) نأخذ الجذر التربيعي للطرفين ونجد قيم x .

مثال (3) حل المعادلات التالية بطريقة إكمال المربع:

i) $x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 12$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 12 + 4$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 16 \Rightarrow (x - 2)^2 = 16$

$\Rightarrow x - 2 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 4 \Rightarrow x = 6 \\ \text{or } x - 2 = -4 \Rightarrow x = -2 \end{cases} \Rightarrow S = \{6, -2\}$

نكتب المعادلة كما في الخطوة الأولى

إضافة المقدار $(\frac{1}{2} \times -4)^2 = 4$ إلى طرفي المعادلة

نأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة

ii) $2y^2 - 3 = 3y \Rightarrow 2y^2 - 3y = 3$

$\Rightarrow y^2 - \frac{3}{2}y = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{9}{16} = \frac{3}{2} + \frac{9}{16}$

$\Rightarrow (y - \frac{3}{4})^2 = \frac{33}{16}$

$\Rightarrow y - \frac{3}{4} = \pm \frac{\sqrt{33}}{4}$

$\Rightarrow \begin{cases} y - \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{33}}{4} \Rightarrow y = \frac{3 + \sqrt{33}}{4} \\ \text{or } y - \frac{3}{4} = -\frac{\sqrt{33}}{4} \Rightarrow y = \frac{3 - \sqrt{33}}{4} \end{cases} \Rightarrow S = \left\{ \frac{3 - \sqrt{33}}{4}, \frac{3 + \sqrt{33}}{4} \right\}$

نكتب المعادلة كما في الخطوة الأولى

بقسمة طرفي المعادلة على 2

إضافة المقدار $(\frac{1}{2} \times -\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{16}$ إلى طرفي المعادلة

بتحليل الطرف الأيسر ونبسّط الطرف الأيمن للمعادلة

نأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة

مثال (4)

مستطيل يزيد طوله على عرضه بمقدار 2cm ، قدر طول المستطيل وعرضه بالتقريب لأقرب عدد صحيح إذا كانت مساحته 36cm^2 .

نفرض عرض المستطيل x ، طول المستطيل $x + 2$

مساحة المستطيل = الطول $\times$ العرض

$$x(x + 2) = 36 \Rightarrow x^2 + 2x = 36$$

$$\left(\frac{1}{2} \times 2\right)^2 = (1)^2 = 1 \quad \text{نضيف الى طرفي المعادلة}$$

$$x^2 + 2x + 1 = 36 + 1$$

$$(x + 1)^2 = 37 \quad \text{بأخذ الجذر التربيعي للطرفين}$$

$$x + 1 = \pm\sqrt{37} \Rightarrow x + 1 \approx \pm 6$$

$$\text{أما } x + 1 \approx 6 \Rightarrow x \approx 6 - 1 \approx 5\text{cm} \quad \text{عرض المستطيل}$$

$$\text{أو } x + 1 \approx -6 \Rightarrow x \approx -6 - 1 = -7 \quad \text{يهمل}$$

$$x + 2 = 5 + 2 = 7\text{ cm} \quad \text{طول المستطيل}$$

تأكد من فهمك

حل المعادلات التالية بالمربع الكامل:

1 $x^2 + 12x + 36 = 0$  $(x + 6)^2 = 0 \Rightarrow x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6$	2 $y^2 - 10y + 25 = 0$  $(y - 5)^2 = 0 \Rightarrow y - 5 = 0 \Rightarrow y = 5$
3 $4x^2 - 4x + 1 = 0$  $(2x - 1)^2 = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0$ $2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$	4 $y^2 + 2\sqrt{7}y + 7 = 0$  $(y + \sqrt{7})^2 = 0 \Rightarrow y + \sqrt{7} = 0$ $\Rightarrow y = -\sqrt{7}$
5 $x^2 + 16x = -64$  $x^2 + 16x + 64 = 0 \Rightarrow (x + 8)^2 = 0$ $x + 8 = 0 \Rightarrow x = -8$	6 $\frac{1}{16} - \frac{1}{2}x + x^2 = 0$  $\left(\frac{1}{4} - x\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{4} - x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

7 $x^2 - 10x - 24 = 0$

الحل

$$x^2 - 10x = 24$$

$$\left(\frac{1}{2} \times 10\right)^2 = (5)^2 = 25$$

نضيف الى طرفي المعادلة

$$x^2 - 10x + 25 = 24 + 25$$

$$(x - 5)^2 = 49 \quad \text{بأخذ الجذر التربيعي للطرفين}$$

$$x - 5 = \pm 7$$

$$\text{أما } x - 5 = 7 \Rightarrow x = 7 + 5 = 12$$

$$\text{أو } x - 5 = -7 \Rightarrow x = -7 + 5 = -2$$

$$S = \{12, -2\}$$

8 $y^2 - 3 = 2y$

الحل

$$y^2 - 2y = 3$$

$$\left(\frac{1}{2} \times 2\right)^2 = (1)^2 = 1 \quad \text{نضيف الى طرفي المعادلة}$$

$$y^2 - 2y + 1 = 3 + 1$$

$$(y - 1)^2 = 4 \quad \text{بأخذ الجذر التربيعي للطرفين}$$

$$y - 1 = \pm 2$$

$$\text{أما } y - 1 = 2 \Rightarrow y = 2 + 1 = 3$$

$$\text{أو } y - 1 = -2 \Rightarrow y = -2 + 1 = -1$$

$$S = \{3, -1\}$$

9 $4x^2 - 3x - 16 = 0$

الحل

$$4x^2 - 3x = 16 \quad \div 4 \Rightarrow x^2 - \frac{3}{4}x = 4$$

$$\left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64} \quad \text{نضيف الى طرفي المعادلة}$$

$$x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{9}{64} = 4 + \frac{9}{64}$$

$$\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{14}{25} \quad \text{بأخذ الجذر التربيعي للطرفين}$$

$$x - \frac{3}{8} = \pm \frac{\sqrt{14}}{5}$$

$$\text{أما } x - \frac{3}{8} = \frac{\sqrt{14}}{5} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{14}}{5} + \frac{3}{8} = \frac{\sqrt{14} + 3}{5}$$

$$\text{أو } x - \frac{3}{8} = -\frac{\sqrt{14}}{5} \Rightarrow x = \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{14}}{5} = \frac{3 - \sqrt{14}}{5}$$

$$S = \left\{\frac{\sqrt{14} + 3}{5}, \frac{3 - \sqrt{14}}{5}\right\}$$

10 $3y^2 + 2y = 1$

الحل

$$3y^2 + 2y = 1 \quad \div 3 \Rightarrow y^2 + \frac{2}{3}y = \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \quad \text{نضيف الى طرفي المعادلة}$$

$$y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$$

$$\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{3 + 1}{9}$$

$$\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \quad \text{بأخذ الجذر التربيعي للطرفين}$$

$$y + \frac{1}{3} = \pm \frac{2}{3}$$

$$\text{أما } y + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{أو } y + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \Rightarrow y = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = -1$$

$$S = \left\{\frac{1}{3}, -1\right\}$$

11 $x^2 - \frac{6}{5}x = \frac{1}{5}$

الحل

$\left(\frac{1}{2} \times \frac{6}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{9}{25} = \frac{1}{5} + \frac{9}{25} \Rightarrow \left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{5+9}{25}$

$x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{9}{64} = 4 + \frac{9}{64}$

$\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{265}{64}$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x - \frac{3}{8} = \pm \frac{\sqrt{265}}{8}$

أما $x - \frac{3}{8} = \frac{\sqrt{265}}{8} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{265}}{8} + \frac{3}{8} = \frac{\sqrt{265} + 3}{8}$

أو $x - \frac{3}{8} = -\frac{\sqrt{265}}{8} \Rightarrow x = \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{265}}{8} = \frac{3 - \sqrt{265}}{8}$

$S = \left\{ \frac{\sqrt{265} + 3}{8}, \frac{3 - \sqrt{265}}{8} \right\}$

12 $5y^2 + 15y - 30 = 0$

الحل

$5y^2 + 15y = 30 \} \div 5 \Rightarrow y^2 + 3y = 6$

$\left(\frac{1}{2} \times 3\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ نضيف الى طرفي المعادلة

$y^2 + 3y + \frac{9}{4} = 6 + \frac{9}{4}$

$\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{33}{4}$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$y + \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{33}}{2}$

أما $y + \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{33}}{2} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{33}}{2} - \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{33} - 3}{2}$

أو $y + \frac{3}{2} = -\frac{\sqrt{33}}{2} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{33}}{2} - \frac{3}{2} = \frac{-\sqrt{33} - 3}{2}$

$S = \left\{ \frac{\sqrt{33} - 3}{2}, \frac{-\sqrt{33} - 3}{2} \right\}$

تدرب وحل التمرينات

حل المعادلات التالية بالمربع الكامل:

13 $x^2 + 24x + 144 = 0$

الحل

$(x + 12)^2 = 0 \Rightarrow x + 12 = 0 \Rightarrow x = -12$

14 $y^2 + 4\sqrt{2}y + 8 = 0$

الحل

$(y + 2\sqrt{2})^2 = 0 \Rightarrow y + 2\sqrt{2} = 0$
 $y = -2\sqrt{2}$

15 $3y^2 + 36 - 12\sqrt{3}y = 0 \Rightarrow 3y^2 - 12\sqrt{3}y + 36 = 0 \Rightarrow (\sqrt{3}y - 6)^2 = 0$

الحل

$\Rightarrow \sqrt{3}y - 6 = 0 \Rightarrow \sqrt{3}y = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{\sqrt{3}}$

حل المعادلات التالية بإكمال المربع:

16 $y^2 + 2\sqrt{3}y = 3$

الحل

$$\left(\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3}\right)^2 = (\sqrt{3})^2$$

$$= 3 \quad \text{نضيف الى طرفي المعادلة}$$

$$y^2 + 2\sqrt{3}y + 3 = 3 + 3$$

$$(y + \sqrt{3})^2 = 6 \quad \text{بأخذ الجذر التربيعي للطرفين}$$

$$y + \sqrt{3} = \pm\sqrt{6}$$

$$\text{أما } y + \sqrt{3} = \sqrt{6} \Rightarrow y = \sqrt{6} - \sqrt{3}$$

$$\text{أو } y + \sqrt{3} = -\sqrt{6} \Rightarrow y = -\sqrt{6} - \sqrt{3}$$

$$S = \{\sqrt{6} + \sqrt{3}, -\sqrt{6} - \sqrt{3}\}$$

17 $x^2 - 2x = 0$

الحل

$$\left(\frac{1}{2} \times 2\right)^2 = (1)^2 = 1 \quad \text{نضيف الى طرفي المعادلة}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 1$$

$$(x - 1)^2 = 1 \quad \text{بأخذ الجذر التربيعي للطرفين}$$

$$x - 1 = \pm 1$$

$$\text{أما } x - 1 = 1 \Rightarrow x = 1 + 1 = 2$$

$$\text{أو } x - 1 = -1 \Rightarrow x = -1 + 1 = 0$$

$$S = \{2, 0\}$$

18 $x^2 - \frac{2}{3}x = 4$

الحل

$$\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \quad \text{نضيف الى طرفي المعادلة}$$

$$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 4 + \frac{1}{9}$$

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{37}{9} \quad \text{بأخذ الجذر التربيعي للطرفين}$$

$$x - \frac{1}{3} = \pm \frac{\sqrt{37}}{3}$$

$$\text{أما } x - \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{37}}{3} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{37}}{3} + \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{37} + 1}{3}$$

$$\text{أو } x - \frac{1}{3} = -\frac{\sqrt{37}}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{37}}{3} = \frac{1 - \sqrt{37}}{3} \quad S = \left\{\frac{\sqrt{37} + 1}{3}, \frac{1 - \sqrt{37}}{3}\right\}$$

حل المعادلات التالية بإكمال المربع، وجد الناتج بالتقريب لأقرب عدد صحيح:

19 $x^2 - 6x = 15$

الحل

$$\left(\frac{1}{2} \times 6\right)^2 = (3)^2 = 9 \quad \text{نضيف الى طرفي المعادلة}$$

$$x^2 - 6x + 9 = 15 + 9$$

$$(x - 3)^2 = 24 \quad \text{بأخذ الجذر التربيعي للطرفين}$$

$$x - 3 \approx \pm 5$$

$$\text{أما } x - 3 \approx 5 \Rightarrow x \approx 5 + 3 \approx 8$$

$$\text{أو } x - 3 \approx -5 \Rightarrow x \approx -5 + 3 \approx -2 \quad S = \{8, -2\}$$

20 $y(2y + 28) = 28$



$$2y^2 + 28y = 28 \quad \Rightarrow \quad y^2 + 14y = 14$$

$$\left(\frac{1}{2} \times 14\right)^2 = (7)^2 = 49 \quad \text{نضيف الى طرفي المعادلة}$$

$$y^2 + 14y + 49 = 14 + 49$$

$$(y + 7)^2 = 63 \quad \text{بأخذ الجذر التربيعي للطرفين}$$

$$y + 7 = \pm 8$$

$$\text{أما } y + 7 = 8 \Rightarrow y = 8 - 7 = 1$$

$$\text{أو } y + 7 = -8 \Rightarrow y = -8 - 7 = -15 \Rightarrow S = \{1, -15\}$$

هذه المسألة تم حلها مع
مسائل أخرى في الدرس



15

تدرب وحل مسائل حياتية

21 **مدينة بابل:** مدينة بابل باللاتينية Babylon هي مدينة عراقية كانت تقع على نهر الفرات، وكانت عاصمة البابليين أيام حكم حمورابي سنة (1750 - 1792) قبل الميلاد. جد قيمة x من المعادلة $x^2 - 28x + 196 = 0$ والتي تمثل طول ضلع إحدى القاعات المربعة الشكل.



$$x^2 - 28x + 196 = 0 \Rightarrow (x - 14)^2 = 0$$

$$x - 14 = 0 \Rightarrow x = 14 \quad \text{طول ضلع القاعة}$$



22 **دب الباندا:** المساحة المخصصة لدب الباندا في حديقة الحيوانات مستطيلة الشكل 126 متراً مربعاً، وعرضها يقل بمقدار 8 متر عن طولها. جد أبعاد المنطقة المخصصة للدب بالتقريب لأقرب عدد صحيح.



نفرض الطول x ، العرض $x - 8$

المساحة = الطول $\times$ العرض

$$x(x - 8) = 126 \Rightarrow x^2 - 8x = 126$$

$$\left(\frac{1}{2} \times 8\right)^2 = (4)^2 = 16 \quad \text{نضيف الى طرفي المعادلة}$$

$$x^2 - 8x + 16 = 126 + 16$$

$$(x - 4)^2 = 142 \quad \text{بأخذ الجذر التربيعي للطرفين}$$

$$x - 4 \approx \pm 12$$

$$\text{أما } x - 4 \approx 12 \Rightarrow x \approx 12 + 4 \approx 16 \quad \text{الطول}$$

$$\text{أو } x - 4 \approx -12 \Rightarrow x \approx -12 + 4 \approx -8 \quad \text{يهمل}$$

$$\text{العرض } x - 8 = 16 - 8 = 8$$



23 حيتان: تجنح بعض المجموعات من الحيتان إلى الشاطئ ولا يوجد تفسير علمي لهذه الظاهرة، ويحاول حماة البيئة إرجاعها إلى البحر. حل المعادلة $x^2 + 20x = 525$ بطريقة إكمال المربع لإيجاد قيمة x التي تمثل عدد الحيتان التي جنحت إلى أحد شواطئ أستراليا.

الحل

$$\left(\frac{1}{2} \times 20\right)^2 = (10)^2 = 100 \quad \text{نضيف الى طرفي المعادلة}$$

$$x^2 + 20x + 100 = 525 + 100$$

$$(x + 10)^2 = 625 \quad \text{بأخذ الجذر التربيعي للطرفين}$$

$$x + 10 = \pm 25$$

$$\text{أما } x + 10 = 25 \Rightarrow x = 25 - 10 = 15$$

$$\text{أو } x + 10 = -25 \Rightarrow x = -25 - 10 = -35 \quad \text{يهمل}$$

عدد الحيتان هو 15

فكّر

24 تحدّ: حل المعادلات التالية في R بإكمال المربع، وجد الناتج بالتقريب لأقرب عدد صحيح:

i) $4x(x - 6) = 27$

$$4x^2 - 24x = 27 \quad \} \div 4 \Rightarrow x^2 - 6x = \frac{27}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2} \times 6\right)^2 = (3)^2 = 9 \quad \text{نضيف الى طرفي المعادلة}$$

$$x^2 - 6x + 9 = \frac{27}{4} + 9 \Rightarrow (x - 3)^2 = \frac{27 + 36}{4}$$

$$(x - 3)^2 = \frac{63}{4} \quad \text{بأخذ الجذر التربيعي للطرفين}$$

$$x - 3 \approx \pm \frac{\sqrt{63}}{2} \Rightarrow x - 3 \approx \pm 2$$

$$\text{أما } x - 3 \approx 2 \Rightarrow x \approx 2 + 3 \approx 5$$

$$\text{أو } x - 3 \approx -2 \Rightarrow x \approx -2 + 3 \approx 1 \Rightarrow S = \{5, 1\}$$

الحل

ii) $6y^2 - 48y = 6$

الحل

$$6y^2 - 48y = 6 \quad \{ \div 6 \Rightarrow y^2 - 8y = 1$$

$$\left(\frac{1}{2} \times 8\right)^2 = (4)^2 = 16 \quad \text{نضيف الى طرفي المعادلة}$$

$$y^2 - 8y + 16 = 1 + 16$$

$$(y - 4)^2 = 17 \quad \text{بأخذ الجذر التربيعي للطرفين}$$

$$y - 4 \approx \pm 4$$

$$\text{أما } x - 4 \approx 4 \Rightarrow x \approx 4 + 4 \approx 8$$

$$\text{أو } x - 4 \approx -4 \Rightarrow x \approx -4 + 4 \approx 0 \Rightarrow S = \{8, 0\}$$

25 **أصحّ الخطأ:** حلّت سوسن المعادلة $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = 0$ بطريقة إكمال المربع وكتبت مجموعة الحل للمعادلة بالشكل الآتي: $S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right\}$. اكتشف خطأ سوسن وصحّحه.

الحل

$$4x^2 - 4\sqrt{3}x = -3 \quad \{ \div 4 \Rightarrow x^2 - \sqrt{3}x = -\frac{3}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2} \times \sqrt{3}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \quad \text{نضيف الى طرفي المعادلة}$$

$$x^2 - \sqrt{3}x + \frac{3}{4} = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}$$

$$\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0 \quad \text{بأخذ الجذر التربيعي للطرفين}$$

$$x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

26 **حسّ عدديّ:** هل ان مجموعة حل للمعادلة $y^2 - 4y + 4 = 0$ تحتوي على قيمتين متساويتين بالمقدار أحدهما سالبة والأخرى موجبة؟ وضّح إجابتك.

الحل

$$y^2 - 4y + 4 = 0 \Rightarrow (y - 2)^2 = 0$$

$$y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$$

كلا تحتوي على قيمتين متساويتين ومتشابهتين بالإشارة

أكتب

$$\frac{1}{81} - \frac{2}{9}z + z^2 = 0$$

مجموعة الحل للمعادلة:

الحل

$$\left(\frac{1}{9} - z\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{9} - z = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{9}$$

شاهد هذا الدرس على يوتيوب



10

حفظ

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

الدرس 3-5 حل المعادلات بالقانون العام (الدستور)

[3-5-1] حل المعادلات باستعمال القانون

- يمكن حل المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ باستخدام القانون العام:
- لحل المعادلة بالقانون العام وذلك لإيجاد الجذور الحقيقية للمعادلة التربيعية كما يأتي:
- نضع المعادلة التربيعية بالصورة العامة (القياسية) : $ax^2 + bx + c = 0$
 - نكتب قيم المعاملات : a معامل x^2 , b معامل x مع اشارته , c الحد المطلق مع اشارته .
 - نعوض بالقانون العام لإيجاد قيمتي المتغير .

أريدُ رصفُ ممرٍ على جانبي حديقة منزل بالسيراميك طول الحديقة 7m وعرضها 5m ، ومساحة الرصف $45m^2$. جد عرض الممر المطلوب رصفه بالسيراميك .

تعلم

ما عرض الممر المطلوب رصفه على جانبي الحديقة؟

مثال (1)

نفرض عرض الممر = x فإن مساحة الجزء الأيمن من الممر = $7x$

مساحة الجزء الممر الأمامي = $5x$ ومساحة زاوية الممر = x^2 ومجموع مساحتي الرصف $45m^2$

$$x^2 + 7x + 5x = 45 \Rightarrow x^2 + 12x - 45 = 0$$

$$a = 1, b = 12, c = -45$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4(1)(-45)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 180}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{324}}{2}$$

$$x = \frac{-12 \pm 18}{2}$$

$$x = \frac{-12 + 18}{2} = \frac{6}{2}$$

عرض الممر = 3 m

$$x = \frac{-12 - 18}{2} = \frac{-30}{2}$$

= -15 يهمل

$$x^2 - 3x - 5 = 0$$

$$a = 1, b = -3, c = -5$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 20}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2} \quad \text{أما } x = \frac{3 + \sqrt{29}}{2} \quad \text{أو } x = \frac{3 - \sqrt{29}}{2} \Rightarrow S = \left\{ \frac{3 + \sqrt{29}}{2}, \frac{3 - \sqrt{29}}{2} \right\}$$

جد مجموعة الحل للمعادلات التالية باستعمال القانون العام:

مثال (2)

[3-5-2] المقدار المميز ($\Delta = b^2 - 4ac$)

(يرمز للمميز بالرمز Δ)

شاهد هذا الدرس على يوتيوب



11

يمكن معرفة نوع جذري المعادلة التربيعية: $ax^2 + bx + c = 0$ باستعمال المميز كالاتي:

- (1) اذا كان المميز Δ موجب ومربع كامل يكون نوع الجذران حقيقيان نسبين .
- (2) اذا كان المميز Δ موجب وليس مربعا كاملا يكون نوع الجذران حقيقيان غير نسبين .
- (3) اذا كان المميز يساوي صفر Δ يكون نوع الجذران حقيقيان متساويان $(-\frac{b}{2a})$.
- (4) اذا كان المميز Δ سالب يكون نوع الجذران غير حقيقيين (ليس لها حل في R)

مثال (3)

حدّد جذري المعادلة أولاً، ثم جد مجموعة الحل إذا كان ممكناً:

[1] $2x^2 + 3x - 2 = 0$

$a = 2, b = 3, c = -2$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (3)^2 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25$

مقدار المميز مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان نسبين .

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2(2)} = \frac{-3 \pm 5}{4}$

أما $x = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

أو $x = \frac{-3 - 5}{4} = \frac{-8}{4} = -2 \Rightarrow S = \left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$

[2] $y^2 - 4y - 9 = 0$

$a = 1, b = -4, c = -9$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(-9) = 16 + 36 = 52$

مقدار المميز ليس مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان غير نسبين.

$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{52}}{2(1)}$

$= \frac{4 \pm \sqrt{52}}{2}$

أما $y = \frac{4 + \sqrt{52}}{2}$

أو $y = \frac{4 - \sqrt{52}}{2} \Rightarrow S = \left\{\frac{4 + \sqrt{52}}{2}, \frac{4 - \sqrt{52}}{2}\right\}$

[3] $Z^2 + 8Z = -16$

$Z^2 + 8Z + 16 = 0 \Rightarrow a = 1, b = 8, c = 16$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (8)^2 - 4(1)(16) = 64 - 64 = 0$

يمكن تطبيق القانون $(-\frac{b}{2a})$ مباشرةً

مقدار المميز يساوي صفر ونوع الجذران حقيقيان متساويان (لها جذر حقيقي واحد)

$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2(1)} = \frac{-8}{2} = -4$

مثال (3)

ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $x^2 - (k+1)x + 4 = 0$ متساويين؟ تحقق من الإجابة.
يكون جذرا المعادلة متساويين عندما قيمة المقدار المميز Δ يساوي صفر.

$$a = 1, b = -(k+1), c = 4$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$[-(k+1)]^2 = -4(1)(4) = 0$$

$$(k+1)^2 - 16 = 0$$

$$(k+1)^2 = 16 \text{ باخذ الجذر التربيعي للطرفين}$$

$$k+1 = \pm 4$$

$$\text{أما } k+1 = 4 \Rightarrow k = 4 - 1 = 3$$

$$\text{أو } k+1 = -4 \Rightarrow k = -4 - 1 = -5$$

شاهد موضوع الثابت K على يوتيوب



12

التحقق: نعوض قيم k بالمعادلة الأصلية ونجد جذور المعادلة:

$$k = 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$k = -5 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 = 0$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

تأكد من فهمك

جد مجموعة الحل للمعادلات التالية باستعمال القانون العام:

1 $x^2 - 4x - 5 = 0$

الحل

$$a = 1, b = -4, c = -5$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}$$

$$\text{أما } x = \frac{4 + 6}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\text{أو } x = \frac{4 - 6}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow S = \{5, -1\}$$

2 $y^2 + 5y - 1 = 0$

الحل

$$a = 1, b = 5, c = -1$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 4}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2}$$

$$\text{أما } y = \frac{-5 + \sqrt{29}}{2} \text{ أو } y = \frac{-5 - \sqrt{29}}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{-5 + \sqrt{29}}{2}, \frac{-5 - \sqrt{29}}{2} \right\}$$

3 $3x^2 - 9x = -2$



$$3x^2 - 9x + 2 = 0 \Rightarrow a = 3, b = -9, c = 2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 24}}{6} = \frac{9 \pm \sqrt{57}}{6}$$

$$\text{أما } x = \frac{9 + \sqrt{57}}{6} \text{ أو } x = \frac{9 - \sqrt{57}}{6}$$

$$S = \left\{ \frac{9 + \sqrt{57}}{6}, \frac{9 - \sqrt{57}}{6} \right\}$$

4 $4y^2 + 8y = 6$



$$4y^2 + 8y - 6 = 0 \} \div 2 \Rightarrow 2y^2 + 4y - 3 = 0$$

$$a = 2, b = 4, c = -3$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 24}}{4}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{40}}{4} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{10}}{4} = -1 \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\text{أما } y = -1 + \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ أو } y = -1 - \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$S = \left\{ -1 + \frac{\sqrt{10}}{2}, -1 - \frac{\sqrt{10}}{2} \right\}$$

5 $4x^2 - 12x + 9 = 0$



$$a = 4, b = -12, c = 9$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(4)(9)}}{2(4)}$$

$$= \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{8} = \frac{12 \pm 0}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

6 $2y^2 - 3 = -5y$



$$2y^2 + 5y - 3 = 0 \Rightarrow a = 2, b = 5, c = -3$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

$$\text{أما } y = \frac{-5 + 7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{أو } y = \frac{-5 - 7}{4} = \frac{-12}{4} = -3 \Rightarrow S = \left\{ \frac{1}{2}, -3 \right\}$$

حدّد جذور المعادلة أولاً، ثم جد مجموعة الحل إذا كان ممكناً:

7 $2x^2 + 3x = 5$

الحل

$$2x^2 + 3x - 5 = 0 \Rightarrow a = 2, b = 3, c = -5$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (3)^2 - 4(2)(-5) = 9 + 40 = 49$$

مقدار المميز مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان نسيبان .

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2(2)} = \frac{-3 \pm 7}{4}$$

أما $x = \frac{-3 + 7}{4} = \frac{4}{4} = 1$

أو $x = \frac{-3 - 7}{4} = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2} \Rightarrow S = \left\{1, -\frac{5}{2}\right\}$

8 $3x^2 - 7x + 6 = 0$

الحل

$$a = 3, b = -7, c = 6$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4(3)(6) = 49 - 72 = -23$$

مقدار المميز سالب لذا المعادلة ليس لها حل في R

9 $y^2 - 2y + 1 = 0$

الحل

$$a = 1, b = -2, c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(1) = 4 - 4 = 0$$

مقدار المميز يساوي صفراً ونوع الجذران متساويان ولها جذر حقيقي واحد .

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{0}}{2(1)} = \frac{2}{2} = 1$$

10 $y^2 + 12 = -9y$

الحل

$$y^2 + 9y + 12 = 0 \Rightarrow a = 1, b = 9, c = 12$$

$$\Delta = b^2 - 4ac =$$

$$\Delta = (9)^2 - 4(1)(12) = 81 - 48 = 33$$

مقدار المميز ليس مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان غير نسيبين .

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-9 \pm \sqrt{33}}{2(1)} = \frac{-9 \pm \sqrt{33}}{2}$$

أما $y = \frac{-9 + \sqrt{33}}{2}$ أو $y = \frac{-9 - \sqrt{33}}{2}$

$$S = \left\{ \frac{-9 + \sqrt{33}}{2}, \frac{-9 - \sqrt{33}}{2} \right\}$$

11

ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $x^2 - (k + 2)x + 36 = 0$ متساويين؟ تحقق من الإجابة.

يكون جذري المعادلة متساويين إذا كان المميز $= 0$

$$a = 1, \quad b = -(k + 2), \quad c = 36$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$[-(k + 2)]^2 = -4(1)(36) = 0$$

$$(k + 2)^2 - 144 = 0$$

$$(k + 2)^2 = 144 \quad \text{باخذ الجذر التربيعي للطرفين}$$

$$k + 2 = \pm 12$$

$$\text{أما } k + 2 = 12 \Rightarrow k = 12 - 2 = 10$$

$$\text{أو } k + 2 = -12 \Rightarrow k = -12 - 2 = -14$$

التحقق: نعوض قيم k بالمعادلة الأصلية ونجد جذور المعادلة:

$$k = 12 \Rightarrow x^2 - (k + 2)x + 36 = 0$$

$$x^2 - 12x + 36 = 0 \Rightarrow (x - 6)^2 = 0$$

$$x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$$

$$k = -14 \Rightarrow x^2 - (k + 2)x + 36 = 0$$

$$x^2 + 12x + 36 = 0 \Rightarrow (x + 6)^2 = 0$$

$$x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6$$

12

ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $4y^2 + 25 = (k - 5)y$ متساويين؟ تحقق من الإجابة.

يكون جذري المعادلة متساويين إذا كان المميز $= 0$

$$4y^2 - (k - 5)y + 25 = 0$$

$$a = 4, \quad b = -(k - 5), \quad c = 25$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$[-(k - 5)]^2 = -4(4)(25) = 0$$

$$(k - 5)^2 - 400 = 0$$

$$(k - 5)^2 = 400 \quad \text{باخذ الجذر التربيعي للطرفين}$$

$$k - 5 = \pm 20$$

$$\text{أما } k - 5 = 20 \Rightarrow k = 20 + 5 = 25$$

$$\text{أو } k - 5 = -20 \Rightarrow k = -20 + 5 = -15$$

التحقق: نعوض قيم k بالمعادلة الأصلية ونجد جذور المعادلة:

$$k = 25 \Rightarrow y^2 - (k - 5)y + 25 = 0$$

$$y^2 - 20y + 25 = 0 \Rightarrow (y - 5)^2 = 0$$

$$y - 5 = 0 \Rightarrow y = 5$$

$$k = -15 \Rightarrow y^2 - (k - 5)y + 25 = 0$$

$$y^2 + 20y + 25 = 0 \Rightarrow (y + 5)^2 = 0$$

$$y + 5 = 0 \Rightarrow y = -5$$

13 ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $z^2 + 16 = (k + 4)z$ متساويين؟ تحقق من الإجابة.

يكون جذري المعادلة متساويين إذا كان المميز $= 0$

الحل

$$z^2 - (k + 4)z + 16 = 0$$

$$a = 1, \quad b = -(k + 4), \quad c = 16$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$[-(k + 4)]^2 = -4(1)(16) = 0$$

$$(k + 4)^2 - 64 = 0$$

$$(k + 4)^2 = 64 \quad \text{باخذ الجذر التربيعي للطرفين}$$

$$k + 4 = \pm 8$$

$$\text{أما } k + 4 = 8 \Rightarrow k = 8 - 4 = 4$$

$$\text{أو } k + 4 = -8 \Rightarrow k = -8 - 4 = -12$$

التحقق: نعوض قيم k بالمعادلة الأصلية ونجد جذور المعادلة:

$$k = 4 \Rightarrow z^2 - (k + 4)z + 16 = 0$$

$$z^2 - 8z + 16 = 0 \Rightarrow (z - 4)^2 = 0$$

$$z - 4 = 0 \Rightarrow z = 4$$

$$k = -12 \Rightarrow z^2 - (k + 4)z + 16 = 0$$

$$z^2 + 8z + 16 = 0 \Rightarrow (z + 4)^2 = 0$$

$$z + 4 = 0 \Rightarrow z = -4$$

14 بيّن أنّ المعادلة $z^2 - 6z + 28 = 0$ ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية.

الحل

$$a = 1, \quad b = -6, \quad c = 28$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(28) = 36 - 112 = -76$$

مقدار المميز سالب لذا المعادلة ليس لها حل في R

تدرب وحل التمرينات

جد مجموعة الحل للمعادلات التالية باستعمال القانون العام:

15 $x^2 - 7x - 14 = 0$

الحل

$$a = 1, \quad b = -7, \quad c = -14$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(-14)}}{2(1)}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{49 + 56}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{105}}{2}$$

$$\text{أما } x = \frac{7 + \sqrt{105}}{2} \quad \text{أو} \quad x = \frac{7 - \sqrt{105}}{2} \Rightarrow S = \left\{ \frac{7 + \sqrt{105}}{2}, \frac{7 - \sqrt{105}}{2} \right\}$$

16 $y^2 + 3y - 9 = 0$



$a = 1, b = 3, c = -9$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4(1)(-9)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 36}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{45}}{2}$$

أما $y = \frac{-3 + \sqrt{45}}{2}$ أو $y = \frac{-3 - \sqrt{45}}{2}$

$$S = \left\{ \frac{-3 + \sqrt{45}}{2}, \frac{-3 - \sqrt{45}}{2} \right\}$$

17 $2x^2 - 8(3x + 2) = 0$



$$2x^2 - 24x - 16 = 0$$

$a = 2, b = -24, c = -16$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{576 + 128}}{2} = \frac{24 \pm \sqrt{704}}{2}$$

$$= \frac{24 \pm 8\sqrt{11}}{2}$$

أما $x = \frac{24 + 8\sqrt{11}}{2} \Rightarrow x = 12 + 4\sqrt{11}$

أو $x = \frac{24 - 8\sqrt{11}}{2} \Rightarrow x = 12 - 4\sqrt{11}$ $S = \{x = 12 + 4\sqrt{11}, x = 12 - 4\sqrt{11}\}$

18 $2y^2 - 2 = -10y$



$$2y^2 + 10y - 2 = 0 \Rightarrow a = 2, b = 10, c = -2$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = \frac{-10 \pm \sqrt{(10)^2 - 4(2)(-2)}}{2(2)}$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 16}}{4} = \frac{-10 \pm \sqrt{116}}{4}$$

$$y = \frac{-10 \pm 2\sqrt{29}}{4} = \frac{2(-5 \pm \sqrt{29})}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2}$$

أما $y = \frac{-5 + \sqrt{29}}{2}$ أو $y = \frac{-5 - \sqrt{29}}{2} \Rightarrow S = \left\{ \frac{-5 + \sqrt{29}}{2}, \frac{-5 - \sqrt{29}}{2} \right\}$

حدّد جذور المعادلة أولاً، ثم جد مجموعة الحل إذا كان ممكناً:

19 $y^2 - 2y - 10 = 0$



$a = 1, b = -2, c = -10$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-10) = 4 + 40 = 44$

مقدار المميز ليس مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان غير نسبيين .

$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{44}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{44}}{2}$

$y = \frac{2 \pm 2\sqrt{11}}{2} = 1 \pm \sqrt{11}$

أما $y = 1 + \sqrt{11}$ أو $y = 1 - \sqrt{11}$

$S = \{1 + \sqrt{11}, 1 - \sqrt{11}\}$

20 $y^2 - 14y + 49 = 0$



$a = 1, b = -14, c = 49$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-14)^2 - 4(1)(49) = 196 - 196 = 0$

مقدار المميز يساوي صفراً ونوع الجذران متساويان (لهل جذر حقيقي واحد)

$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-14) \pm \sqrt{0}}{2(1)} = \frac{14}{2} = 7$

21 ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $x^2 - (k + 6)x + 49 = 0$ متساويين؟ تحقق من الإجابة.



يكون جذري المعادلة متساويين إذا كان المميز $= 0$

$a = 1, b = -(k + 6), c = 49$

$b^2 - 4ac = 0$

$[-(k + 6)]^2 - 4(1)(49) = 0$

$(k + 6)^2 - 196 = 0$

$(k + 6)^2 = 196$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$k + 6 = \pm 14$

أما $k + 6 = 14 \Rightarrow k = 14 - 6 = 8$

أو $k + 6 = -14 \Rightarrow k = -14 - 6 = -20$

التحقق : نعوض قيم k بالمعادلة الأصلية ونجد جذور المعادلة :

$$\begin{aligned} k = 8 &\Rightarrow x^2 - (k + 6)x + 49 = 0 \\ &\Rightarrow x^2 - 14x + 49 = 0 \Rightarrow (x - 7)^2 = 0 \\ &\Rightarrow x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7 \\ k = -20 &\Rightarrow x^2 - (k + 6)x + 49 = 0 \\ &\Rightarrow x^2 + 14x + 49 = 0 \Rightarrow (x + 7)^2 = 0 \\ &\Rightarrow x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7 \end{aligned}$$

22 بيّن أنّ المعادلة $2z^2 - 3z + 10 = 0$ ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية.

الحل
 $a = 2, b = -3, c = 10$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(10) = 9 - 80 = -71$$

مقدار المميز سالب لذا المعادلة ليس لها حل في R

هذه المسألة تم حلها مع مسائل أخرى في الدرس



15

تدرب وحل مسائل حياتية

23 ألعاب نارية: في إحدى المناسبات أطلقت مجموعة من الألعاب النارية عمودياً في الهواء وصلت إلى ارتفاع 140m. احسب الزمن (t ثانية) الذي وصلت به إلى هذا الارتفاع من المعادلة الآتية: $5t^2 + 60t = 140$

الحل
الطريقة الأولى : قانون الدستور

$$\begin{aligned} 5t^2 + 60t - 140 &= 0 \quad \div 5 \\ t^2 + 12t - 28 &= 0 \\ a = 1, b = 12, c = -28 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4(1)(-28)}}{2(1)} \\ &= \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 112}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{256}}{2} = \frac{-12 \pm 16}{2} \end{aligned}$$

$$\text{أما } t = \frac{-12 + 16}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{أو } t = \frac{-12 - 16}{2} = \frac{-28}{2} = -14 \quad \text{يهمل}$$

الطريقة الثانية : بالتجربة

$$\begin{aligned} 5t^2 + 60t - 140 &= 0 \quad \div 5 \\ t^2 + 12t - 28 &= 0 \Rightarrow (t + 14)(t - 2) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{أما } t + 14 = 0 \Rightarrow t = -14 \quad \text{يهمل}$$

$$\text{أو } t - 2 = 0 \Rightarrow t = 2 \quad \text{الزمن}$$



24 تجارة: يحسب سامر سعرَ الكلفة للبدلة الرجالية الواحدة ثم يضيف عليها مبلغَ للربح ويبيعه للزبائن بمبلغ 120 ألف دينار، إذا كانت p في المعادلة $p^2 - 30p + 225 = 0$ تمثل مبلغَ ربح سامر في البدلة الواحدة بألوف الدنانير، فما سعرُ كلفة البدلة الواحدة؟



$$a = 1, \quad b = -30, \quad c = 225$$

$$p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(1)(225)}}{2(1)} = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 900}}{2} = \frac{30}{2} = 15$$



25 تحد: حدّد جذور المعادلة أولاً، ثم جد مجموعة الحل إذا كان ممكناً:

i) $x^2 + 8x = 10$



$$x^2 + 8x - 10 = 0 \Rightarrow a = 1, \quad b = 8, \quad c = -10$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (8)^2 - 4(1)(-10) = 64 + 40 = 104$$

مقدار المميز ليس مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان غير نسبيين.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{104}}{2(1)} = \frac{-8 \pm 2\sqrt{26}}{2} = \frac{2(-4 \pm \sqrt{26})}{2} = -4 \pm \sqrt{26}$$

$$\text{أما } x = -4 + \sqrt{26} \text{ أو } x = -4 - \sqrt{26} \quad S = \{-4 + \sqrt{26}, -4 - \sqrt{26}\}$$

ii) $3y^2 - 6y - 42 = 0$



$$3y^2 - 6y - 42 = 0 \} \div 3 \Rightarrow y^2 - 2y - 14 = 0$$

$$a = 1, \quad b = -2, \quad c = -14$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-14) = 4 + 56 = 60$$

مقدار المميز ليس مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان غير نسبيين.

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{60}}{2(1)} = \frac{2 \pm 2\sqrt{15}}{2} = \frac{2(1 \pm \sqrt{15})}{2} = 1 \pm \sqrt{15}$$

$$\text{أما } y = 1 + \sqrt{15}$$

$$\text{أو } y = 1 - \sqrt{15} \Rightarrow S = \{1 + \sqrt{15}, 1 - \sqrt{15}\}$$

26 **أصحّ الخطأ:** قال سعد إن المعادلة $2x^2 - 3x - 9 = 0$ ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية.

اكتشف خطأ سعد وصحّحه.



$$a = 2, \quad b = -3, \quad c = -9$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4(2)(-9) = 9 + 72 = 81$$

مقدار المميز مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان نسيان.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{81}}{2(2)} = \frac{3 \pm 9}{4}$$

$$\text{أما } x = \frac{3+9}{4} = \frac{12}{4} = 3 \text{ أو } x = \frac{3-9}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2} \Rightarrow S = \left\{3, -\frac{3}{2}\right\}$$

27 **حسن عددي:** استعملت مروة المقدار المميز لكتابة جذري المعادلة $z^2 - 8z + 16 = 0$ دون تحليلها.

فسّر كيف استطاعت مروة كتابة جذري المعادلة.

$$a = 1, \quad b = -8, \quad c = 16$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (8)^2 - 4(1)(16) = 64 - 64 = 0$$

قيمة المقدار المميز يساوي صفراً ولها جذر حقيقي واحد.



نوع جذري المعادلة $x^2 + 100 = 20x$ باستعمال المقدار المميز من دون حلها.

أكتب



$$x^2 - 20x + 100 = 0 \Rightarrow a = 1, \quad b = -20, \quad c = 100$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-20)^2 - 4(1)(100) = 400 - 400 = 0$$

قيمة المقدار المميز يساوي صفراً ونوع الجذران حقيقيان متساويان ولها جذر حقيقي واحد.

شاهد هذا الدرس على يوتيوب



13

الدرس 3-6 حل المعادلات الكسرية

نستعمل تحليل المقادير الجبرية لحل المعادلات الكسرية التي في مقامها متغير وذلك بتخلص من الكسور. ثم حلها بإحدى طرق التحليل السابقة.

خطوات حل المعادلات الكسرية

1. نتخلص من المقام الذي يحتوي على عدد مضروب في متغير (ax) من خلال ضرب طرفي المعادلة في نفس العدد والمتغير
2. إذا كان احد المقامات يمكن تحليله نحله ونوحد المقامات بضربها في العامل المشترك الأصغر
3. إذا كان احد المقامات مختلف عن البقية نحسب عامل مشترك منه سالب واحد ونغيره مثل

$$\frac{x}{2-x} \text{ يمكن تحويل المقام الى } \frac{x}{-(x-2)}$$

4. إذا كان المعادلة الكسرية بشكل $\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}} = \frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$ لحلها نضرب وسطين في طرفين

(لاحظ التمارين 3 و 4 من تمارين تأكد من فهمك)

إذا كان ثمن شراء التحفية الواحدة بدلالة المتغير x هو $2x + 3$ ألف دينار و ثمن شراء ست تحفيات أيضاً بدلالة x هو $x^2 + 3x - 1$ ألف دينار، فإذا كانت نسبة ثمن تحفية واحدة إلى ثمن ثلاث تحفيات $\frac{1}{3}$ ، فما ثمن شراء تحفية واحدة؟

تعلم

مثال (1)

$$\frac{\text{ثمن تحفية واحدة}}{\text{ثمن ست تحفيات}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2x + 3}{x^2 + 3x - 1} = \frac{1}{3}$$

الطرفين في الوسطين

$$x^2 + 3x - 1 = 6x + 9$$

$$x^2 + 3x - 1 - 6x - 9 = 0$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 5) = 0$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ يهمل أما}$$

$$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \text{ أو}$$

$$2x + 3 = 2(5) + 3 = 10 + 3 = 13 \text{ ألف}$$

ثمن شراء تحفية واحدة هو 13 ألف دينار

مثال (2)

جد مجموعة الحل للمعادلة التالية، ثم تحقق من صحة الحل:

$$5x + \frac{x-2}{3x} = \frac{2}{3} \} \cdot 3x \Rightarrow 3x(5x) + \cancel{3x} \left(\frac{x-2}{\cancel{3x}} \right) = \cancel{3x} \left(\frac{2}{\cancel{3}} \right)$$

نضرب طرفي المعادلة بمقام الكسر

و هو $3x$

$$15x^2 + x - 2 = 2x \Rightarrow 15x^2 + x - 2 - 2 = 0$$

$$15x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (5x - 2)(3x + 1) = 0$$

$$\text{أما } 5x - 2 = 0 \Rightarrow 5x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$$

$$\text{أو } 3x + 1 = 0 \Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$S = \left\{ \frac{2}{5}, -\frac{1}{3} \right\}$$

لتحقق من صحة الحل: نعوض قيم x في المعادلة الأصلية:

$$x = \frac{2}{5} \Rightarrow 5\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{\frac{2}{5} - 2}{3\left(\frac{2}{5}\right)} = 2 + \frac{\frac{2-10}{5}}{\frac{6}{5}} = 2 + \frac{-8}{6} = 2 - \frac{4}{3} = \frac{6-4}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{الايمن}$$

$$x = -\frac{1}{3} \Rightarrow 5\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{\frac{-1}{3} - 2}{3\left(-\frac{1}{3}\right)} = -\frac{5}{3} + \frac{\frac{-1-6}{3}}{-\frac{3}{3}} = -\frac{5}{3} + \frac{-7}{-3} = -\frac{5}{3} + \frac{7}{3} = \frac{-5+7}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{الايمن}$$

مثال (3)

جد مجموعة الحل للمعادلة:

$$\frac{x}{x-3} + \frac{4x}{x+3} = \frac{18}{x^2-9}$$

نحلله

$$\frac{x}{x-3} + \frac{4x}{x+3} = \frac{18}{(x+3)(x-3)}$$

نوجد المقام بضرب المعادلة في $(x+3)(x-3)$ ونختصر المقادير المتشابهة

$$(x+3)\cancel{(x-3)} \frac{x}{\cancel{x-3}} + (x+3)\cancel{(x-3)} \frac{4x}{\cancel{x+3}} = \cancel{(x+3)}\cancel{(x-3)} \frac{18}{\cancel{(x+3)}\cancel{(x-3)}}$$

$$x(x+3) + 4x(x-3) = 18$$

$$x^2 + 3x + 4x^2 - 12x - 18 = 0$$

$$5x^2 - 9x - 18 = 0 \Rightarrow (x-3)(5x+6) = 0$$

$$\text{أما } x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

يرهلك لأنه يجعل المقام يساوي صفر

$$\text{أو } 5x + 6 = 0 \Rightarrow 5x = -6 \Rightarrow x = -\frac{6}{5}$$

$$S = \left\{ -\frac{6}{5} \right\}$$

جد مجموعة الحل للمعادلة:

مثال (4)

$$\frac{2}{x+2} - \frac{x}{2-x} = \frac{x^2+4}{x^2-4}$$

خلله

نسحب عامل مشترك (-1) ونغيره الى $-(x-2)$ نوجد المقامات بضرب المعادلة في $(x+2)(x-2)$ ونختصر القادير المتشابهة

$$\frac{2}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{x^2+4}{(x+2)(x-2)}$$

$$(x+2)(x-2) \frac{2}{x+2} + (x+2)(x-2) \frac{x}{x-2} = (x+2)(x-2) \frac{x^2+4}{(x+2)(x-2)}$$

$$2(x-2) + x(x+2) = x^2+4$$

$$2x-4+x^2+2x=x^2+4$$

$$4x-4+x^2=x^2+4$$

$$4x-4+x^2-x^2-4=0 \quad 4x-8=0 \Rightarrow 4x=8$$

$$\Rightarrow x = \frac{8}{4} = 2 \quad \text{يرمى لأنه يجعل المقام يساوي صفر} \quad S = \{\emptyset\}$$

تأكد من فهمك

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية وتحقق من صحة الحل:

1 $\frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{6}{4x^2} \} \cdot 4x^2$

الحل

$$4x + 2x^2 = 6 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 6 = 0 \} \div 2$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 1) = 0$$

أما $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

أو $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

تحقق من صحة الحل: نعوض قيم x في المعادلة الأصلية:

$$x = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{2+1}{2}$$

$$= \frac{3}{2} \text{ الطرف الأيسر}$$

$$\frac{6}{4x^2} = \frac{6}{4(1)^2} = \frac{6}{4}$$

$$= \frac{3}{2} \text{ الطرف الأيمن}$$

2 $\frac{y}{2} - \frac{7}{5} = \frac{3}{10y}$

الحل

$$\frac{y}{2} - \frac{7}{5} = \frac{3}{10y} \} \times 10y$$

$$10y\left(\frac{y}{2}\right) - 10y\left(\frac{7}{5}\right) = 10y\left(\frac{3}{10y}\right)$$

$$5y(y) - 2y(7) = 3$$

$$5y^2 - 14y - 3 = 0 \Rightarrow (y - 3)(5y + 1) = 0$$

أما $y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$

أو $5y + 1 = 0 \Rightarrow 5y = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{5}$

تحقق من صحة الحل: نعوض قيم y في المعادلة الأصلية:

$$y = 3 \Rightarrow \frac{y}{2} - \frac{7}{5} = \frac{3}{2} - \frac{7}{5} = \frac{15 - 14}{10}$$

$$= \frac{1}{10} \text{ الأيسر}$$

$$\frac{3}{10y} = \frac{3}{10(3)} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10} \text{ الأيمن}$$

3 $\frac{x+4}{2} = \frac{-3}{2x}$ الطرفين في الوسطين

الحل

$$2x(x + 4) = -3(2) \Rightarrow 2x^2 + 8x = -6$$

$$2x^2 + 8x + 6 = 0 \} \div 2 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$(x + 3)(x + 1) = 0$$

أما $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

أو $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow S\{-3, -1\}$

تحقق من صحة الحل: نعوض قيم x في المعادلة الأصلية:

عندما $x = -3$:

$$\frac{x+4}{2} = \frac{-3+4}{2} = \frac{1}{2} \text{ الطرف الأيسر}$$

$$\frac{-3}{2x} = \frac{-3}{2(-3)} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2} \text{ الطرف الأيمن}$$

4 $\frac{y+1}{2y^2} = \frac{3}{4}$ الطرفين في الوسطين

الحل

$$2y^2(3) = 4(y + 1) \Rightarrow 6y^2 = 4y + 4$$

$$6y^2 - 4y - 4 = 0 \} \div 2 \Rightarrow 3y^2 - 2y - 2 = 0$$

$$a = 3, \quad b = -2, \quad c = -2$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(-2)}}{2(3)}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 24}}{6}$$

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{6} = \frac{2(1 \pm \sqrt{7})}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$$

أما $y = \frac{1 + \sqrt{7}}{3}$ أو $y = \frac{1 - \sqrt{7}}{3}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم y في المعادلة الأصلية :

$$y = \frac{1 + \sqrt{7}}{3} \Rightarrow \frac{y + 1}{2y^2} = \frac{\frac{1 + \sqrt{7}}{3} + 1}{2\left(\frac{1 + \sqrt{7}}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{1 + \sqrt{7} + 3}{3}}{2\left(\frac{1 + 2\sqrt{7} + 7}{9}\right)} = \frac{\frac{4 + \sqrt{7}}{3}}{2\left(\frac{8 + 2\sqrt{7}}{9}\right)} = \frac{\frac{4 + \sqrt{7}}{3}}{\frac{16 + 4\sqrt{7}}{9}}$$

$$= \frac{4 + \sqrt{7}}{3} \times \frac{9}{16 + 4\sqrt{7}} = \frac{4 + \sqrt{7}}{1} \times \frac{3}{4(4 + \sqrt{7})} = \frac{3}{4}$$

5 $\frac{9x - 14}{x - 5} = \frac{x^2}{x - 5} \} \cdot (x - 5)$

الحل

$$9x - 14 = x^2 \Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$(x - 7)(x - 2) = 0$$

أما $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$

أو $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

التحقق : عندما $x = 7$

$$\frac{9x - 14}{x - 5} = \frac{9(7) - 14}{7 - 5} = \frac{63 - 14}{2} = \frac{49}{2}$$

$$\frac{x^2}{x - 5} = \frac{(7)^2}{7 - 5} = \frac{49}{2}$$

الطرف الأيمن

6 $\frac{1}{y^2 - 6} = \frac{2}{y + 3}$ الطرفين في الوسطين

الحل

$$2y^2 - 12 = y + 3 \Rightarrow 2y^2 - 12 - y - 3 = 0$$

$$2y^2 - y - 15 = 0 \Rightarrow (2y + 5)(y - 3) = 0$$

أما $2y + 5 = 0 \Rightarrow 2y = -5 \Rightarrow y = -\frac{5}{2}$

أو $y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم y في المعادلة الأصلية :

عندما : $y = 3$

$$\frac{1}{y^2 - 6} = \frac{1}{(3)^2 - 6} = \frac{1}{9 - 6} = \frac{1}{3}$$

الطرف الأيسر

$$\frac{2}{y + 3} = \frac{2}{3 + 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

الطرف الأيمن

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات الآتية:

7 $\frac{y-4}{y+2} - \frac{2}{y-2} = \frac{17}{y^2-4}$

الحل

$$\left\{ \frac{y-4}{y+2} - \frac{2}{y-2} = \frac{17}{(y+2)(y-2)} \right\} \times (y+2)(y-2)$$

$$(y-2)(y-4) - 2(y+2) = 17$$

$$y^2 - 4y - 2y + 8 - 2y - 4 - 17 = 0$$

$$y^2 - 8y - 13 = 0$$

$$a = 1, b = -8, c = -13$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(-13)}}{2(1)}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{64 + 52}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{116}}{2}$$

$$y = \frac{8 \pm 2\sqrt{29}}{2} = \frac{2(4 \pm \sqrt{29})}{2} = 4 \pm \sqrt{29}$$

$$\text{أما } y = 4 + \sqrt{29} \text{ أو } y = 4 - \sqrt{29}$$

8 $\frac{9}{x^2-x-6} - \frac{5}{x-3} = 1$

الحل

$$\left\{ \frac{9}{(x-3)(x+2)} - \frac{5}{x-3} = 1 \right\} \times (x-3)(x+2)$$

$$9 - 5(x+2) = x^2 + 2x - 3x - 6$$

$$9 - 5x - 10 = x^2 - x - 6$$

$$-1 - 5x = x^2 - x - 6$$

$$x^2 - x - 6 + 1 + 5x = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$(x+5)(x-1) = 0$$

$$\text{أما } x+5=0 \Rightarrow x=-5$$

$$\text{أو } x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow S = \{-5, 1\}$$

9 $\frac{12}{y^2-16} + \frac{6}{y+4} = 2$

الحل

$$\left\{ \frac{12}{(y+4)(y-4)} + \frac{6}{y+4} = 2 \right\} \times (y+4)(y-4)$$

$$12 + 6(y-4) = 2(y+4)(y-4)$$

$$12 + 6y - 24 = 2(y^2 - 16)$$

$$6y - 12 = 2y^2 - 32$$

$$2y^2 - 32 - 6y + 12 = 0 \Rightarrow 2y^2 - 6y - 20 = 0$$

$$(y-5)(2y+4) = 0$$

$$\text{أما } y-5=0 \Rightarrow y=5$$

$$\text{أو } 2y+4=0 \Rightarrow 2y=-4 \Rightarrow y=-\frac{4}{2}=-2$$

$$S = \{5, -2\}$$

10 $\frac{2x}{x+1} + \frac{3x}{x-1} = \frac{8+7x+3x^2}{x^2-1}$

الحل

$$\left\{ \frac{2x}{x+1} + \frac{3x}{x-1} = \frac{8+7x+3x^2}{(x+1)(x-1)} \right\} \times (x+1)(x-1)$$

$$2x(x-1) + 3x(x+1) = 8 + 7x + 3x^2$$

$$2x^2 - 2x + 3x^2 + 3x - 8 - 7x - 3x^2$$

$$2x^2 - 6x - 8 = 0 \Rightarrow (x-4)(2x+2) = 0$$

$$\text{أما } x-4=0 \Rightarrow x=4$$

$$\text{أو } 2x+2=0 \Rightarrow 2x=-2 \Rightarrow x=-\frac{2}{2}=-1$$

$$S = \{4, -1\}$$

تدرب وحل التمرينات

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية وتحقق من صحة الحل:

11 $\frac{4}{6x^2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{x} \} \cdot (6x^2)$

الحل

$4 + 2x^2 = 6x \Rightarrow 2x^2 - 6x + 4 = 0 \} \div 2$
 $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 1) = 0$

أما $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

أو $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow S = \{2, 1\}$

تحقق من صحة الحل: نعوض قيم x في المعادلة الأصلية:

عندما: $x = 2$

$\frac{4}{6x^2} + \frac{1}{3} = \frac{4}{6(2)^2} + \frac{1}{3} = \frac{4}{24} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1+2}{6}$

$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ الطرف الأيسر

$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ الطرف الأيمن

عندما: $x = 1$

$\frac{4}{6x^2} + \frac{1}{3} = \frac{4}{6(1)^2} + \frac{1}{3} = \frac{4}{6} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2+1}{3}$

$= \frac{3}{3} = 1$ الطرف الأيسر $\frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$ الطرف الأيمن

12 $\frac{3y}{4} - \frac{6}{12y} + \frac{1}{4} = 0$

الحل

$\frac{3y}{4} - \frac{2}{4y} + \frac{1}{4} = 0 \} \times 4y$

$3y^2 - 2 + y = 0 \Rightarrow 3y^2 + y - 2 = 0$
 $(y + 1)(3y - 2) = 0$

أما $y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$

أو $3y - 2 = 0 \Rightarrow 3y = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$

$S = \{-1, \frac{2}{3}\}$

تحقق من صحة الحل: نعوض قيم y في المعادلة الأصلية:

عندما: $y = -1$

$\frac{3y}{4} - \frac{6}{12y} + \frac{1}{4} = \frac{3(-1)}{4} - \frac{2}{4(-1)} + \frac{1}{4}$

$= \frac{-3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4}$

$= \frac{0}{4} = 0$ الطرف الأيمن

13 $\frac{9x + 22}{x^2} = 1$ الطرفين في الوسطين

الحل

$x^2 = 9x + 22 \Rightarrow x^2 - 9x - 22 = 0$
 $(x - 11)(x + 2) = 0$

أما $x - 11 = 0 \Rightarrow x = 11$

أو $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow S = \{11, -2\}$

تحقق من صحة الحل: نعوض قيم x في المعادلة الأصلية:

عندما: $x = -2$

$\frac{9x + 22}{x^2} = \frac{9(-2) + 22}{(-2)^2} = \frac{-18 + 22}{4} = \frac{4}{4} = 1$

الطرف الأيمن

14 $\frac{9}{(y + 2)^2} = \frac{3y}{y + 2}$

الحل

$\frac{9}{(y + 2)^2} = \frac{3y}{y + 2} \} \cdot (y + 2)^2$

$9 = 3y(y + 2) \Rightarrow 3y^2 + 6y - 9 = 0 \} \div 3$
 $y^2 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow (y + 3)(y - 1) = 0$

أما $y + 3 = 0 \Rightarrow y = -3$

أو $y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow S = \{-3, 1\}$

التحقق من صحة الحل: عندما: $y = 1$

$\frac{9}{(y + 2)^2} = \frac{9}{(1 + 2)^2} = \frac{9}{9} = 1$ الطرف الأيسر

$\frac{3y}{y + 2} = \frac{3(1)}{1 + 2} = \frac{3}{3} = 1$ الطرف الأيمن

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات الآتية:

15 $\frac{3}{x-4} - \frac{2}{x-3} = 1$



$$\begin{aligned} \frac{3}{x-4} - \frac{2}{x-3} = 1 & \} \cdot (x-4)(x-3) \\ 3(x-3) - 2(x-4) &= (x-4)(x-3) \\ 3x - 9 - 2x + 8 &= x^2 - 3x - 4x + 12 \\ x - 1 &= x^2 - 7x + 12 \\ x^2 - 7x + 12 - x + 1 &= 0 \\ x^2 - 8x + 13 &= 0 \Rightarrow a = 1, b = -8, c = 13 \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(13)}}{2(1)} \\ &= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 52}}{2} \\ x &= \frac{8 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{8 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2(4 \pm \sqrt{3})}{2} = 4 \pm \sqrt{3} \\ \text{أما } x &= 4 + \sqrt{3} \quad \text{أو} \quad x = 4 - \sqrt{3} \\ S &= \{4 + \sqrt{3}, 4 - \sqrt{3}\} \end{aligned}$$

16 $\frac{y-5}{y+5} - \frac{y+5}{y-5} = \frac{4y^2-24}{y^2-25}$



$$\begin{aligned} \frac{y-5}{y+5} - \frac{y+5}{y-5} &= \frac{4y^2-24}{(y+5)(y-5)} \} \times (y+5)(y-5) \\ (y-5)^2 - (y+5)^2 &= 4y^2 - 24 \\ y^2 - 10y + 25 - (y^2 + 10y + 25) &= 4y^2 - 24 \\ 4y^2 - 24 - y^2 + 10y - 25 + y^2 + 10y + 25 &= 0 \\ 4y^2 + 20y - 24 &= 0 \} \div 4 \\ y^2 + 5y - 6 &= 0 \Rightarrow (y+6)(y-1) = 0 \\ \text{أما } y + 6 &= 0 \Rightarrow y = -6 \\ \text{أو } y - 1 &= 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow S = \{-6, 1\} \end{aligned}$$

17 $\frac{6-x}{x^2+x-12} - \frac{2}{x+4} = 1$



$$\frac{6-x}{(x+4)(x-3)} - \frac{2}{x+4} = 1 \quad \} \times (x+4)(x-3)$$

$$6-x-2(x-3) = x^2-3x+4x-12$$

$$6-x-2x+6 = x^2+x-12$$

$$12-3x = x^2+x-12$$

$$x^2+x-12-12+3x = 0$$

$$x^2+4x-24 = 0$$

$$a = 1, b = 4, c = -24$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4(1)(-24)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{16+96}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{112}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \pm 4\sqrt{7}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{7}$$

$$\text{أما } x = -2 + \sqrt{7} \text{ أو } x = -2 - \sqrt{7}$$

$$S = \{-2 + \sqrt{7}, -2 - \sqrt{7}\}$$

18 $\frac{4+8y}{y^2-9} + \frac{6}{y-3} = 3$



$$\frac{4+8y}{(y+3)(y-3)} + \frac{6}{y-3} = 3 \quad \} \times (y+3)(y-3)$$

$$4+8y+6(y+3) = 3(y+3)(y-3)$$

$$4+8y+6y+18 = 3(y^2-9)$$

$$14y+22 = 3y^2-27$$

$$3y^2-27-22-14y = 0 \Rightarrow 3y^2-14y-49 = 0$$

$$(y-7)(3y+7) = 0$$

$$\text{أما } y-7=0 \Rightarrow y=7$$

$$\text{أو } 3y+7=0 \Rightarrow 3y=-7 \div 3$$

$$y = -\frac{7}{3}$$

$$S = \{7, -\frac{7}{3}\}$$

هذه المسألة تم حلها مع
مسائل أخرى في الدرس



15

تدرب وحل مسائل حياتية

19 رياضة: إذا أراد راكب دراجة قطع مسافة 60 km بين مدينتين A, B بسرعة معينة، ولو زادت سرعته بمقدار 10 km/h لتمكن من قطع هذه المسافة بزمان يقل ساعة واحدة عن الزمن الأول.

نفرض السرعة الأولى v

السرعة الثانية $v + 10$



جد سرعته أولاً.

$$\frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}} = \text{الزمن}$$

$$\frac{60}{v} = \text{الزمن الأول}$$

$$\frac{60}{v + 10} = \text{الزمن الثاني}$$

$$v + 30 = 0 \Rightarrow v = -30 \text{ يهمل}$$

$$v - 20 = 0 \Rightarrow v = 20$$

الزمن الأول - الزمن الثاني = 1

$$\frac{60}{v} - \frac{60}{v + 10} = 1$$

$$60(v + 10) - 60v = v(v + 10)$$

$$60v + 600 - 60v = v^2 + 10v$$

$$v^2 + 10v - 600 = 0$$

$$(v + 30)(v - 20) = 0$$

نضرب في $v(v + 10)$



20 نقل مسافرين: تقطع طائرة الخطوط الجوية العراقية المسافة 350 km بين مدينة بغداد وأربيل بسرعة معينة، ولو زادت سرعة الطائرة بمقدار 100 km/h لتمكنَت الطائرة من قطع المسافة بزمان يقل 12 دقيقة عن الزمن الأول. جد سرعة الطائرة التقريبية أولاً.

نفرض السرعة الأولى v

السرعة الثانية $v + 10$



$$\frac{350}{v} - \frac{350}{v + 10} = \frac{1}{6}$$

$\times 6v(v + 10)$

$$2100(v + 10) - 210v = v(v + 10)$$

$$2100v + 21000 - 210v = v^2 + 10v$$

$$v^2 + 10v - 21000 = 0$$

$$(v + 150)(v - 140) = 0$$

$$v + 150 = 0 \Rightarrow v = -150 \text{ يهمل}$$

$$v - 140 = 0 \Rightarrow v = 140 \text{ km/h السرعة}$$

$$\frac{350}{v + 10} = \text{الزمن الثاني}, \quad \frac{35}{v} = \text{الزمن الأول}$$

$$\frac{1}{6} = \text{الزمن الأول} - \text{الزمن الثاني}$$

نحول الزمن من دقائق الى ساعة

$$\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$$

21 سباق: شارك نوفل في سباق ثلاثي، وتضمن السباق السباحة وركوب الدراجة والجري، واستغرق ساعتين لإنهاء السباق كما موضح في الجدول المجاور على اعتبار x تعبر عن معدل سرعته في السباحة. جد معدل سرعته التقريبية في سباق السباحة.

الزمن	السرعة km/h	المسافة km	
t_s	x	$d_s = 1$	السباحة
t_b	$5x$	$d_b = 20$	ركوب الدراجة
t_r	$x + 4$	$d_r = 4$	الجري

ملاحظة: استعمل معادلة الزمن الإجمالي الذي استغرقه نوفل في السباق بدلالة سرعته في السباحة هو:

$$T(x) = t_s + t_b + t_r$$

$$t_s = \frac{1}{x}, \quad t_b = \frac{20}{5x} = \frac{4}{x}, \quad t_r = \frac{4}{x+4}, \quad T(x) = 2$$

$$T(x) = t_s + t_b + t_r$$

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{x} + \frac{4}{x+4} = 2 \quad \} \cdot x(x+4)$$

$$x + 4 + 4(x+4) + 4x = 2x(x+4)$$

$$x + 4 + 4x + 16 + 4x = 2x^2 + 8x$$

$$9x + 20 = 2x^2 + 8x$$

$$2x^2 + 8x - 9x - 20 = 0$$

$$2x^2 - x - 20 = 0 \Rightarrow a = 2, b = -1, c = -20$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-20)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 160}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{161}}{4} \approx \frac{1 \pm 13}{4}$$

$$x \approx \frac{1 + 13}{4} \approx \frac{14}{4} \approx \frac{7}{2} \approx 3.5 \approx 4 \quad \text{أما}$$

$$x \approx \frac{1 - 13}{4} \approx \frac{-12}{4} \approx -3 \quad \text{يهمل أو}$$

السرعة تقريباً هي: $x \approx 4 \text{ km/h}$

الحل

فكّر

22 تحدّ: جد مجموعة الحل للمعادلة الآتية:

الحل

$$\frac{3}{x+5} + \frac{4}{5-x} = \frac{x^2 - 15x + 14}{x^2 - 25}$$

$$\frac{3}{x+5} - \frac{4}{x-5} = \frac{x^2 - 15x + 14}{(x+5)(x-5)} \} \times (x+5)(x-5)$$

$$3(x-5) - 4(x+5) = x^2 - 15x + 14$$

$$3x - 15 - 4x - 20 = x^2 - 15x + 14$$

$$-x - 35 = x^2 - 15x + 14$$

$$x^2 - 15x + 14 + x + 35 = 0$$

$$x^2 - 14x + 49 = 0$$

$$(x-7)^2 = 0 \Rightarrow \text{بجذر الطرفين} \Rightarrow x-7=0 \Rightarrow x=7$$

23 أصحّ الخطأ: استعمل نمير المقدار المميز لبيان جذور المعادلة:

فقال نمير أنّ للمعادلة جذران نسبتيان حقيقيان. اكتشف خطأ نمير وصحّحه.

الحل

$$\frac{2}{x-7} \times \frac{1}{x-1} = 1$$

$$\frac{2}{x^2 - x - 7x + 7} = 1$$

$$\frac{2}{x^2 - 8x + 7} = 1 \quad \text{الطرفين في الوسطين}$$

$$x^2 - 8x + 7 = 2 \Rightarrow x^2 - 8x + 7 - 2 = 0$$

$$x^2 - 8x + 5 = 0 \Rightarrow a = 1, b = -8, c = 5$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4(1)(5) = 64 - 20 = 44$$

المميز موجب وليس مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان غير نسبيين.

اكتب

مجموعة الحل في مجموعة الأعداد الحقيقية : $\frac{1}{x+6} - \frac{5}{x-6} = 2$

$$\frac{1}{x+6} - \frac{5}{x-6} = 2 \} \times (x+6)(x-6)$$

$$x-6-5(x+6)=2(x+6)(x-6)$$

$$x-6-5x-30=2(x^2-36)$$

$$-4x-36=2x^2-72$$

$$2x^2-72+4x+36=0$$

$$2x^2+4x-36=0 \} \div 2$$

$$x^2+2x-18=0 \Rightarrow a=1, b=2, c=-18$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(-18)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4+72}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{76}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{19}}{2}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{19}$$

$$x = -1 + \sqrt{19} \text{ أو } x = -1 - \sqrt{19}$$

$$S = \{-1 + \sqrt{19}, -1 - \sqrt{19}\}$$



اختبار الفصل

جد مجموعة حل للمعادلتين بيانياً:

الحل

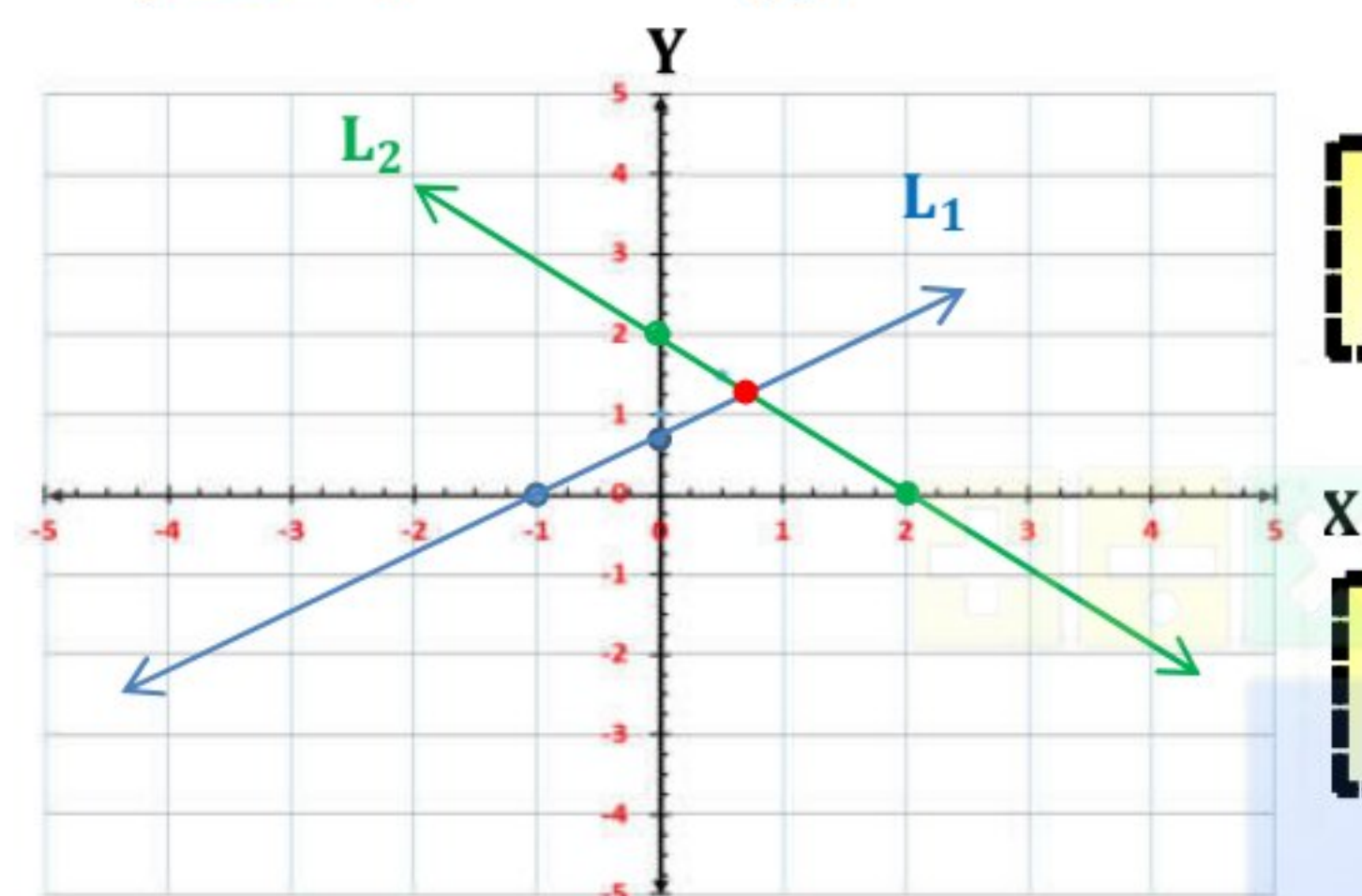
نرمز للمعادلة (1) $y = 1 + x$ بالرمز L_1

$y = 1 - 0 \Rightarrow y = 1$	x	y	(x, y)
$0 = 1 + x \Rightarrow x = -1$	0	1	(0, 1)
	-1	0	(-1, 0)

نرمز للمعادلة (2) $y = 2 - x$ بالرمز L_2

$y = 2 - 0 \Rightarrow y = 2$	x	y	(x, y)
$0 = 2 - x \Rightarrow x = 2$	0	2	(0, 2)
	2	0	(2, 0)

مجموعة حل النظام: $\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right\}$ $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$



2 $y + x = 0$ ----- (1)

$y - x = 0$ ----- (2)

الحل

نرمز للمعادلة (1) $y + x = 0$ بالرمز L_1

x	y	(x, y)
1	-1	(1, -1)
-1	1	(-1, 1)

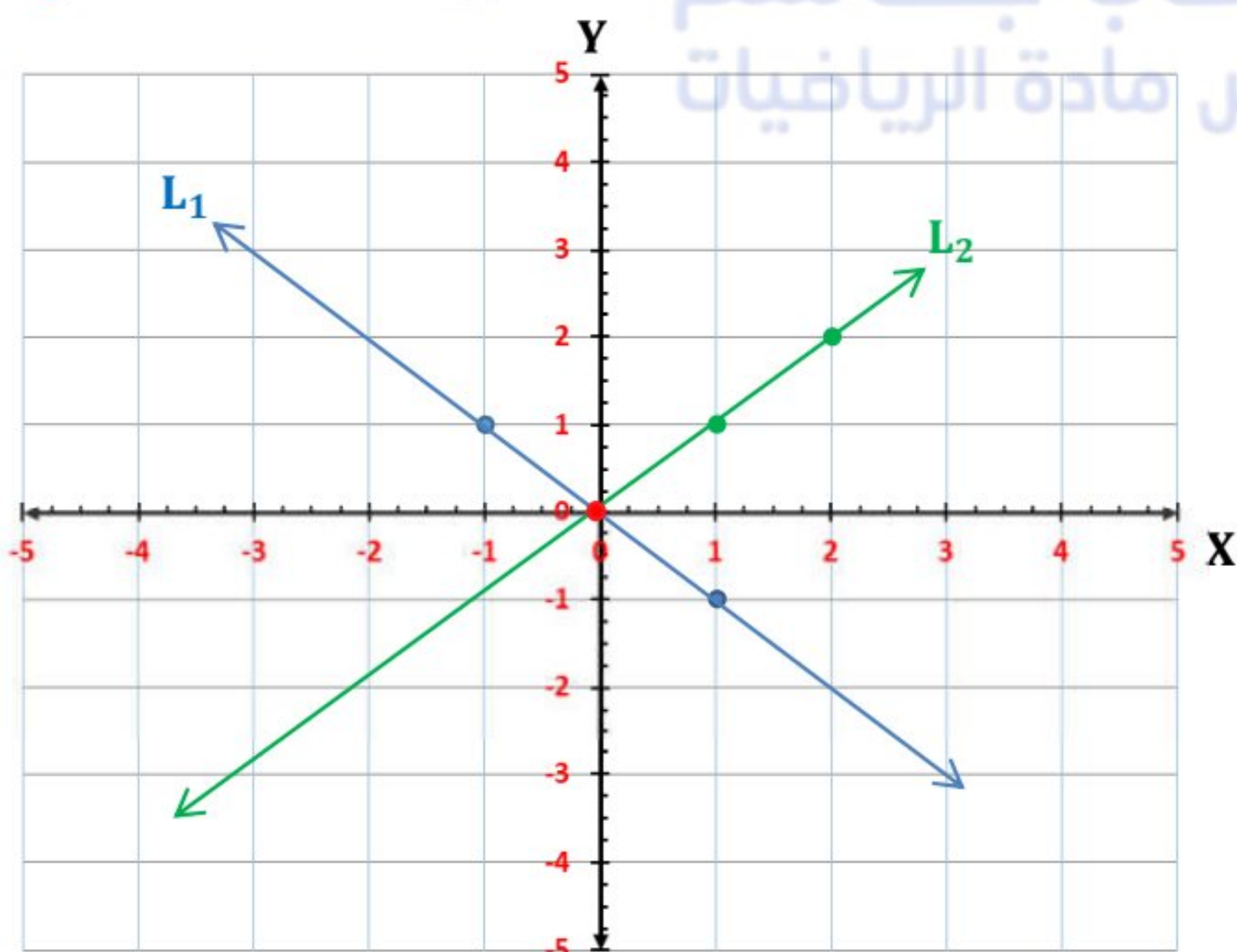
$y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$
 $1 + x = 0 \Rightarrow x = -1$

نرمز للمعادلة (2) $y - x = 0$ بالرمز L_2

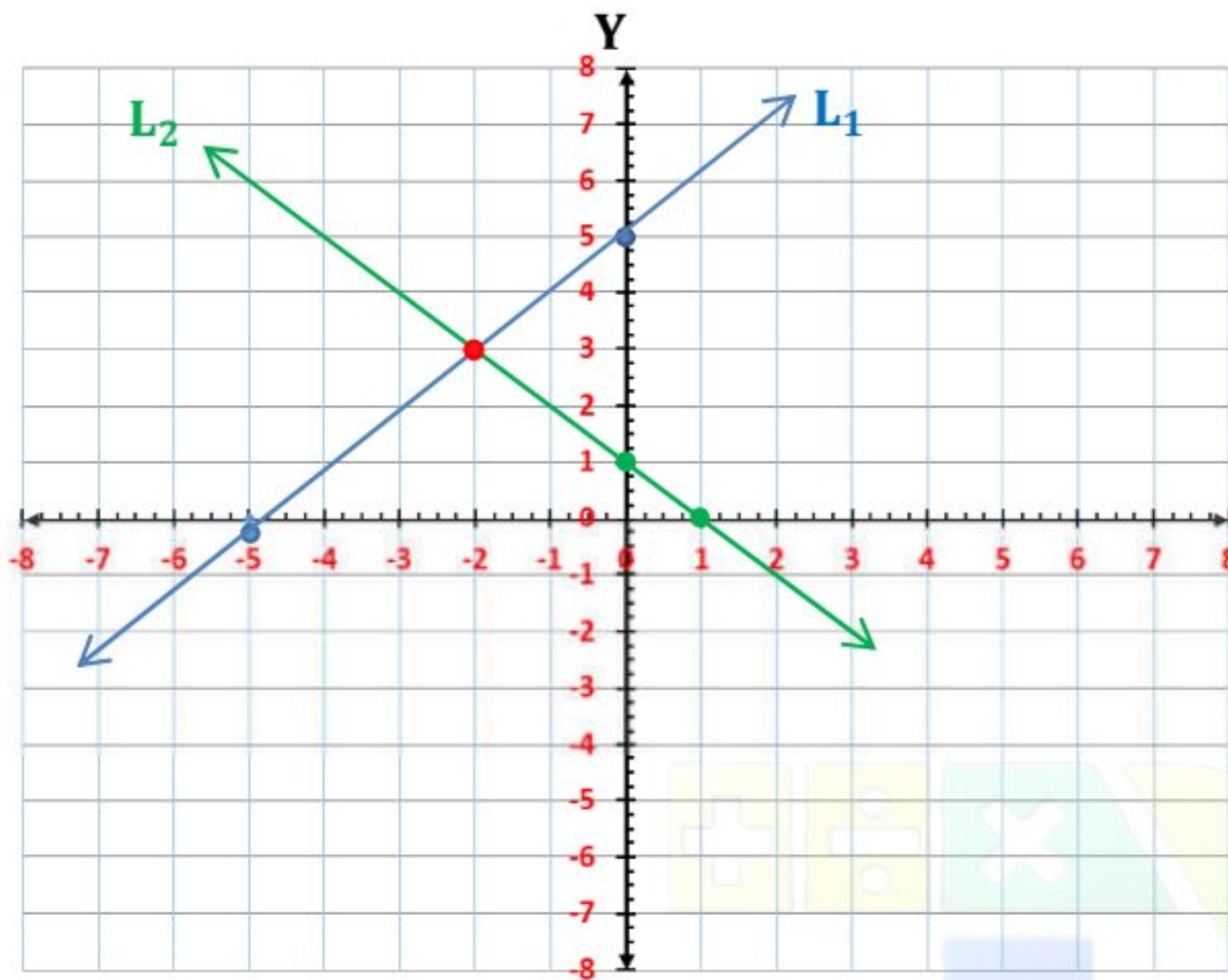
x	y	(x, y)
1	1	(1, 1)
2	2	(2, 2)

$y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$
 $2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

مجموعة حل النظام: $\{(0, 0)\}$



3 $y - x - 5 = 0$ ----- (1)
 $y + x - 1 = 0$ ----- (2)



نرمز للمعادلة (1) $y - x - 5 = 0$ بالرمز L_1

x	y	(x, y)
0	5	(0, 5)
-5	0	(-5, 0)

$$y - 0 - 5 = 0 \Rightarrow y = 5$$

$$0 - x - 5 = 0 \Rightarrow x = -5$$

نرمز للمعادلة (2) $y + x - 1 = 0$ بالرمز L_2

x	y	(x, y)
0	1	(0, 1)
1	0	(1, 0)

$$y + 0 - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$0 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

مجموعة حل النظام: $\{(-2, 3)\}$

جد مجموعة الحل للمعادلتين باستعمال التعويض أو الحذف لكل مما يأتي:

4 $2x + y = 1$ ----- (1)
 $x - y = 8$ ----- (2)



$$2x + y = 1 \text{ ----- (1)}$$

$$x - y = 8 \text{ ----- (2)}$$

بالجمع

$$3x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{3} = 3$$

نعوض قيمة $x = 3$ في معادلة (1)

$$2(3) + y = 1 \Rightarrow 6 + y = 1 \Rightarrow y = 1 - 6 = -5$$

مجموعة حل النظام: $\{(3, -5)\}$

5 $4x - 2y = -4$ ----- (1)
 $x + y = 6$ ----- (2) } $\times 2$



$$4x - 2y = -4 \text{ ----- (1)}$$

$$2x + 2y = 12 \text{ ----- (2)}$$

بالجمع

$$6x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

نعوض قيمة $x = \frac{4}{3}$ في معادلة (2)

$$\frac{4}{3} + y = 6 \Rightarrow y = 6 - \frac{4}{3} = \frac{18 - 4}{3} = \frac{14}{3}$$

مجموعة حل النظام: $\{(\frac{4}{3}, \frac{14}{3})\}$

6 $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ ----- (1) } $\times 6$
 $x + y = 2$ ----- (2) } $\times 3$



بضرب معادلة (1) في العدد 6 ومعادلة (2) في العدد 3

$$2x + 3y = 6 \text{ ----- (1)}$$

$$3x + 3y = 6 \text{ ----- (2)}$$

بالطرح

$$-x = 0 \Rightarrow x = 0$$

نعوض قيمة $x = 0$ في معادلة (2)

$$0 + y = 2 \Rightarrow y = 2$$

مجموعة حل النظام: $\{(0, 2)\}$

حل المعادلات التالية باستعمال العامل المشترك الأكبر والفرق بين مربعين:

7 $9x^2 - 25 = 0$

الحل

$$(3x + 5)(3x - 5) = 0$$

أما $3x + 5 = 0 \Rightarrow 3x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{3}$

أو $3x - 5 = 0 \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

$$S = \left\{ \frac{5}{3}, -\frac{5}{3} \right\}$$

8 $3y^2 - 12 = 0$

الحل

$$\frac{3y^2}{3} - \frac{12}{3} = 0 \} \div 3 \Rightarrow y^2 - 4 = 0$$

$$(y + 2)(y - 2) = 0$$

أما $y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2$

أو $y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow S = \{2, -2\}$

9 $(7 - Z)^2 - 1 = 0$

الحل

$$(7 - Z + 1)(7 - Z - 1) = 0$$

$$(8 - Z)(6 - Z) = 0$$

أما $8 - Z = 0 \Rightarrow Z = 8$

أو $6 - Z = 0 \Rightarrow Z = 6 \Rightarrow S = \{8, 6\}$

حل المعادلات التالية باستعمال قاعدة الجذر التربيعي:

10 $x^2 = 49$

الحل

$$x = \pm\sqrt{49} \Rightarrow x = \pm 7 \Rightarrow S = \{7, -7\}$$

11 $81 - y^2 = 0$

الحل

$$y^2 = 81 \Rightarrow y = \pm\sqrt{81} \Rightarrow y = \pm 9$$

$$S = \{9, -9\}$$

12 $z^2 = \frac{36}{9}$ $z = \pm\sqrt{\frac{36}{9}} \Rightarrow z = \pm\frac{6}{3} = \pm 2 \Rightarrow S = \{2, -2\}$

الحل

حل المعادلات التالية بالتحليل بالتجربة:

13 $x^2 + 9x + 18 = 0$

الحل

$(x + 6)(x + 3) = 0$

أما $x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6$

$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow S =$

$\{-6, -3\}$ أو

14 $z^2 - 2z - 48 = 0$

الحل

$(z - 8)(z + 6) = 0$

أما $z - 8 = 0 \Rightarrow z = 8$

أو $z + 6 = 0 \Rightarrow z = -6 \Rightarrow S = \{8, -6\}$

15 $3x^2 - x - 10 = 0$

الحل

$(x - 2)(3x + 5) = 0$

أما $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

أو $3x + 5 = 0 \Rightarrow 3x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{3}$

$S = \{2, -\frac{5}{3}\}$

16 $7z^2 - 18z - 9 = 0$

الحل

$(z - 3)(7z + 3) = 0$

أما $z - 3 = 0 \Rightarrow z = 3$

أو $7z + 3 = 0 \Rightarrow 7z = -3 \Rightarrow z = -\frac{3}{7}$

$S = \{3, -\frac{3}{7}\}$

17 ما العدد الذي مربعه ينقص عن أربعة أمثاله بمقدار 3؟

$4x - x^2 = 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$(x - 3)(x - 1) = 0$

أما $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

أو $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow S = \{3, 1\}$

نفرض العدد x ، أربعة أمثاله $4x$

مربع العدد x^2

الحل

18 حوض سباحة يزيد طوله على مثلي عرضه بمقدار 4m ومساحته 48 m^2 . ما أبعاد المسبح؟

نفرض عرض المسبح x ، مثلي عرضه $2x$

طول المسبح $2x + 4$

مساحة المسبح = الطول $\times$ العرض

$x(2x + 4) = 48 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 48 = 0$

$(x + 6)(2x - 8) = 0$

أما $x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6$ أو $2x - 8 = 0 \Rightarrow 2x = 8$

يهمل

$x = \frac{8}{2} = 4 \text{m}$ العرض

$2x + 4 = 2(4) + 4 = 8 + 4 = 12 \text{m}$ الطول

حل المعادلات التالية بالمربع الكامل:

19 $x^2 - 16x + 64 = 0$

الحل

$$(x - 8)^2 = 0 \Rightarrow x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8$$

20 $\frac{1}{9} - \frac{2}{3}Z + \frac{1}{4}Z^2 = 0$

الحل

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}Z\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{2}Z = 0$$

$$\frac{1}{2}Z = \frac{1}{3} \Rightarrow 3Z = 2 \Rightarrow Z = \frac{2}{3}$$

حل المعادلات التالية بإكمال المربع:

21 $5Z^2 + 6Z = 9$

الحل

$$5Z^2 + 6Z = 9 \} \div 5 \Rightarrow Z^2 + \frac{6}{5}Z = \frac{9}{5}$$

$$\left(\frac{1}{2} \times \frac{6}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

نضيف الى طرفي المعادلة

$$Z^2 + \frac{6}{5}Z + \frac{9}{25} = \frac{9}{5} + \frac{9}{25}$$

$$\left(Z + \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{45 + 9}{25}$$

$$\left(Z + \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{54}{25}$$

باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$Z + \frac{3}{5} = \pm \frac{3\sqrt{6}}{5}$$

$$Z + \frac{3}{5} = \pm \frac{3\sqrt{6}}{5}$$

أما $Z + \frac{3}{5} = \frac{\sqrt{3}}{5} \Rightarrow Z = \frac{\sqrt{3}}{5} - \frac{3}{5} \Rightarrow Z = \frac{\sqrt{3}-3}{5}$

أو $Z + \frac{3}{5} = -\frac{\sqrt{3}}{5} \Rightarrow Z = -\frac{\sqrt{3}}{5} - \frac{3}{5}$

$$Z = \frac{-\sqrt{3}-3}{5} \Rightarrow S = \left\{ \frac{\sqrt{3}-3}{5}, \frac{-\sqrt{3}-3}{5} \right\}$$

22 $x^2 - 14x = 32$

الحل

$$\left(\frac{1}{2} \times 14\right)^2 = (7)^2 = 49$$

نضيف الى طرفي المعادلة

$$x^2 - 14x + 49 = 32 + 49$$

$$(x - 7)^2 = 81$$

باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$x - 7 = \pm 9$$

أما $x - 7 = 9 \Rightarrow x = 9 + 7 = 16$

أو $x - 7 = -9 \Rightarrow x = -9 + 7 = -2$

$$S = \{16, -2\}$$

جد مجموعة الحل للمعادلات التالية باستعمال القانون العام:

23 $x^2 - 3x - 7 = 0$

الحل

$a = 1$, $b = -3$, $c = -7$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-7)}}{2(1)}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 28}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{37}}{2}$$

أما $x = \frac{3 + \sqrt{37}}{2}$ أو $x = \frac{3 - \sqrt{37}}{2}$

$$S = \left\{ \frac{3 + \sqrt{37}}{2}, \frac{3 - \sqrt{37}}{2} \right\}$$

24 $3y^2 - 12y = -3$

الحل

$$3y^2 - 12y + 3 = 0$$

$a = 3$, $b = -12$, $c = 3$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(3)(3)}}{2(3)}$$

$$= \frac{12 \pm \sqrt{144 - 36}}{6} = \frac{12 \pm \sqrt{108}}{6}$$

$$y = \frac{12 \pm 6\sqrt{3}}{6} = \frac{6(2 \pm \sqrt{3})}{6} = 2 \pm \sqrt{3}$$

أما $y = 2 + \sqrt{3}$

أو $y = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow S = \{2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}\}$

25 $5Z^2 + 6Z = 9$

الحل

$5Z^2 + 6Z - 9 = 0 \Rightarrow a = 5$, $b = 6$, $c = -9$

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4(5)(-9)}}{2(5)}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{36 + 180}}{10} = \frac{6 \pm \sqrt{216}}{10}$$

$$Z = \frac{6 \pm 6\sqrt{6}}{10} = \frac{2(3 \pm 3\sqrt{6})}{10} = \frac{3 \pm 3\sqrt{6}}{5}$$

أما $Z = \frac{3 + 3\sqrt{6}}{5}$ أو $Z = \frac{3 - 3\sqrt{6}}{5}$

$$S = \left\{ \frac{3 + 3\sqrt{6}}{5}, \frac{3 - 3\sqrt{6}}{5} \right\}$$

حدد جذور المعادلة أولاً، ثم جد مجموعة الحل إذا كان ممكناً:

26 $2x^2 + 8x + 8 = 0$



$a = 2, b = 8, c = 8$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (8)^2 - 4(2)(8) = 64 - 64 = 0$

مقدار المميز يساوي صفر ونوع الجذران متساويان ولها جذر حقيقي واحد .

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2(2)} = \frac{-8}{4} = -2$$

27 $y^2 - 6y - 9 = 0$



$a = 1, b = -6, c = -9$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(-9) = 36 + 36 = 72$

مقدار المميز موجب وليس مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان غير نسبيين .

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{72}}{2(1)} = \frac{6 \pm 6\sqrt{2}}{4}$$

$$y = \frac{2(3 \pm 3\sqrt{2})}{4} = \frac{3 \pm 3\sqrt{2}}{2}$$

أما $y = \frac{3 + 3\sqrt{2}}{2}$ أو $y = \frac{3 - 3\sqrt{2}}{2}$

$$S = \left\{ \frac{3 + 3\sqrt{2}}{2}, \frac{3 - 3\sqrt{2}}{2} \right\}$$

28 $4z^2 - 3z + 7 = 0$



$a = 4, b = -3, c = 7$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-3)^2 - 4(4)(7) = 9 - 112 = -103$

مقدار المميز سالب ونوع الجذران غير حقيقيان وليس لها حل في R

29 ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $x^2 - (k + 6)x + 9 = 0$ متساويين؟ تحقق من الإجابة.

الحل

$$a = 1, \quad b = -(k + 6), \quad c = 9$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$[-(k + 6)]^2 - 4(1)(9) = 0$$

$$(k + 6)^2 - 36 = 0$$

$$(k + 6)^2 = 36 \quad \text{باخذ الجذر التربيعي للطرفين}$$

$$k + 6 = \pm 6$$

$$\text{أما } k + 6 = 6 \Rightarrow k = 6 - 6 = 0$$

$$\text{أو } k + 6 = -6 \Rightarrow k = -6 - 6 = -12$$

يكون جذري المعادلة متساويين اذا كان المميز $= 0$

التحقق: نعوض قيم k بالمعادلة الأصلية ونجد جذور المعادلة:

عندما: $k = 0$

$$x^2 - (k + 6)x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x - 3)^2 = 0 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

عندما: $k = -12$

$$x^2 - (k + 6)x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$(x + 3)^2 = 0 \Rightarrow x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية وتحقق من صحة الحل:

30 $\frac{1}{6y^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{y}$

الحل

$$\left\{ \frac{1}{6y^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{y} \right\} \times 6y^2$$

$$1 + 3y^2 = 6y \Rightarrow 3y^2 - 6y + 1 = 0$$

$$a = 1, \quad b = -6, \quad c = 1$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(3)(1)}}{2(3)}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 12}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{24}}{6}$$

$$y = \frac{6 \pm 2\sqrt{6}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{6}}{3}$$

$$\text{أما } y = \frac{3 + \sqrt{6}}{3} \quad \text{أو} \quad y = \frac{3 - \sqrt{6}}{3}$$

31 $\frac{6x}{5} = \frac{5}{6x}$ الطرفين في الوسطين

الحل

$$36x^2 = 25 \Rightarrow x^2 = \frac{25}{36} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{25}{36}}$$

$$x = \pm \frac{5}{6}$$

$$\text{أما } x = \frac{5}{6} \quad \text{أو} \quad x = -\frac{5}{6}$$

تحقق من صحة الحل: نعوض قيم x في المعادلة الأصلية:

عندما: $x = \frac{5}{6}$

$$\frac{6x}{5} = \frac{6\left(\frac{5}{6}\right)}{5} = \frac{5}{5} = 1 \quad \text{الطرف الايسر}$$

$$\frac{5}{6x} = \frac{5}{6\left(\frac{5}{6}\right)} = \frac{5}{5} = 1 \quad \text{الطرف الايمن}$$



32 الطرفين في الوسطين $\frac{Z+4}{Z^2} = \frac{1}{2}$

$$Z^2 = 2Z + 8 \Rightarrow Z^2 - 2Z - 8 = 0$$

$$(Z - 4)(Z + 2) = 0$$

أما $Z - 4 = 0 \Rightarrow Z = 4$

أو $Z + 2 = 0 \Rightarrow Z = -2$

تحقق من صحة الحل: نعوض قيم Z في المعادلة الأصلية

$$Z = 4 \Rightarrow \frac{Z+4}{Z^2} = \frac{4+4}{(4)^2} = \frac{8}{16}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ الطرف الايمن}$$

تحقق من صحة الحل: نعوض قيم y في المعادلة الأصلية:

عندما: $y = \frac{3 + \sqrt{6}}{3}$

$$\frac{1}{6y^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6\left(\frac{3+\sqrt{6}}{3}\right)^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6\left(\frac{9+6\sqrt{6}+6}{9}\right)} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2\left(\frac{15+6\sqrt{6}}{3}\right)} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2(5+2\sqrt{6})} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{10+4\sqrt{6}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{10+4\sqrt{6}} \times \frac{10-4\sqrt{6}}{10-4\sqrt{6}} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{10-4\sqrt{6}}{100-96} + \frac{1}{2} = \frac{10-4\sqrt{6}}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5-2\sqrt{6}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{6-2\sqrt{6}}{2} = 3 - \sqrt{6} \text{ الطرف الايسر}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{\frac{3+\sqrt{6}}{3}} = \frac{3}{3+\sqrt{6}} \times \frac{3-\sqrt{6}}{3-\sqrt{6}} = \frac{3(3-\sqrt{6})}{9-6} = \frac{3(3-\sqrt{6})}{3} = 3 - \sqrt{6} \text{ الطرف الايمن}$$

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات الآتية:

33 $\frac{4}{x-5} - \frac{3}{x-2} = 1$

$$\frac{4}{x-5} - \frac{3}{x-2} = 1 \} \times (x-5)(x-2)$$

$$4(x-2) - 3(x-5) = (x-5)(x-2)$$

$$4x - 8 - 3x + 15 = x^2 - 2x - 5x + 10$$

$$x + 7 = x^2 - 7x + 10$$

$$x^2 - 7x + 10 - x - 7 = 0$$

$$x^2 - 8x + 3 = 0 \Rightarrow a = 1, b = -8, c = 3$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 12}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{52}}{2}$$

$$x = \frac{8 \pm 2\sqrt{13}}{2} = 4 \pm \sqrt{13} \text{ أما } x = 4 + \sqrt{13}$$

أو $x = 4 - \sqrt{13}$

34 $\frac{2y}{y+2} + \frac{y}{2-y} = \frac{7}{y^2-4}$

$$\frac{2y}{y+2} - \frac{y}{y-2} = \frac{7}{(y+2)(y-2)} \}$$

$$\times (y+2)(y-2)$$

$$2y(y-2) - y(y+2) = 7$$

$$2y^2 - 4y - y^2 - 2y = 7$$

$$y^2 - 6y - 7 = 0 \Rightarrow (y-7)(y+1) = 0$$

أما $y - 7 = 0 \Rightarrow y = 7$

أو $y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$

أختبر نفسك في وزاريات الفصل الثالث

السؤال رقم 1

جد مجموعة الحل للنظام بيانياً:

$$x - y = 1 \text{ ————— (1)}$$

$$x + y = 3 \text{ ————— (2)}$$

السؤال رقم 2

جد مجموعة الحل للنظام باستعمال التعويض:

$$\begin{array}{lll} \text{1} & y = x - 2 \text{ ————— (1)} & \text{2} & x = 4y \text{ ————— (1)} & \text{3} & 2x - y = 7 \text{ ————— (1)} \\ & y = 3 - x \text{ ————— (2)} & & x = y + 6 \text{ ————— (2)} & & x + y = 8 \text{ ————— (2)} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{4} & y = 1 + x \text{ ————— (1)} & \text{5} & x + y = 25 \text{ ————— (1)} & \text{6} & y = x - 4 \text{ ————— (1)} \\ & y = 2 - x \text{ ————— (2)} & & x + \frac{1}{2}y = 20 \text{ ————— (2)} & & x = 2 - y \text{ ————— (2)} \end{array}$$

السؤال رقم 3

جد مجموعة الحل للنظام باستعمال الحذف:

$$\begin{array}{lll} \text{1} & y - 5x = 10 \text{ ————— (1)} & \text{2} & 5x + 8y = 10 \text{ ————— (1)} & \text{3} & 4x - 3y = 6 \text{ ————— (1)} \\ & y - 3x = 8 \text{ ————— (2)} & & x - 4y = 2 \text{ ————— (2)} & & 3y - x = 12 \text{ ————— (2)} \\ \text{4} & x + 2y = 5 \text{ ————— (1)} & \text{5} & 3x - 4y = 12 \text{ ————— (1)} & \text{6} & 3y - 2x - 7 = 0 \text{ ————— (1)} \\ & 3x - y = 1 \text{ ————— (2)} & & 5x + 2y = -6 \text{ ————— (2)} & & y + 3x + 5 = 0 \text{ ————— (2)} \end{array}$$

السؤال رقم 4

حل المعادلات التالية

$$\begin{array}{llll} \text{1} & 3x^2 - 9 = 0 & \text{2} & 2z^2 - 8 = 0 & \text{3} & (z + 1)^2 - 36 = 0 & \text{4} & x^2 = 144 \\ \text{5} & 81 - y^2 = 0 & \text{6} & 4(x^2 - 12) = 33 & \text{7} & 9(x^2 + 1) = 34 & \text{8} & 3\sqrt{x} = 18 & \text{9} & 4y^2 - 3 = 0 \\ \text{10} & \frac{x+4}{2} = \frac{-3}{2x} & \text{11} & \frac{y+1}{y^2} = \frac{3}{4} & \text{12} & \frac{x+4}{x^2} = \frac{1}{2} & \text{13} & \frac{9x+22}{x^2} = 1 & \text{14} & \frac{6}{x-2} + \frac{x}{2-x} = 3 \\ \text{14} & y^2 - 8y - 33 = 0 & \text{15} & 70 - 33y + 2y^2 = 0 & \text{16} & (x - 3)(x + 2) = 14 \\ \text{17} & x^2 - 9x + 18 = 0 & \text{18} & y^2 + 48y - 49 = 0 & \text{19} & 3x^2 + 18x - 21 = 0 \end{array}$$

السؤال رقم 5 مجموعة مسائل الفرضية

- 1 ما العدد الذي مربعه يزيد عليه بمقدار 12؟
- 2 ما العدد الذي مربعه يزيد على ضعفه بمقدار 35؟
- 3 ما العدد الذي لو أُضيف 4 أمثاله إلى مربعه لكان الناتج 45؟
- 4 ما العدد الذي ينقص ضعفه عن مربعه بمقدار 35؟
- 5 ما العدد الذي مربعه ينقص عن أربعة أمثاله بمقدار 3؟
- 6 ما العدد الذي يزيد نصفه عن ربعه بمقدار 3؟
- 7 مسبح يقل طوله عن ثلاثة أمثال عرضه بمقدار 1m. فإذا كانت مساحة المسبح 140 m^2 ، جد أبعاده.
- 8 حوض سباحة يزيد طوله على مثلي عرضه بمقدار 4m ومساحته 48 m^2 . ما أبعاد المسبح؟
- 9 سجادة طولها يزيد على عرضها بمقدار 2m ومساحتها 48 m^2 . ما أبعاد السجادة؟
- 10 أرض مستطيلة الشكل يزيد طولها بمقدار 4m على عرضها. ما بُعدا الأرض إذا كانت مساحتها 60 m^2 ؟
- 11 صالة طعام ينقص طولها عن مثلي عرضها بمقدار 3m ومساحتها 54 m^2 . ما أبعاد الصالة؟
- 12 قطعة موكيت سجاد مستطيلة طولها 12m وعرضها 3m، قُطِّعت إلى أجزاء لتغطية أرضية غرفة مربعة الشكل. أكتب معادلة تمثل المسألة ثم جد طول ضلع الغرفة.
- 13 إذا كان طول ملعب كرة السلة يزيد بمقدار 2m على ضعف عرضه، ومساحته 480 m^2 . فما بُعدي الملعب؟
- 14 قطعة معدن مستطيلة الشكل ينقص عرضها بمقدار 2m عن طولها. ما بُعدا القطعة المعدنية إذا كانت مساحتها 24 m^2 ؟

السؤال رقم 6 جد مجموعة الحل للمعادلات التالية باستعمال القانون العام:

1 $y^2 + 3y - 9 = 0$ 2 $x^2 - 3x - 5 = 0$ 3 $3x^2 - 9x = -2$

السؤال رقم 7 حدّد جذور المعادلة أولاً، ثم جد مجموعة الحل إذا كان ممكناً:

1 $y^2 - 2y + 1 = 0$ 2 $3x^2 - 7x + 6 = 0$ 3 $y^2 - 4y - 9 = 0$

السؤال رقم 8

بيّن أنّ المعادلة $z^2 - 6z + 28 = 0$ ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية.

السؤال رقم 9

ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $x^2 - (k + 2)x + 36 = 0$ متساويين؟ تحقق من الإجابة.

السؤال رقم 10

ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $4y^2 + 25 = (k - 5)y$ متساويين؟ تحقق من الإجابة.

هذه المراجعة مفيدة جدا لكم في الامتحانات سواء كانت في المدرسة أو في الامتحان الوزاري
أمثلة وتمارين - وزاريات - أفكار مرشحة - مسائل حياتية و ثوابت متكررة في الوزاري



تصوير 2025

ريهاب جاسم محمد
مدرس الرياضيات

الجزء الأول يحتوي على
الفصل الأول : العلاقات و المتباينات في R
الفصل الثاني : المقادير الجبرية
الفصل الثالث : المعادلات

الصف



المتوسط

قناتي على اليوتيوب



طبعة

2026