

الجزء الثاني الفصول [4-5-6]

حسب حذفات
وزارة التربية

2026

Maths

الرياضيات

3

المتوسط

المنهج بالكامل
مصور عبر قناتي
على يوتيوب

ريهاب جاسم

إعداد

الإستاذ ريهاب جاسم



أمسح الباركود
بهاتفك



Contact Us

07810772656

@RMA96



درجات مجموعة من الطلبة الذين تخرجوا على يد الأستاذ في مادة الرياضيات لعام 2025

الصف الثالث المتوسط - الدور الاول

كل الاحترام والشكر التقدير لكم على جهودكم المبذولة فبكم نرتقي , بارك الله فيكم

ملاحظة : إذا كنتم تريدون أن تصبحوا من الطلبة المتفوقين لدى الأستاذ إلتزموا بما يلي :

■ الإلتزام بدروس الأستاذ ومتابعته على يوتيوب .

■ حل الواجبات البيتية باستمرار بدون إنقطاع .

■ إقتناء ملزمة الأستاذ الخاصة بالمادة .

ت	أسم الطالب / ة	الدرجة	ت	أسم الطالب / ة	الدرجة
1	عبيدة احمد فؤاد	100	33	مهدي طالب مهدي	86
2	عبد الخالق راجي جليل	100	34	عمر سلوان قاسم	85
3	بشار باسم محمد	100	35	حسين علي خميس	84
4	دنيا علي يوسف	98	36	محمد علاء يونس	83
5	حسين علي بدري	97	37	يوسف صوكر سلمان	81
6	تقوى إبراهيم خليل	97	38	عبد الله عمار ابراهيم	81
7	شهد علاء يوسف	97	39	حسن محمد امجد	81
8	مهند باسم هادي	96	40	احمد غزوان عبد الجبار	79
9	احمد ماجد مظلوم	95	41	حيدر قيصر صلال	79
10	حسام مالك جلوب	95	42	علي باسم صالح	79
11	حيدر رياض حسين	95	43	عمار مهند فالح	79
12	يوسف كهلان عبد	95	44	ياسر قيس عبد الرحمن	79
13	همام احمد خزعل	94	45	أيوب حسن داود	78
14	احمد فرات خالد	94	46	علي احمد مبدر	78
15	محمد عبد الله عبد الحسن	93	47	وسام شاكر محمود	77
16	علي احمد منصور	93	48	أبو الفضل احمد حمزة	76
17	إبراهيم عمر محمد	91	49	عبد المجيد عبد الغني مجيد	76
18	سعد فرج موحان	91	50	بشار ضياء علي	75
19	ريحانة احمد هادي	90	51	غسان محمد خلف	75

75	غدير سلوان عبد	52	90	حيدر انيس عبد	20
74	غيث عباس خليفة	53	90	كرار اركان احمد	21
74	عبد الله سلام هادي	54	89	علي حامد مصلح	22
74	يوسف اياد سمير	55	89	عمر غانم فالح	23
73	احمد عادل احمد	56	89	حسن محمد حسن	24
73	اوس علي عزيز	57	89	حسين ضياء احمد	25
72	محسن هيثم بريسم	58	89	حسين ابراهيم قاسم	26
72	محمد رافد صالح	59	88	حيدر صباح هادي	27
72	ايسر نهاد مخبير	60	88	زينب قاسم شاكر	28
71	عبد الله حامد عباس	61	88	عبد الرزاق عبد الأمير طاهر	29
71	عبد الله وليد خالد	62	87	عبد الله حسين ياور	30
71	ياسر عامر احمد	63	87	مصطفى رافد محمود	31
70	ادريس محمد عزت	64	87	منار أنور علي	32

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

امسح الرمز للوصول للدروس المجانية على يوتيوب



رہاب جاسم محمد

مدرس الرياضيات

SCAN QR CODE SCAN QR CODE

الجزء الأول من
الدرس على يوتيوب



الفصل الرابع / الهندسة الإحداثية

الدرس 1-4 التمثيل البياني للمعادلات في المستوى الإحداثي.

[4-1-1] التمثيل البياني للمعادلة الخطية في المستوى الإحداثي

خطوات الحل

- 1 عزل المتغير y عن باقي المعادلة والتخلص من معاملاته ان وجد 2 نأخذ قيمتين لـ x كحد أدنى
- 3 في حال وجود كسر يجب ان نأخذ قيم تقبل القسمة على المقام و الأفضل هما الصفر والمقام نفسه أو اي قيم تقبل القسمة على المقام
- 4 نعوض قيم x في المعادلة لنحصل على قيم y وبالتالي نحصل على النقاط ونمثلها على المستوى الإحداثي و رسم الدالة الخطية يكون على شكل خط مستقيم

تعلم

في دراسة لتحديد كمية الحليب التي تحتاج إليها جراء آكل النمل حديثو الولادة باللترات على مدى بضعة أيام، توصل الباحث الى المعادلة: $2y - x = 0$ حيث x عدد الايام، y كمية الحليب باللترات.

مثال (1)

كيف يمكنني تمثيل العلاقة بالمستوي الإحداثي؟
لتمثيل المعادلة $2y - x = 0$ في المستوى الإحداثي نتبع مايتي:

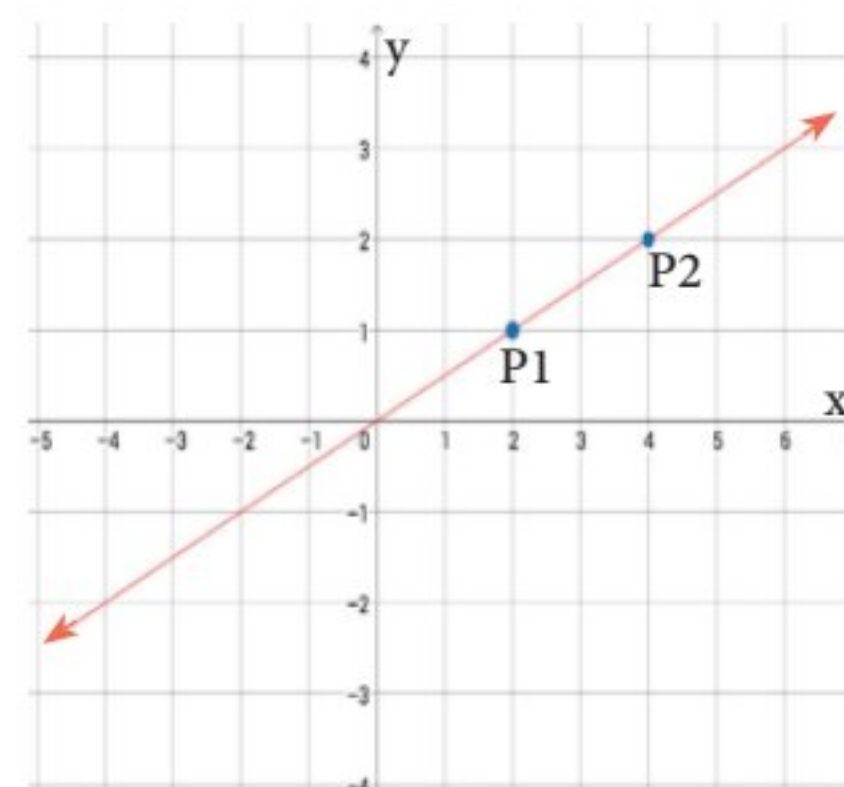
الخطوة (1): نجعل المعادلة بشكل $y = f(x)$ (أي y بدلالة x) $2y - x = 0 \Rightarrow 2y = x \Rightarrow y = \frac{1}{2}x$

الخطوة (2): اختار في الاقل قيمتين للمتغير x ولتكن $x=2, x=4$ نعوضهما في المعادلة للحصول على أزواج مرتبة.

$$x = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}(2) \Rightarrow y = 1 \Rightarrow P_1(2, 1) \quad // \quad x = 4 \Rightarrow y = \frac{1}{2}(4) \Rightarrow y = 2 \Rightarrow P_2(4, 2)$$

الخطوة (3): نعمل جدول بالقيم الناتجة ونمثل الأزواج المرتبة في المستوى الإحداثي ونصل بين النقطتين، الشكل الناتج يمثل مستقيماً.

x	y	(x,y)
2	1	$P_1(2, 1)$
4	2	$P_2(4, 2)$



ملاحظة: معادلة المستقيم الذي يمر
بنقطة الاصل، خالية من الحد المطلق.

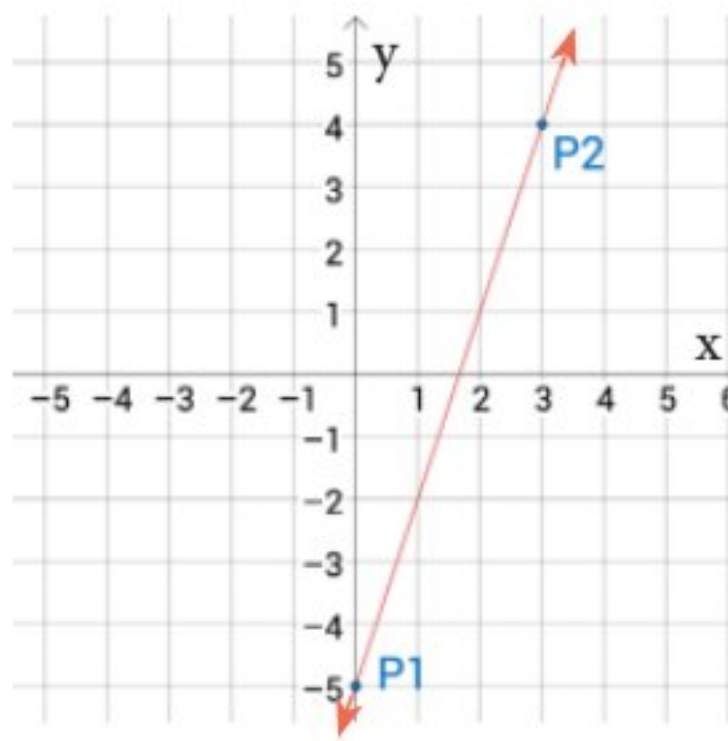
مثال (2) مثل المعادلات التالية في المستوى الإحداثي، ماذا تلاحظ؟

i) $y - 3x + 5 = 0$

ii) $y = 4$

iii) $x = -3$

i) $y - 3x + 5 = 0 \Rightarrow y = 3x - 5$

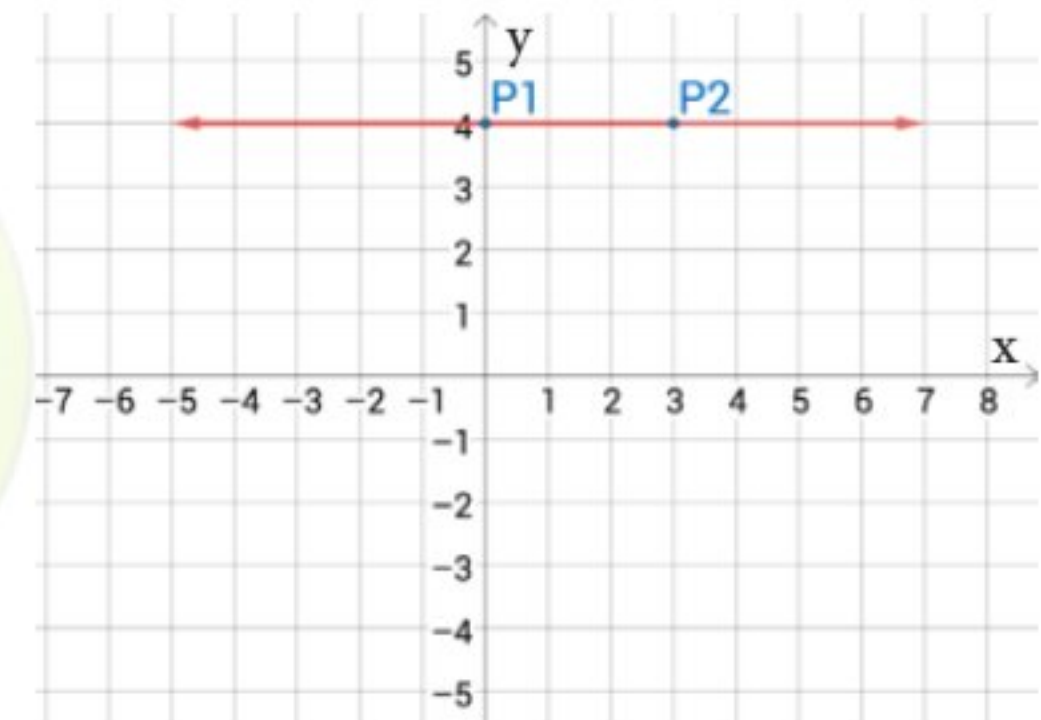


x	y=3x-5	(x,y)
0	3(0)-5=-5	P ₁ (0,-5)
3	3(3)-5=4	P ₂ (3,4)

المستقيم يقطع محور السينات والصادات ولا يمر بنقطة الاصل

ii) $y = 4$

x	y=4	(x,y)
0	4	P ₁ (0,4)
3	4	P ₂ (3,4)



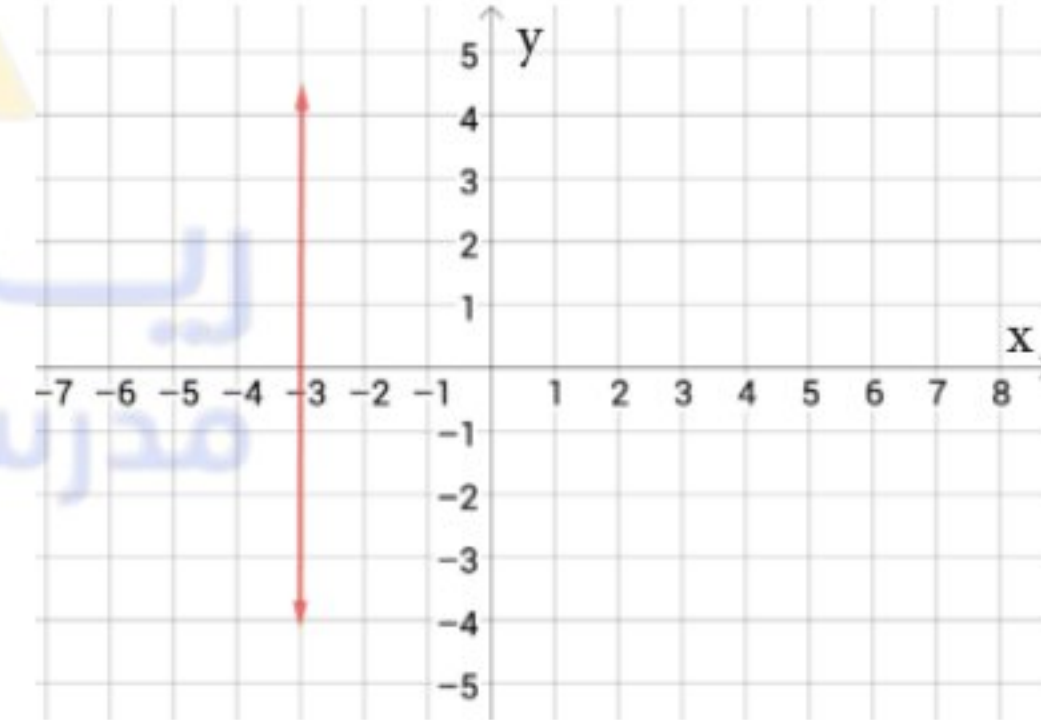
المستقيم يوازي محور السينات وعمودي على محور الصادات عند

iii) $x = -3$

النقطة (0, 4)

المستقيم x=-3 يوازي محور الصادات وعمودي على محور السينات

عند النقطة (-3, 0)



الدرس الثاني من الجزء الثاني من

يمكن وضع ما تقدم في الجدول الآتي:

المعادلة	العلاقة مع المحورين
$ax+by+c=0$	المستقيم يقطع المحورين ولا يمر بنقطة الاصل
$ax+by=0$	المستقيم يقطع المحورين في نقطة الاصل
$y = k, k \in R$	المستقيم يوازي محور السينات وعمودي على محور الصادات ويمر بالنقطة (0, k)
$x = h, h \in R$	المستقيم يوازي محور الصادات وعمودي على محور السينات ويمر بالنقطة (h, 0)

ملاحظة / الجدول حفظ ومهم في الحل

شاهد هذا الدرس
على يوتيوب



3

[4-1-2] التمثيل البياني للمعادلة التربيعية في المستوى الإلهادئي

الصيغة العامة للمعادلة التربيعية هي: $y = ax^2 + bx + c$ حيث

$$a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$$

سوف نتطرق في هذا البند الى المعادلة التربيعية بالصيغة $y = ax^2 + c$ حيث $a \neq 0, a, c \in \mathbb{R}$ وطريقة تمثيلها.

x	$y = ax^2 + c$	y	(x,y)
-2	تعويض قيم x	الناتج	الازواج المرتبة
-1			
0			
1			
2			

لتمثيل المعادلة $y = ax^2 + c$ نعمل الجدول المجاور ويكون التمثيل البياني للمعادلة هو $\cup$ او $\cap$

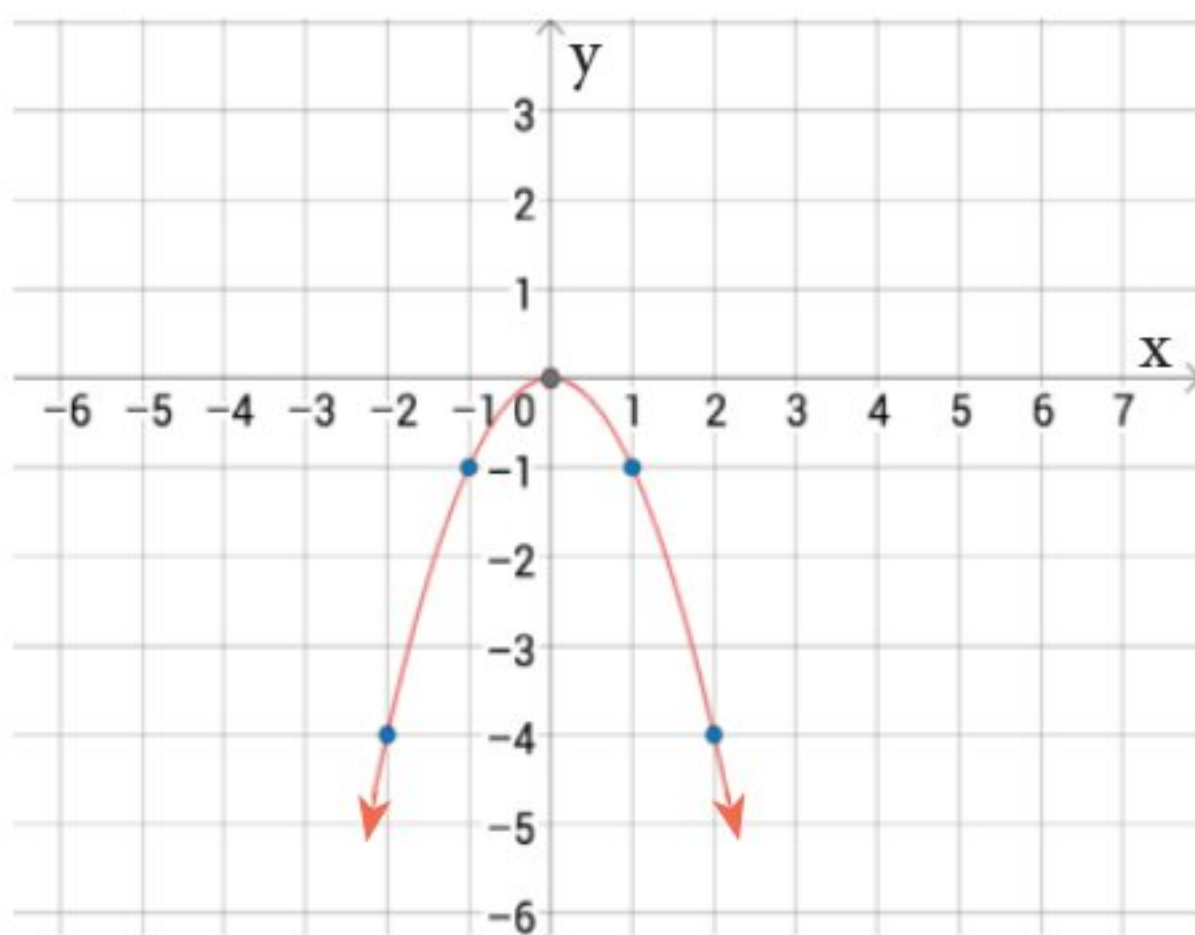
خطوات الحل

1 عزل المتغير y عن باقي المعادلة والتخلص من معاملاته ان وجد

2 نأخذ القيم الافتراضية $-2, -1, 0, 1, 2$ لتعويضها في المعادلة والحصول على النقاط

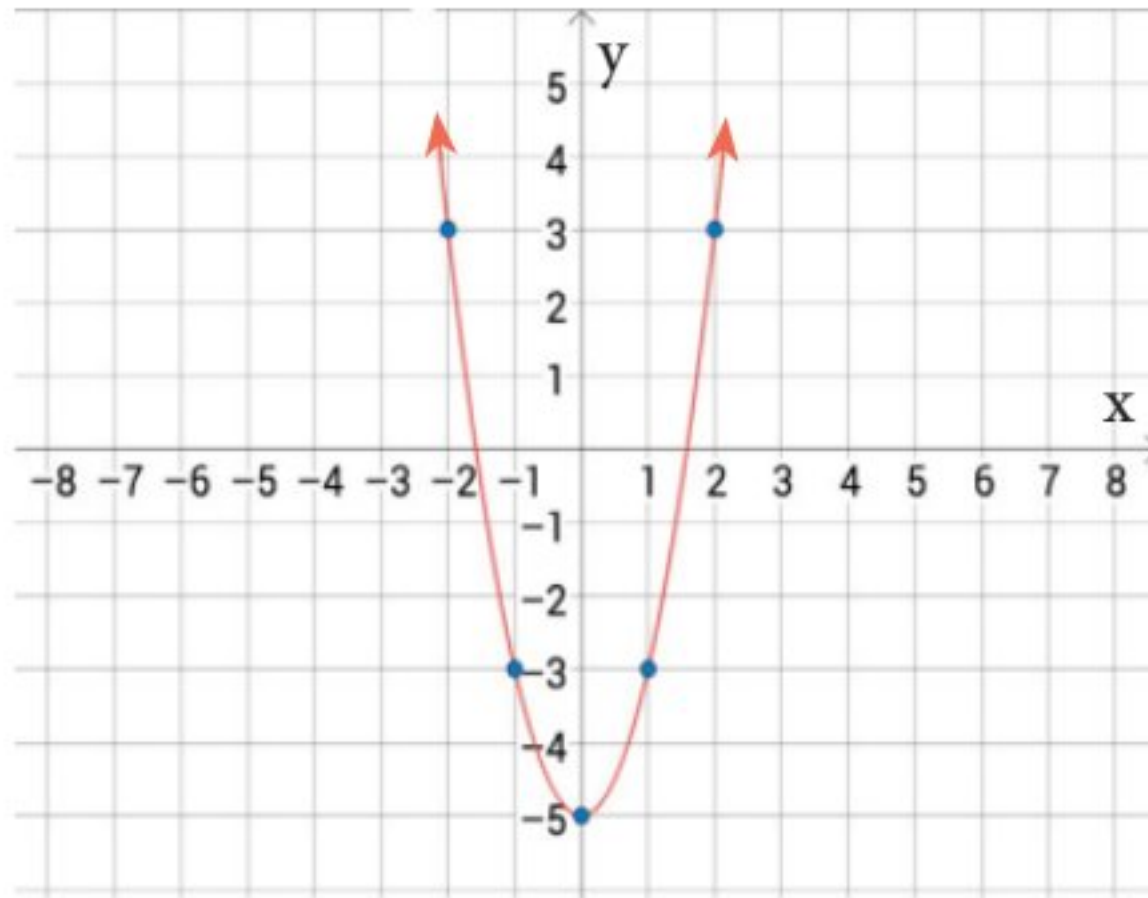
3 اذا كان معامل x^2 موجب فيكون الرسم على شكل $\cup$ و اذا كان المعامل سالب فيكون الرسم على شكل $\cap$

مثال (3) مثل المعادلة $y = -x^2$



x	$y = -x^2$	y	(x,y)
-2	$-(-2)^2$	-4	(-2,-4)
-1	$-(-1)^2$	-1	(-1,-1)
0	$-(0)^2$	0	(0,0)
1	$-(1)^2$	-1	(1,-1)
2	$-(2)^2$	-4	(2,-4)

مثال (3) مثل المعادلة $y = 2x^2 - 5$



x	$y = 2x^2 - 5$	y	(x, y)
-2	$2(-2)^2 - 5$	3	(-2, 3)
-1	$2(-1)^2 - 5$	-3	(-1, -3)
0	$2(0)^2 - 5$	-5	(0, -5)
1	$2(1)^2 - 5$	-3	(1, -3)
2	$2(2)^2 - 5$	3	(2, 3)

تأكد من فهمك

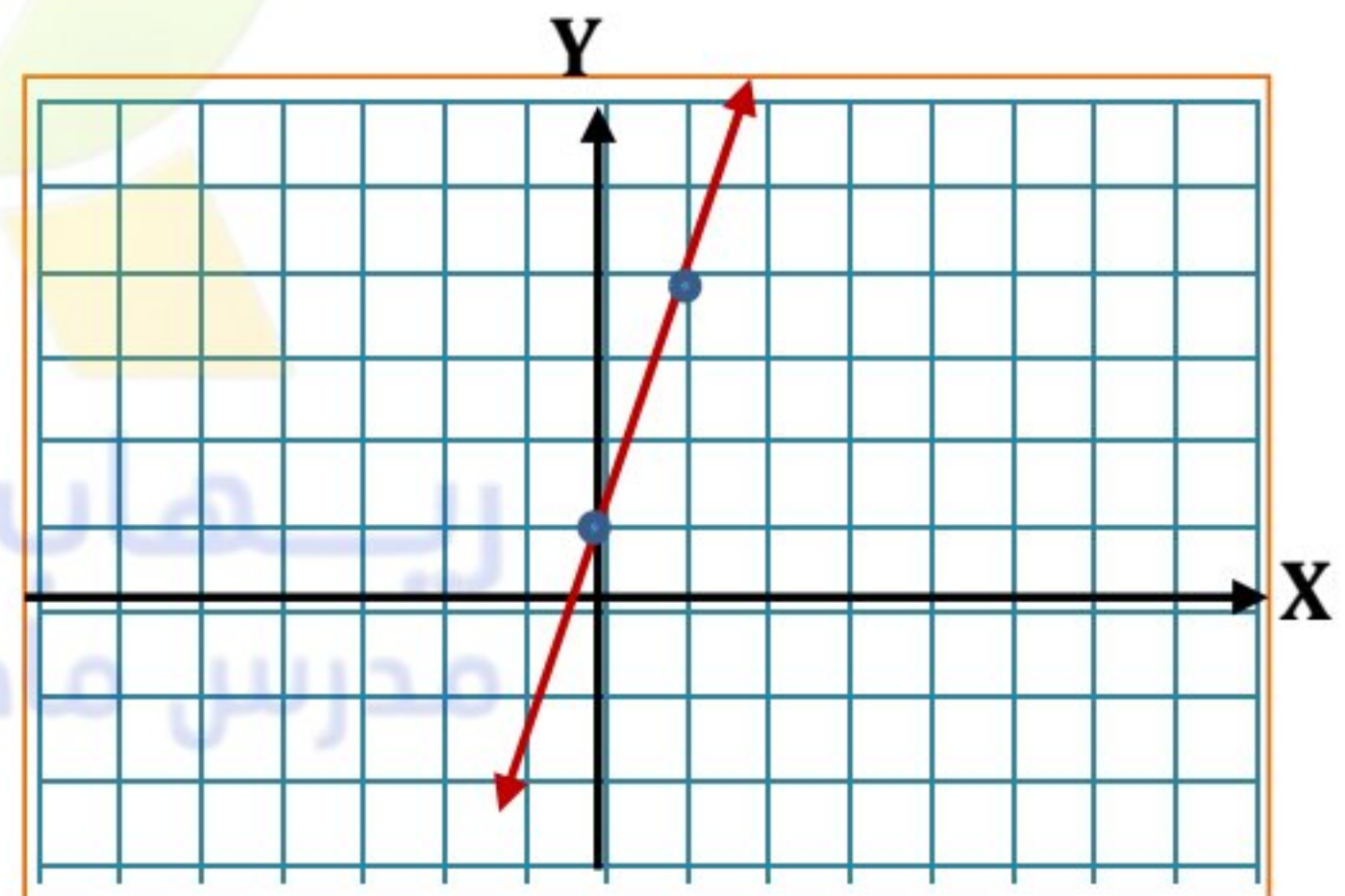
مثل المعادلات الخطية التالية في المستوي الإحداثي وبين علاقتها بالمحورين:

1 $y = 3x + 1$

الحل

x	$y = 3x + 1$	(x, y)
0	$3(0) + 1 = 1$	(0, 1)
1	$3(1) + 1 = 4$	(1, 4)

المستقيم يقطع المحورين ولا يمر بنقطة الأصل

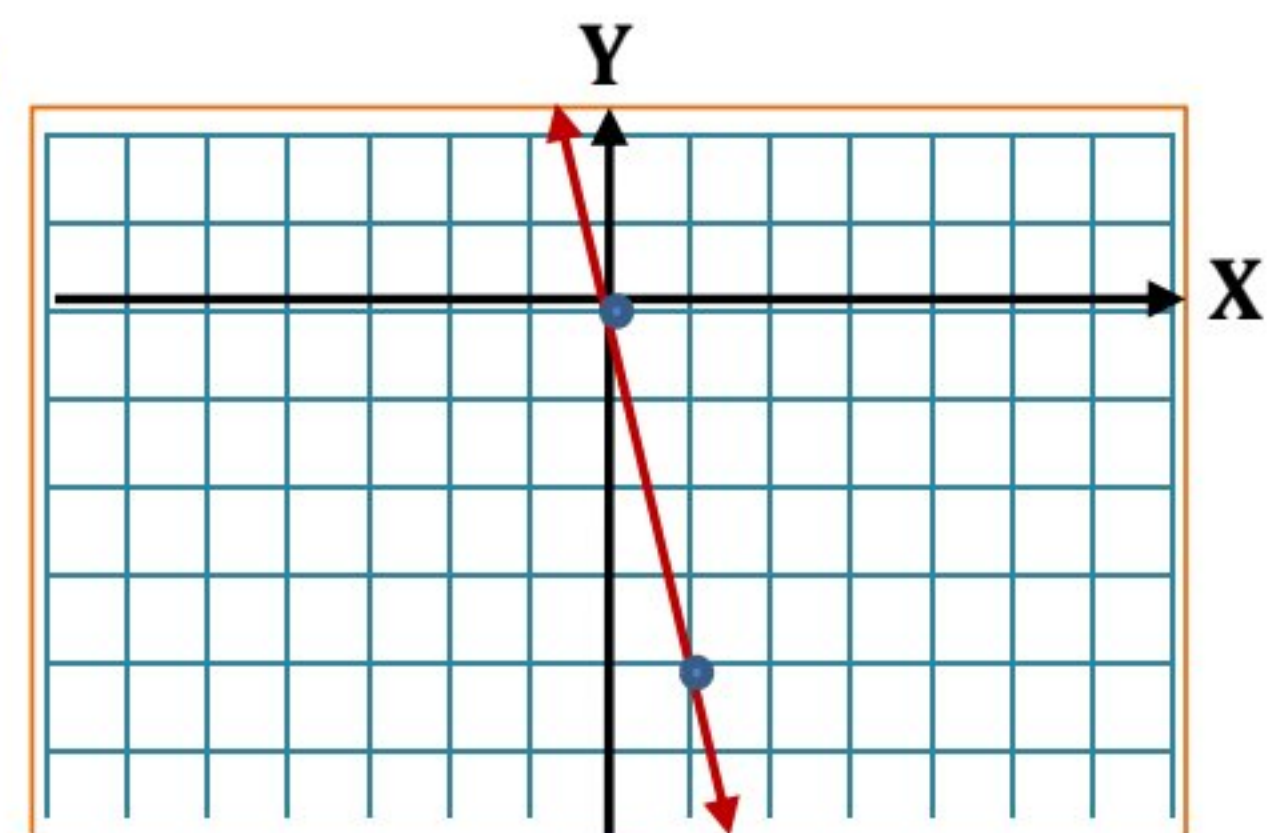


2 $y = -4x$

الحل

x	$y = -4x$	(x, y)
0	$-4(0) = 0$	(0, 0)
1	$-4(1) = -4$	(1, -4)

المستقيم يقطع المحورين في نقطة الأصل



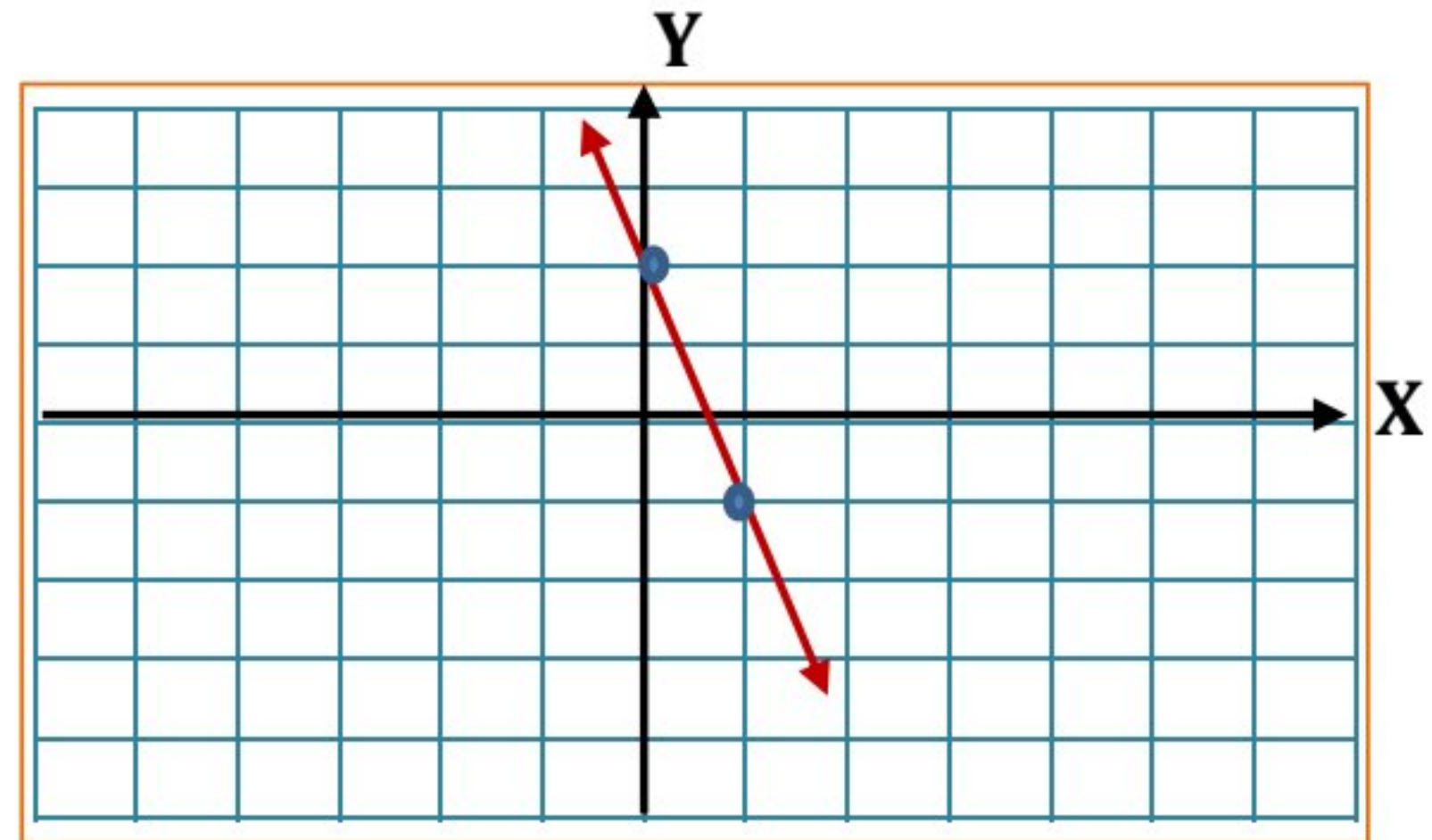
3 $y + 3x - 2 = 0$

الحل

$y = 2 - 3x$

x	$y = 2 - 3x$	(x, y)
0	$2 - 3(0) = 2 - 0 = 2$	(0, 2)
1	$2 - 3(1) = 2 - 3 = -1$	(1, -1)

المستقيم يقطع المحورين ولا يمر بنقطة الأصل

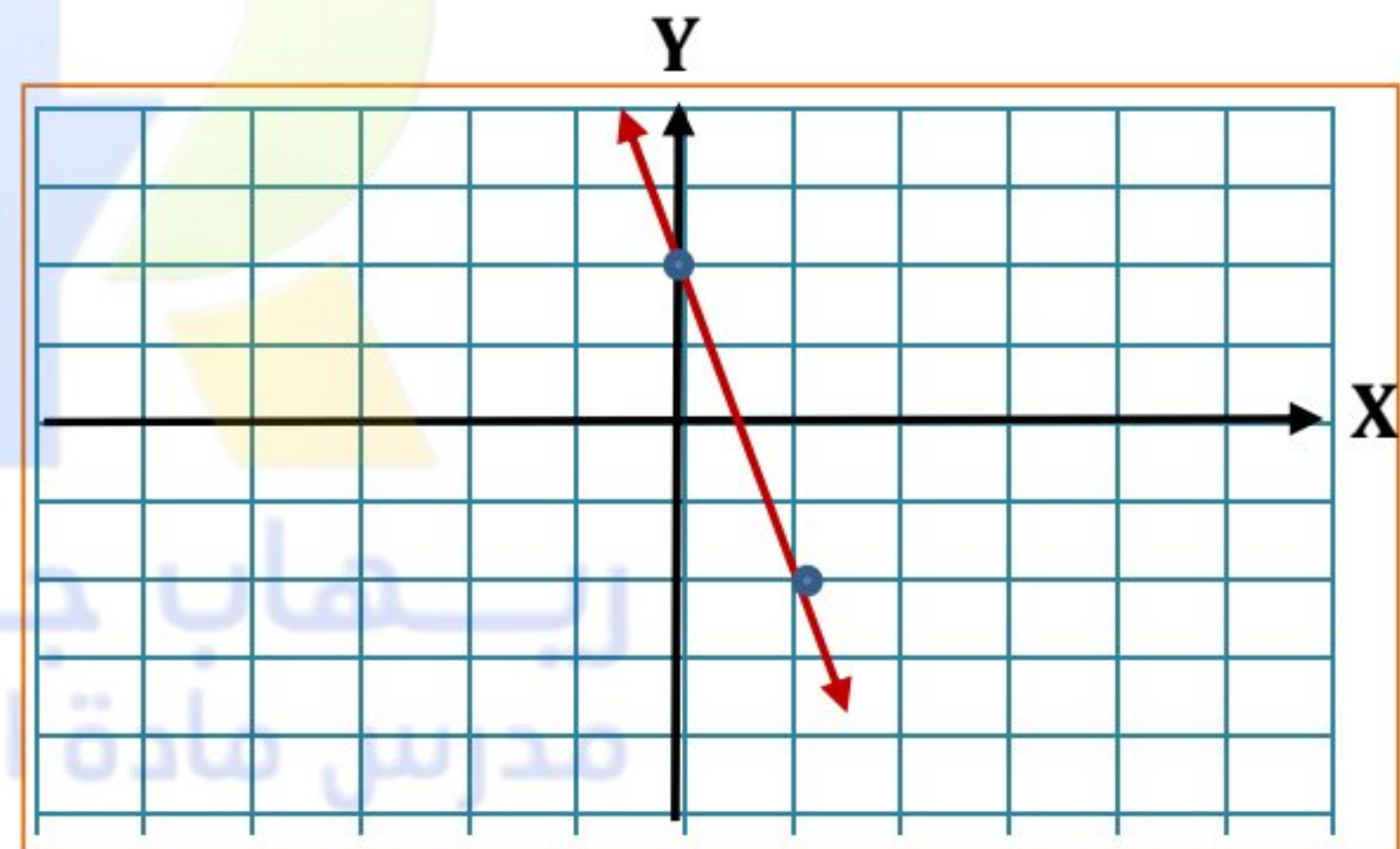


4 $y = 1 - 3x$

الحل

x	$y = 1 - 3x$	(x, y)
0	$1 - 3(0) = 1 - 0 = 1$	(0, 1)
1	$1 - 3(1) = 1 - 3 = -2$	(1, -2)

المستقيم يقطع المحورين ولا يمر بنقطة الأصل



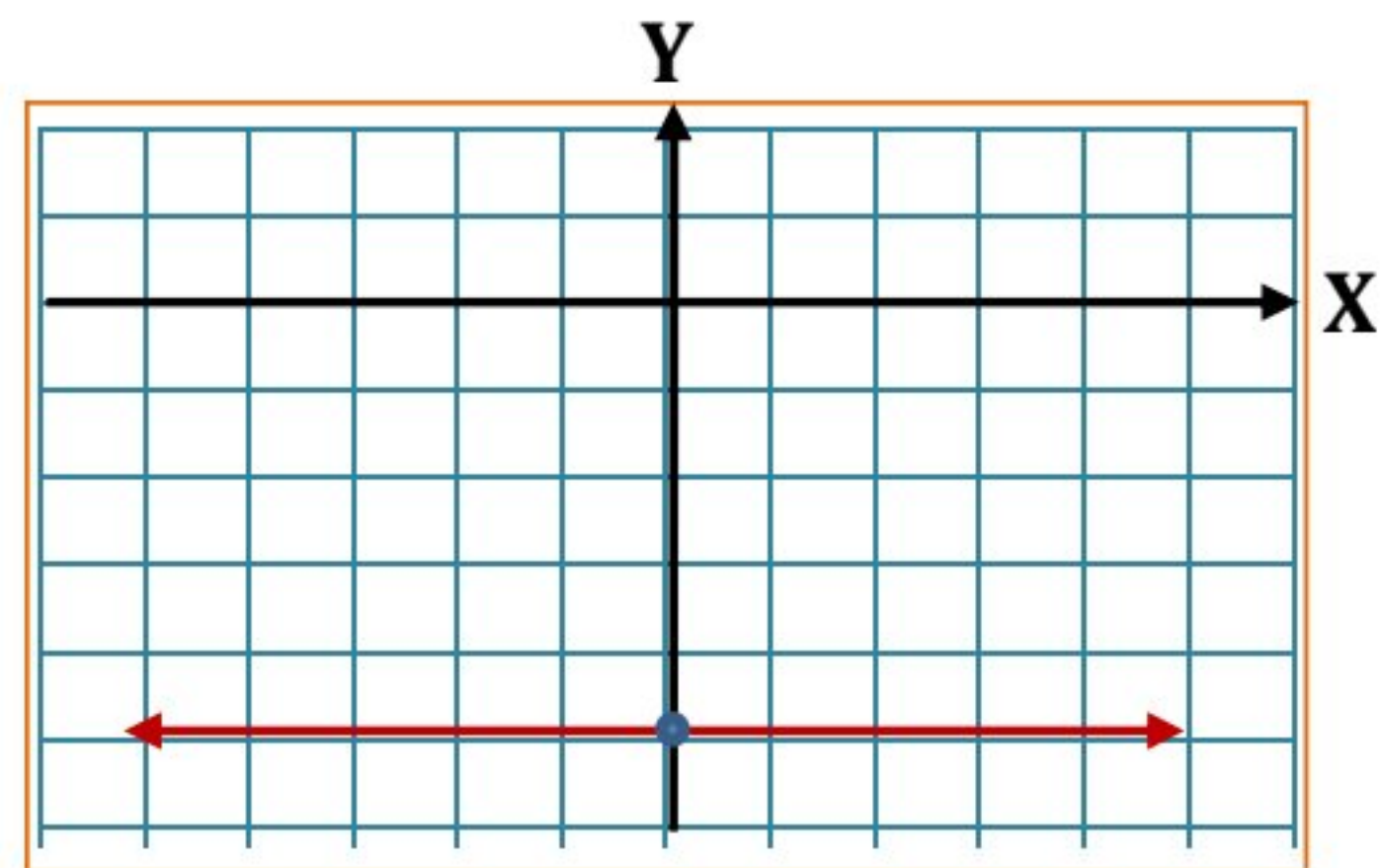
5 $y + 5 = 0$

الحل

$y = -5$

المستقيم يوازي محور السينات ويمر بالنقطة

(0, -5)



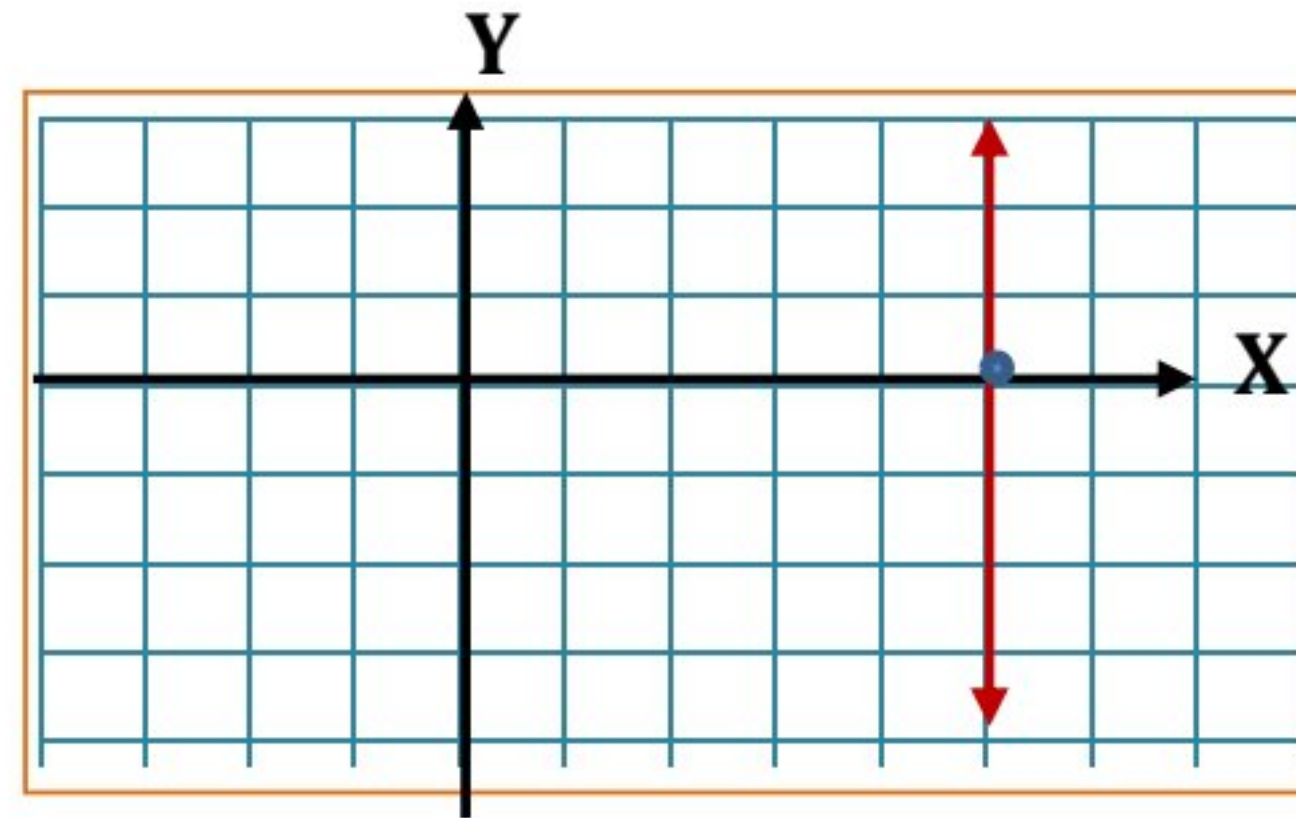
6 $x - 5 = 0$

$x = 5$

المستقيم يوازي محور الصادات

ويمر بالنقطة (5, 0)

الحل

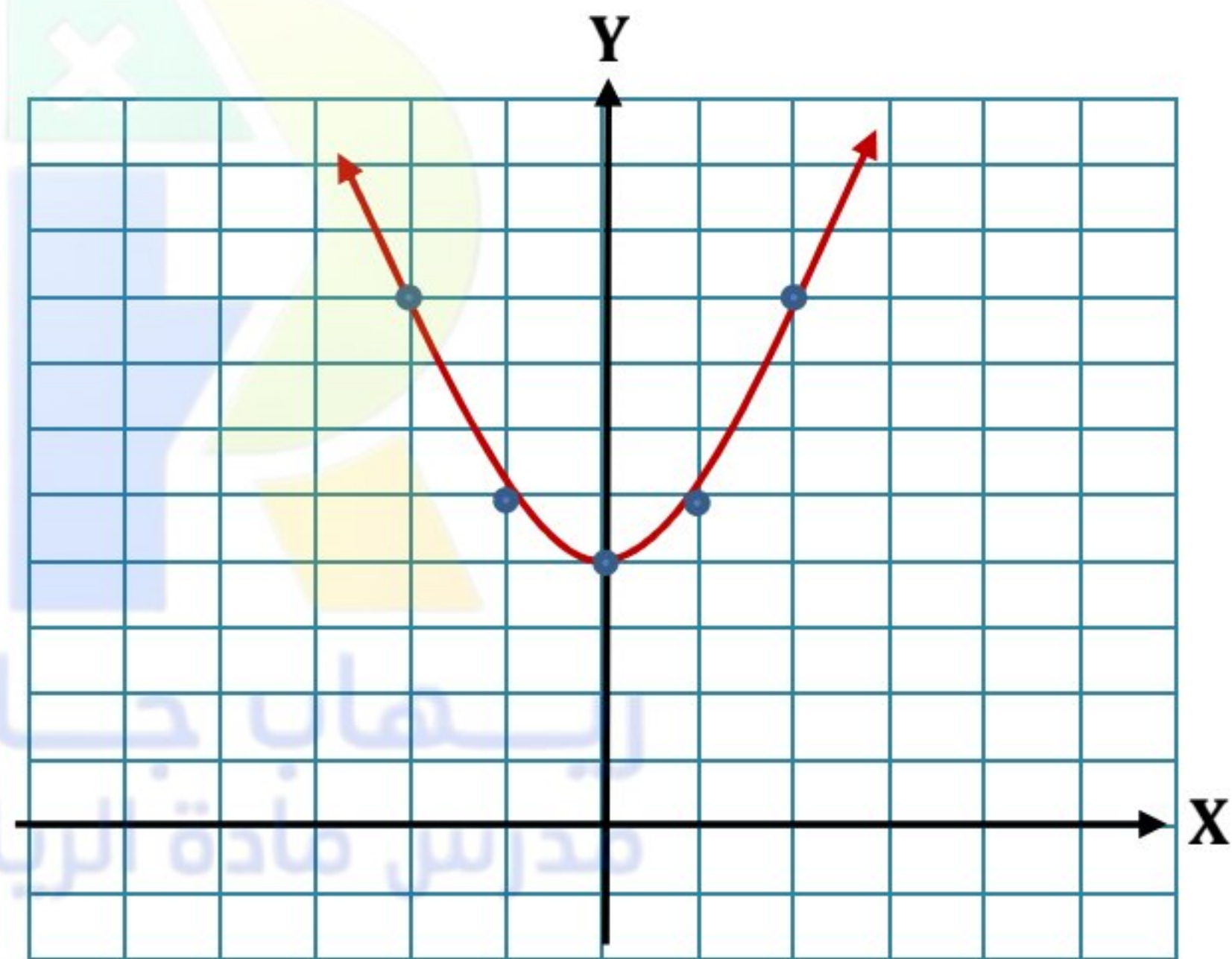


مثل المعادلات التربيعية التالية في المستوي الإحداثي .

7 $y = x^2 + 4$

الحل

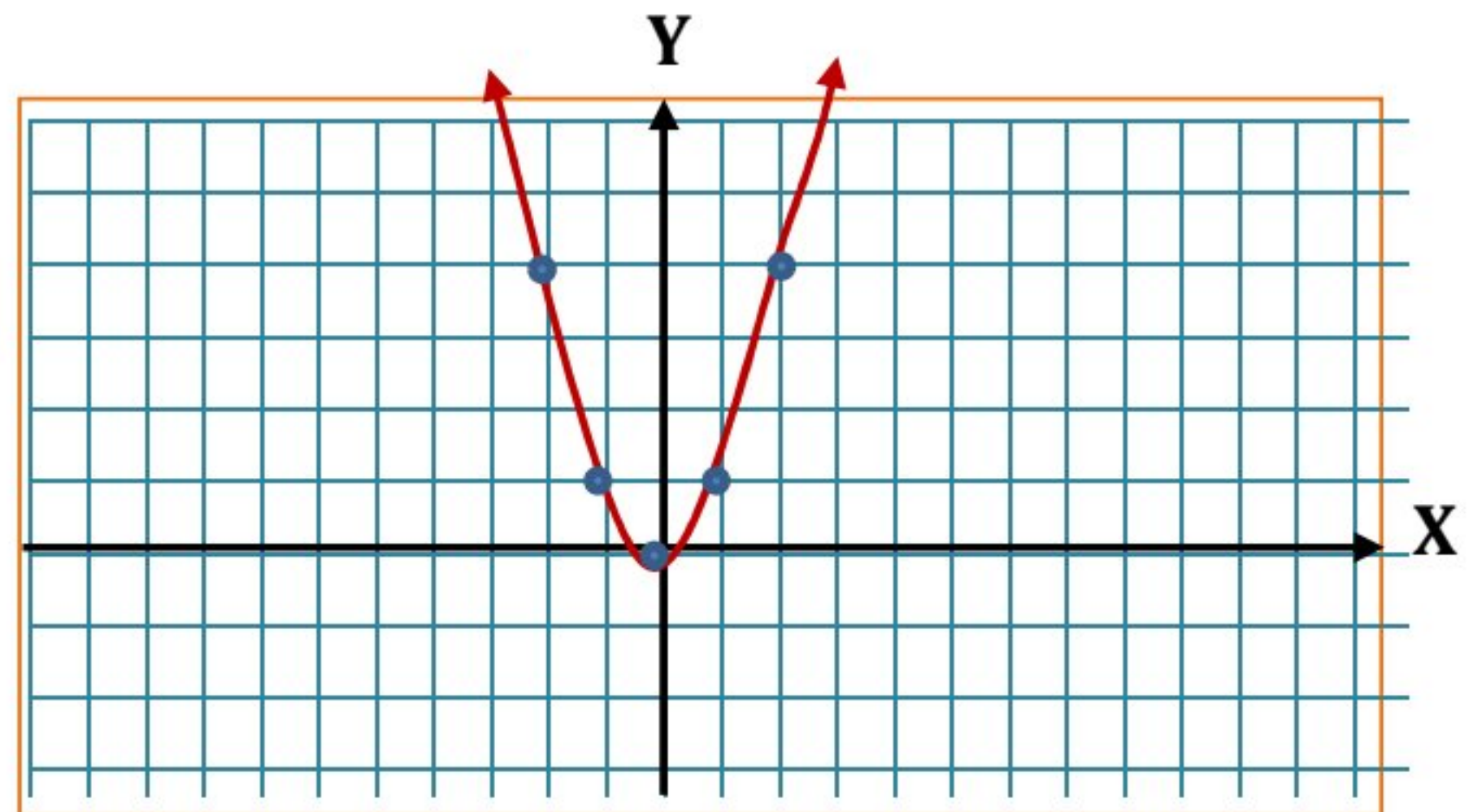
x	$y = x^2 + 4$	y	(x, y)
1	$(1)^2 + 4$	5	(1, 5)
2	$(2)^2 + 4$	8	(2, 8)
0	$(0)^2 + 4$	4	(0, 4)
-1	$(-1)^2 + 4$	5	(-1, 5)
-2	$(-2)^2 + 4$	8	(-2, 8)



8 $y = x^2$

الحل

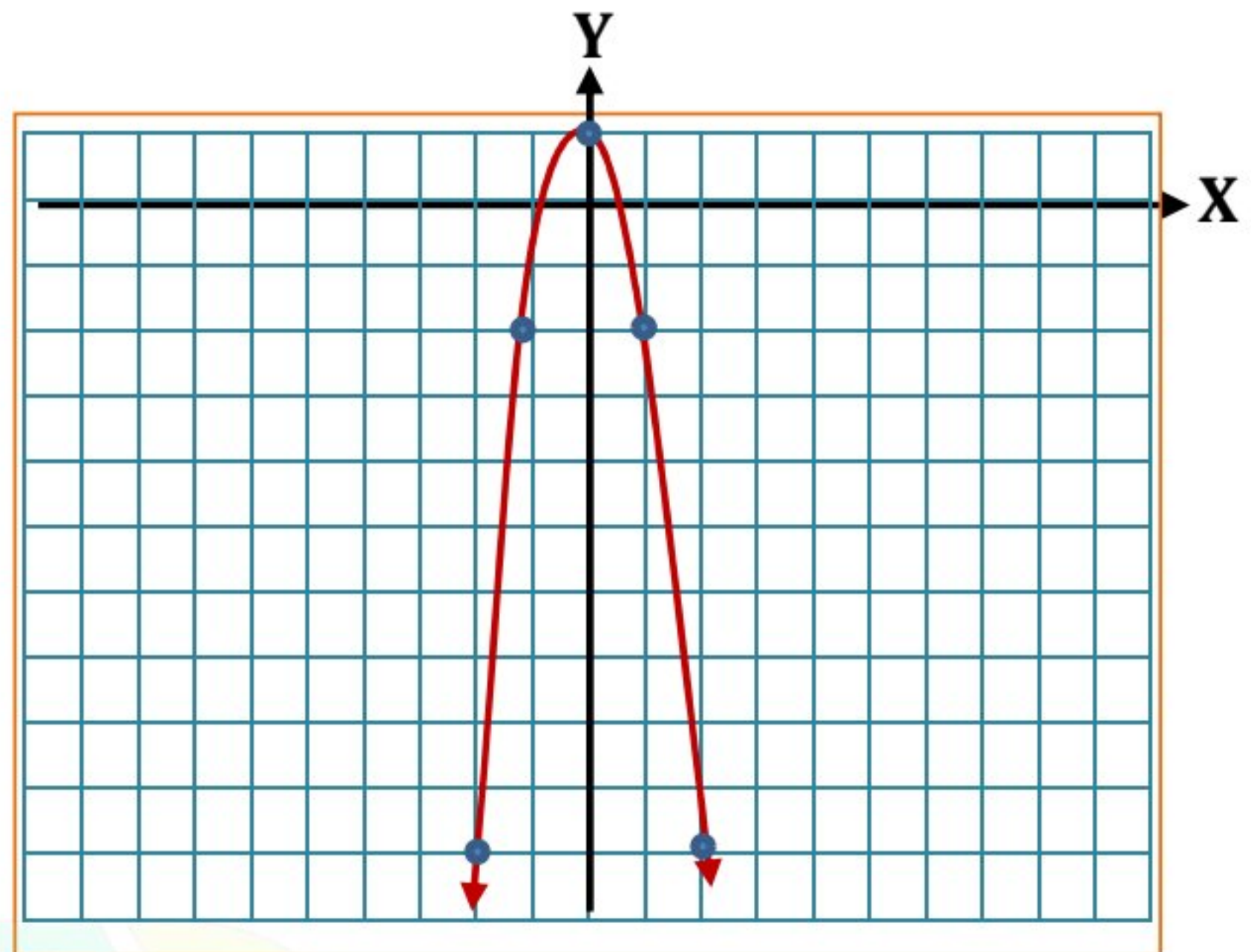
x	$y = x^2$	y	(x, y)
1	$(1)^2$	1	(1, 1)
2	$(2)^2$	4	(2, 4)
0	$(0)^2$	0	(0, 0)
-1	$(-1)^2$	1	(-1, 1)
-2	$(-2)^2$	4	(-2, 4)



9 $y = 1 - 3x^2$

الحل

x	$y = 1 - 3x^2$	y	(x, y)
1	$1 - 3(1)^2$	-2	(1, -2)
2	$1 - 3(2)^2$	-11	(2, -11)
0	$1 - 3(0)^2$	1	(0, 1)
-1	$1 - 3(-1)^2$	-2	(-1, -2)
-2	$1 - 3(-2)^2$	-11	(-2, -11)



تدرب وحل التمرينات

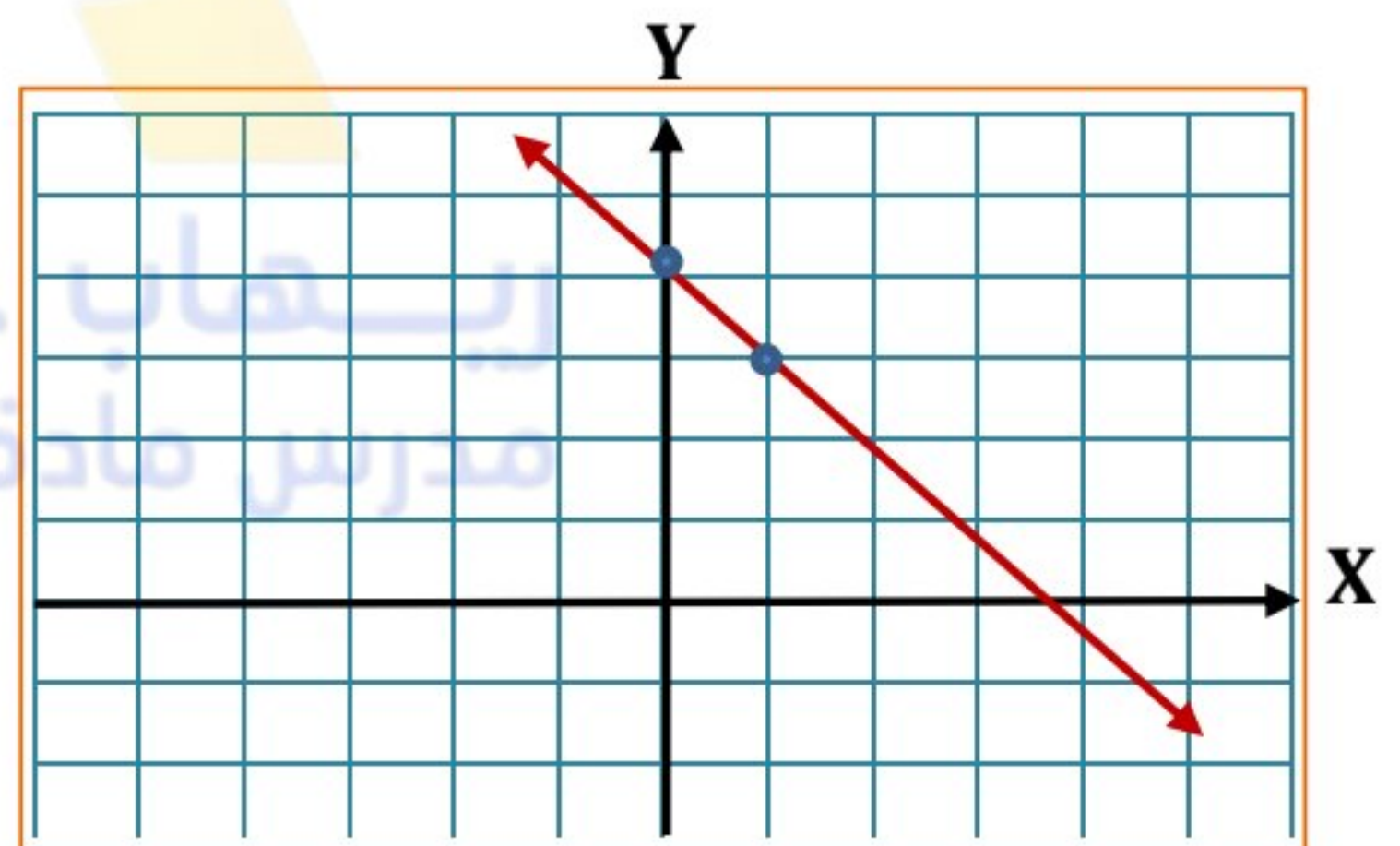
مثل المعادلات الخطية التالية في المستوي الإلهائي وبين علاقتها بالمحورين:

10 $y = -x + 4$

الحل

x	$y = -x + 4$	(x, y)
0	$0 + 4 = 4$	(0, 4)
1	$-1 + 4 = 3$	(1, 3)

المستقيم يقطع المحورين ولا يمر بنقطة الأصل

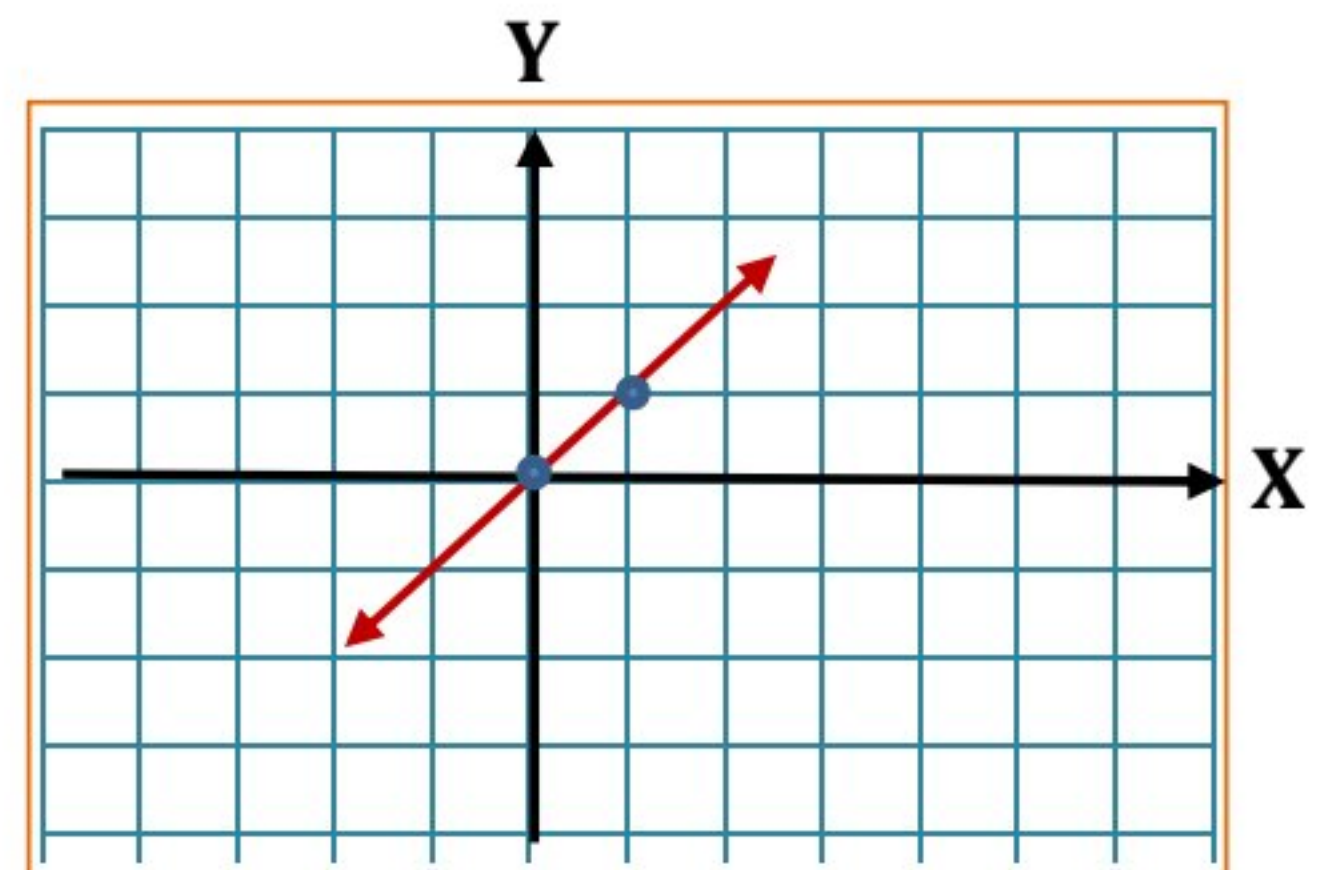


11 $y = x$

الحل

x	$y = x$	(x, y)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)

المستقيم يقطع المحورين في نقطة الأصل

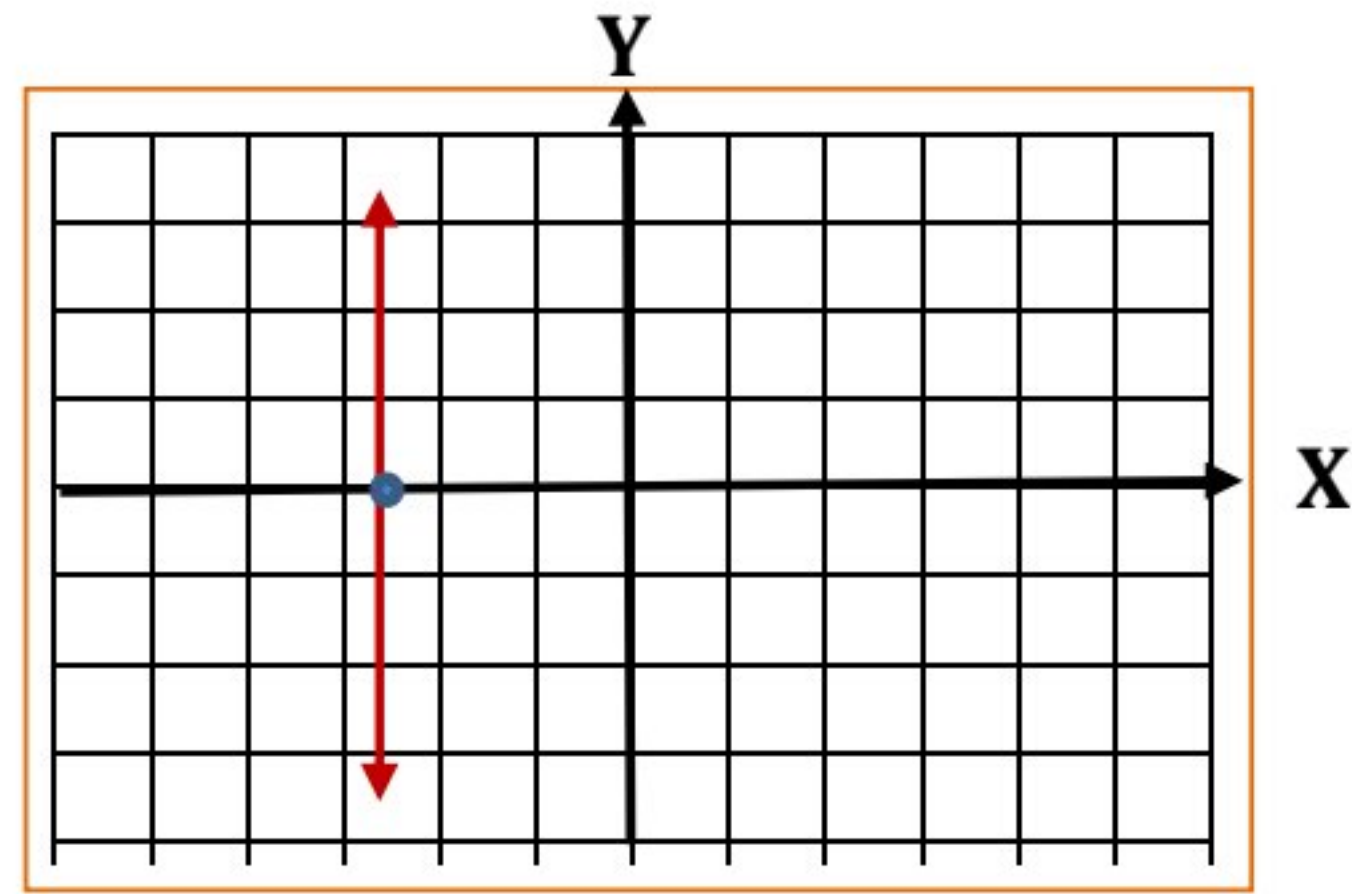


12 $x = -\frac{5}{2}$

الحل

المستقيم يوازي محور الصادات ويمر بالنقطة

$(-\frac{5}{2}, 0)$

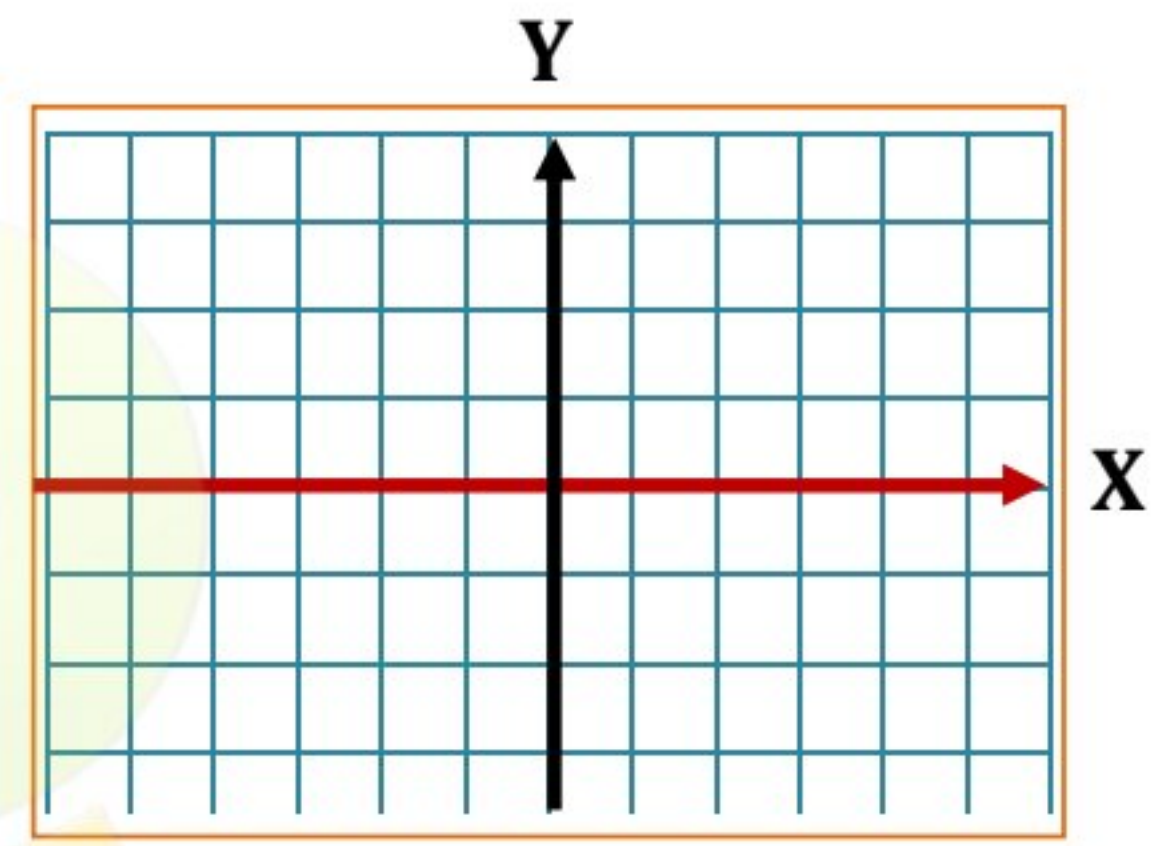


13 $y = 0$

الحل

المستقيم يمثل محور السينات وعمودي على محور الصادات

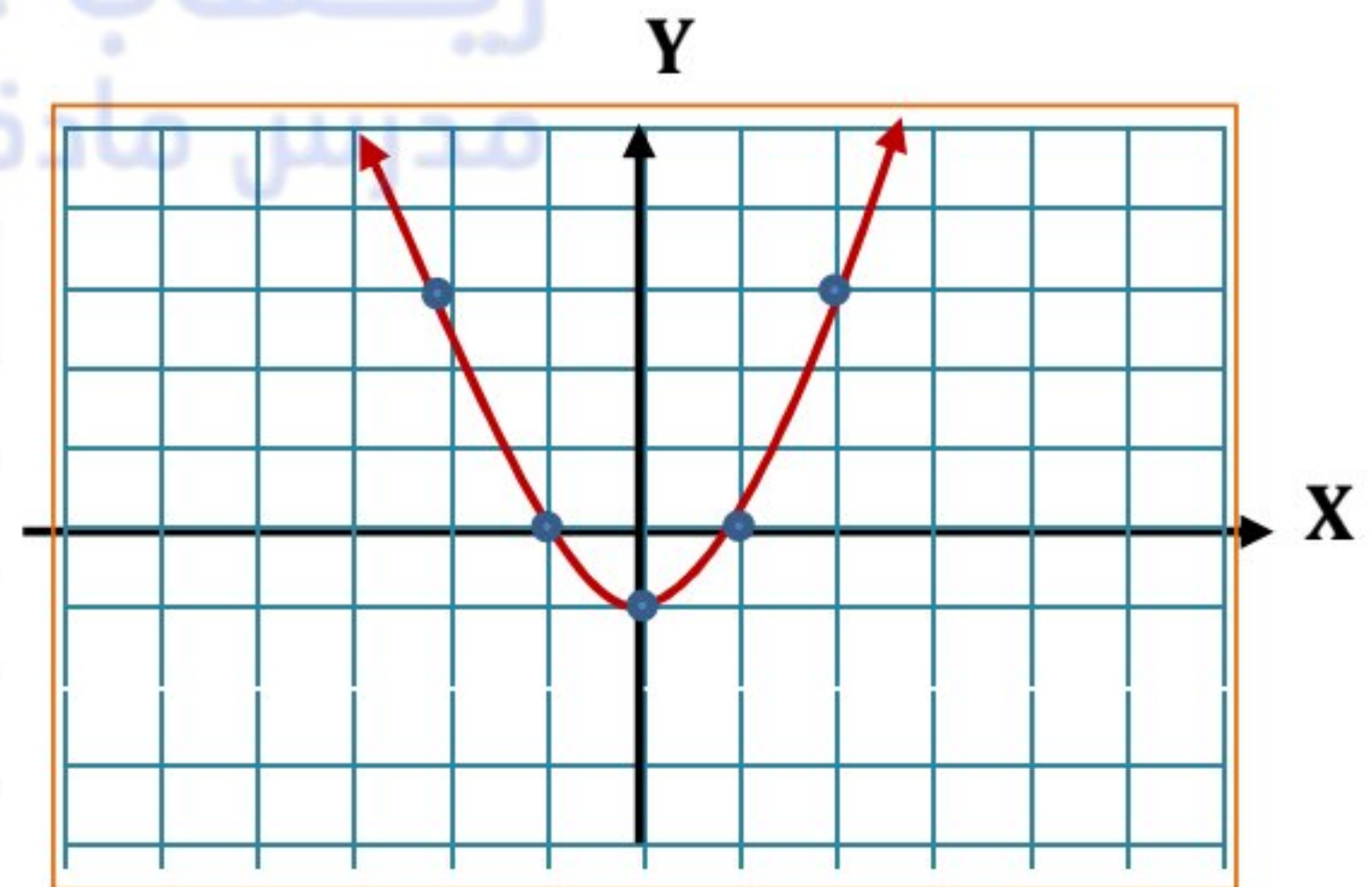
ويمر بالنقطة $(0, 0)$



14 $y = x^2 - 1$

الحل

x	$y = x^2 - 1$	y	(x, y)
1	$(1)^2 - 1$	0	(1, 0)
2	$(2)^2 - 1$	3	(2, 3)
0	$(0)^2 - 1$	-1	(0, -1)
-1	$(-1)^2 - 1$	0	(-1, 0)
-2	$(-2)^2 - 1$	3	(-2, 3)

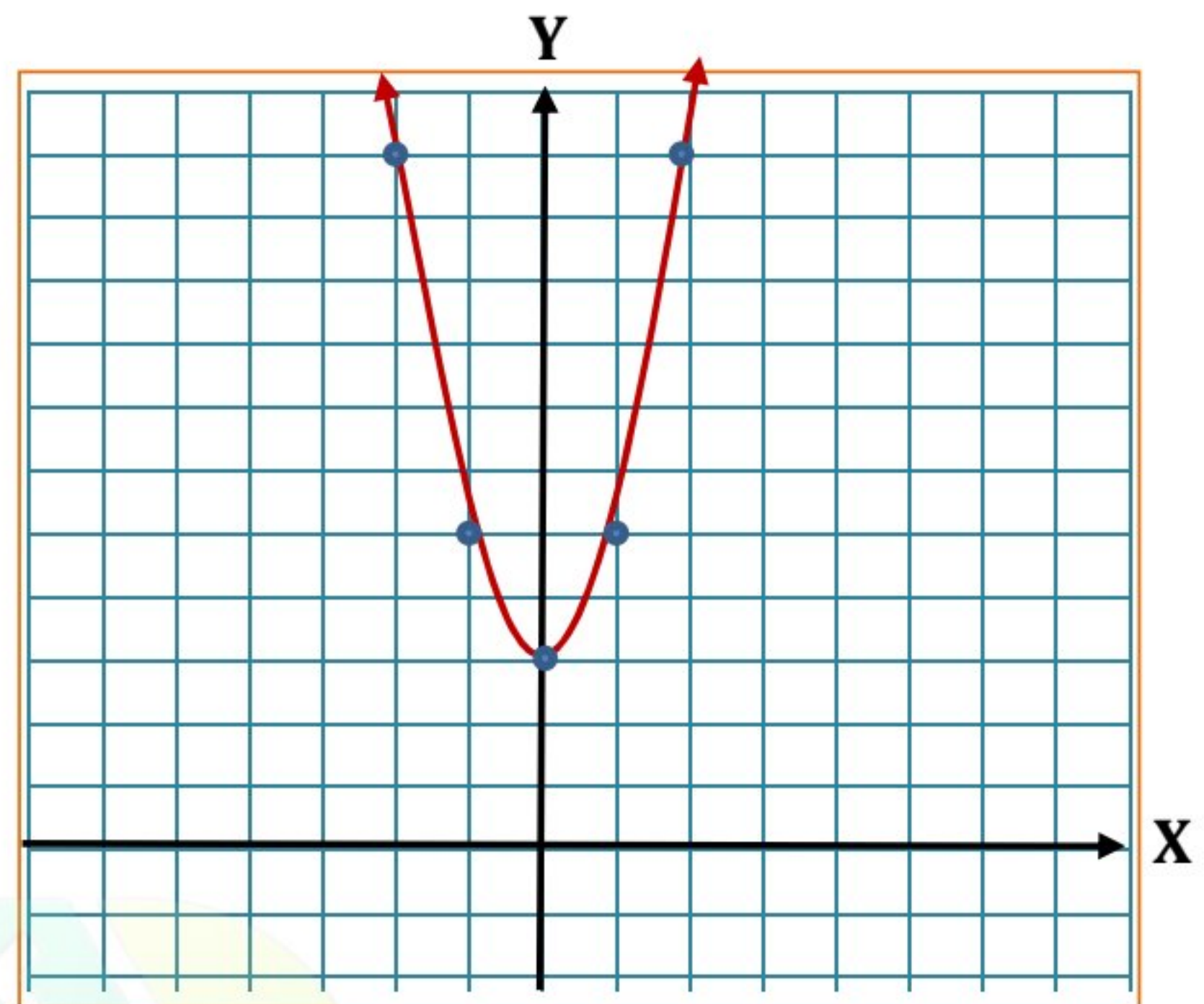


مثل المعادلات التربيعية التالية في المستوي الإحداثي .

15 $y = 2x^2 + 3$

الحل

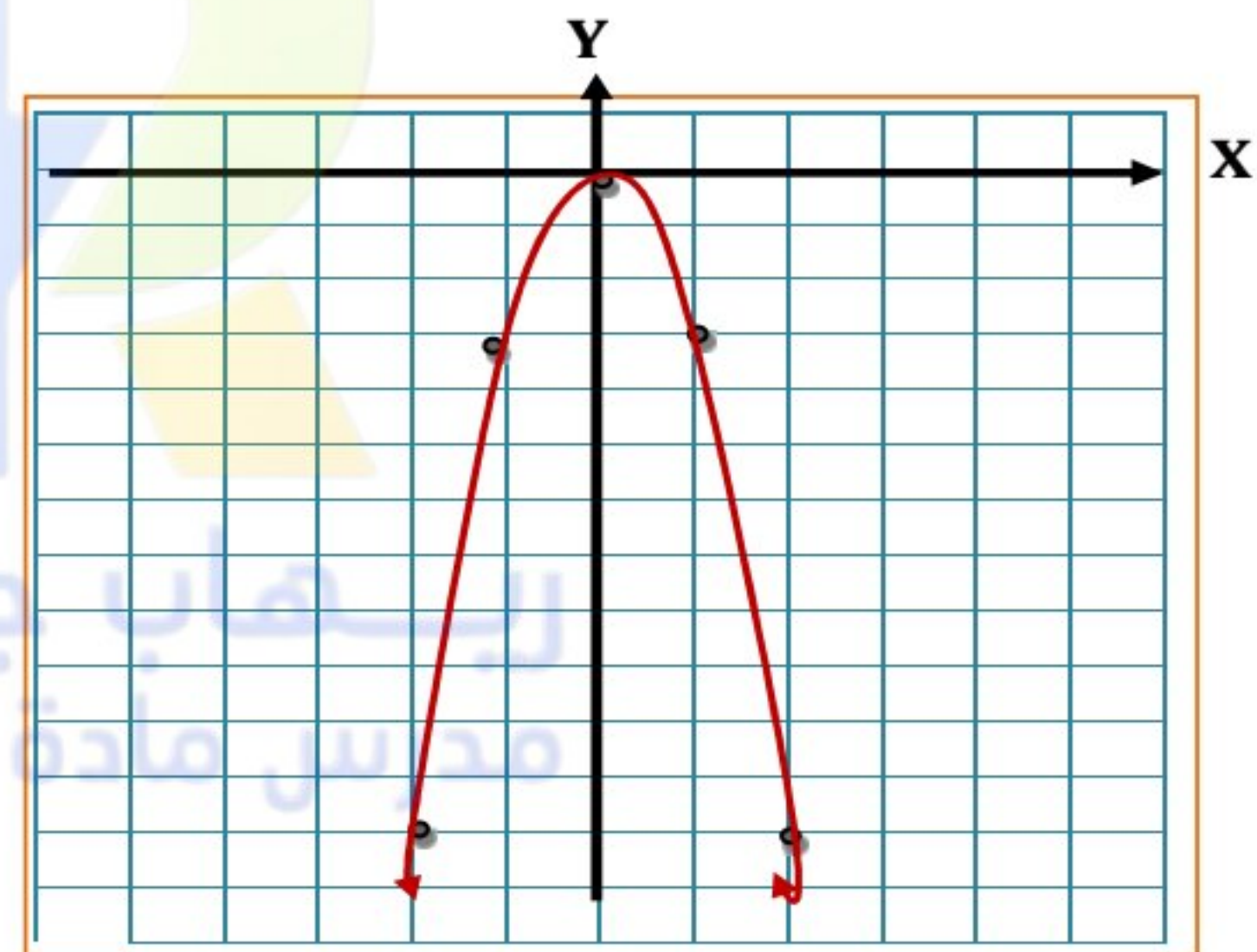
x	$y = 2x^2 + 3$	y	(x, y)
1	$2(1)^2 + 3$	5	(1, 5)
2	$2(2)^2 + 3$	11	(2, 11)
0	$2(0)^2 + 3$	3	(0, 3)
-1	$2(-1)^2 + 3$	5	(-1, 5)
-2	$2(-2)^2 + 3$	11	(-2, 11)



16 $y = -3x^2$

الحل

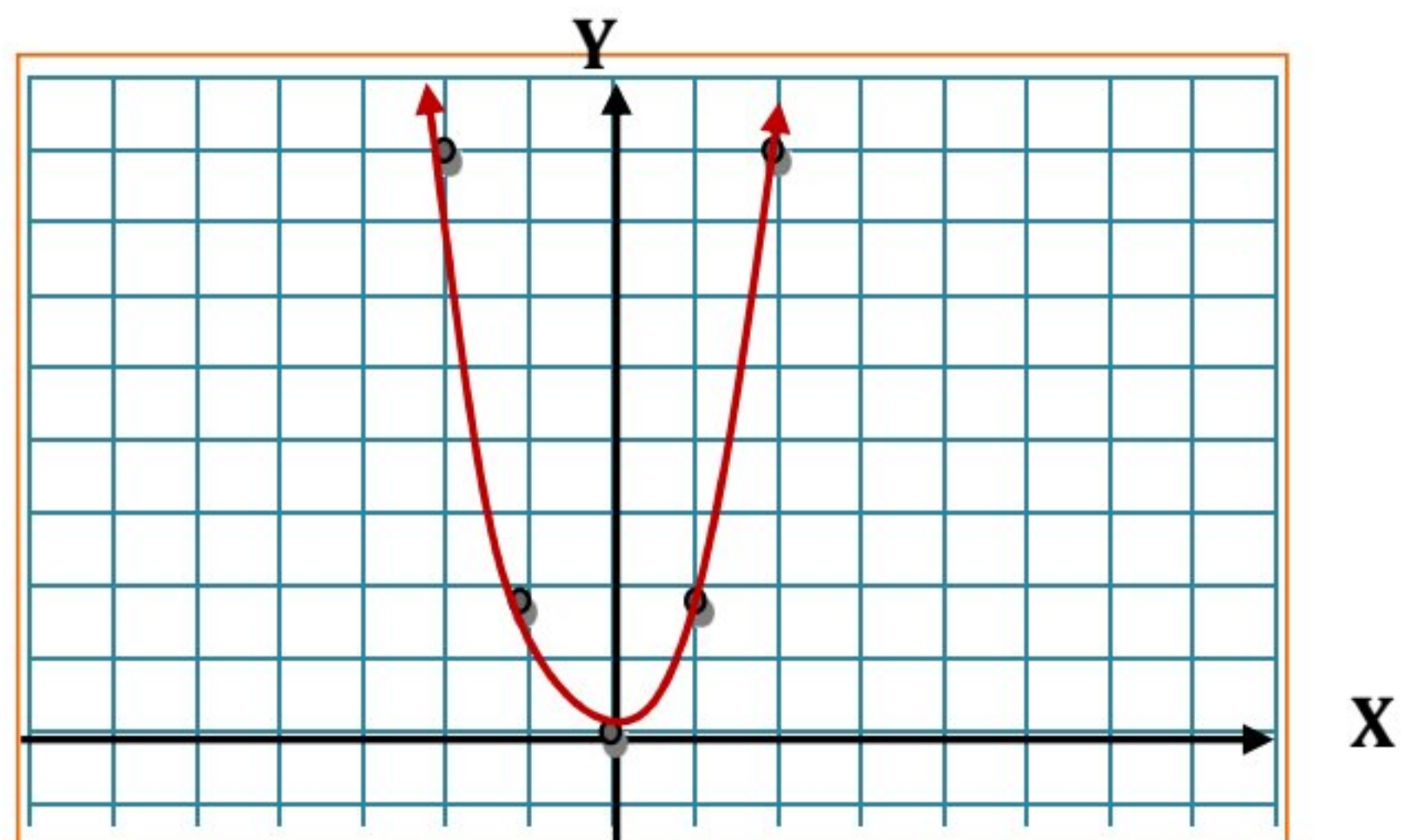
x	$y = -3x^2$	y	(x, y)
1	$-3(1)^2$	-3	(1, -3)
2	$-3(2)^2$	-12	(2, -12)
0	$-3(0)^2$	0	(0, 0)
-1	$-3(-1)^2$	-3	(-1, -3)
-2	$-3(-2)^2$	-12	(-2, -12)



17 $y = 2x^2$

الحل

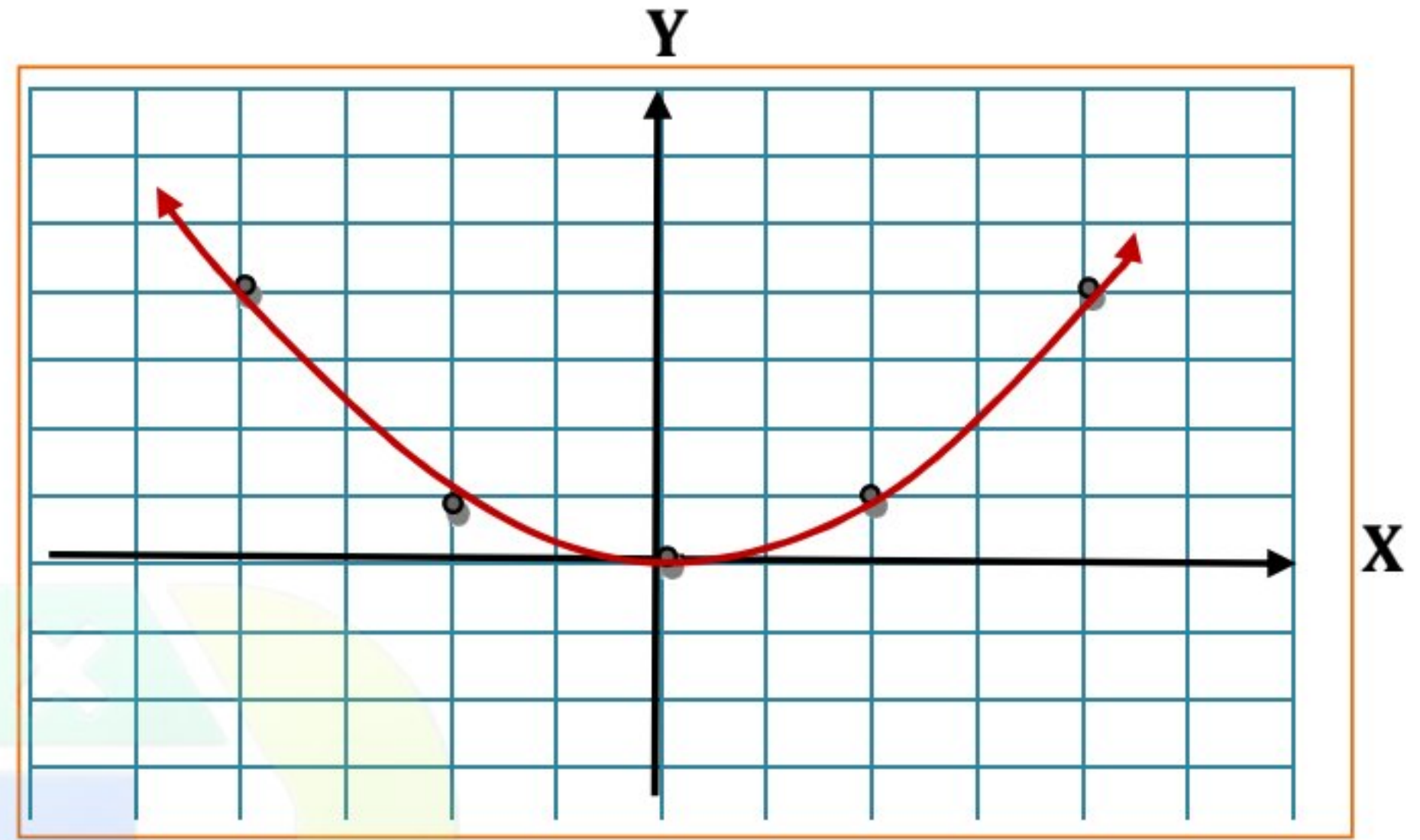
x	$y = 2x^2$	y	(x, y)
1	$2(1)^2$	2	(1, 2)
2	$2(2)^2$	8	(2, 8)
0	$2(0)^2$	0	(0, 0)
-1	$2(-1)^2$	2	(-1, 2)
-2	$2(-2)^2$	8	(-2, 8)



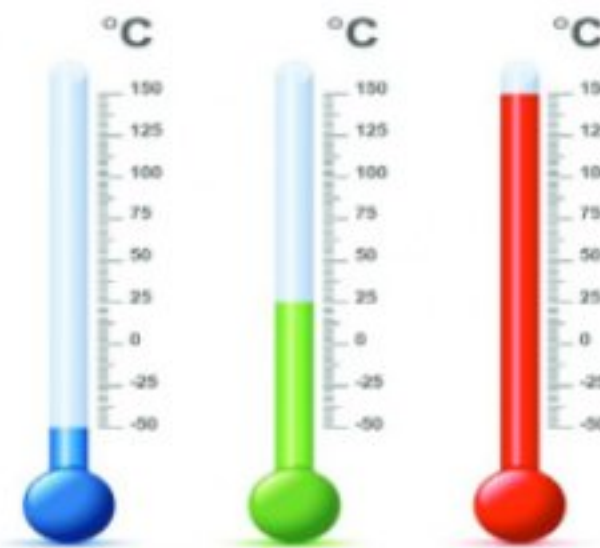
18 $\frac{4y}{4} = \frac{x^2}{4} \Rightarrow y = \frac{x^2}{4}$

الحل

x	$y = \frac{x^2}{4}$	y	(x, y)
2	$\frac{(2)^2}{4}$	1	(2, 1)
4	$\frac{(4)^2}{4}$	4	(4, 4)
0	$\frac{(0)^2}{4}$	0	(0, 0)
-2	$\frac{(-2)^2}{4}$	1	(-2, 1)
-4	$\frac{(-4)^2}{4}$	8	(-4, 4)



تدرب وحل مسائل حياتية

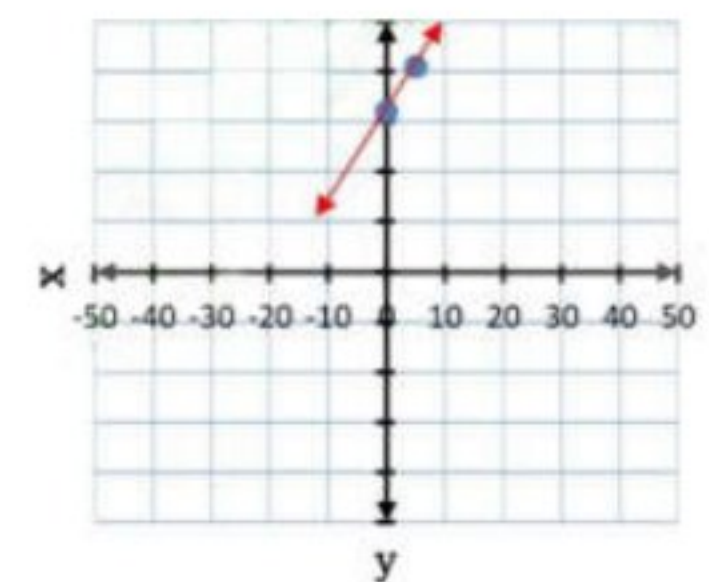


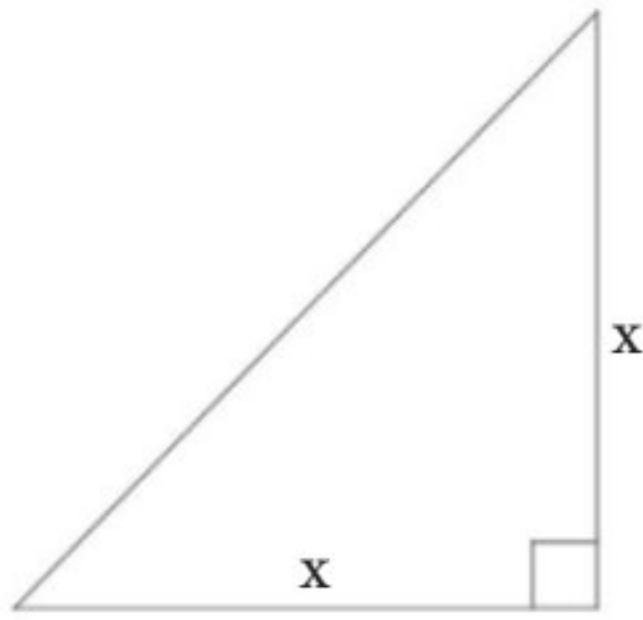
19 درجات حرارة : المعادلة $F^\circ = \frac{9}{5}C^\circ + 32$ تبين العلاقة بين درجات الحرارة السيليزية ودرجات الحرارة الفهرنهايتية لها، مثل المعادلة بيانياً.

الحل

نفترض ان $C^\circ = x$ و $F^\circ = y$ فيكون الزوج المرتب (C°, F°)
نأخذ قيم C° الافتراضية من خلال الرسم

C°	$F^\circ = \frac{9}{5}C^\circ + 32$	F°	(C°, F°)
0	$F^\circ = \frac{9}{5}(0) + 32 = 32$	32	(0, 32)
5	$F^\circ = \frac{9}{5}(5) + 32 = 9(1) + 32 = 41$	31	(5, 41)





هندسة: مثلث قائم الزاوية متساوي الساقين، طول ضلعه القائم x وحدة

(i) اكتب العلاقة $f(x)$ بدلالة x .

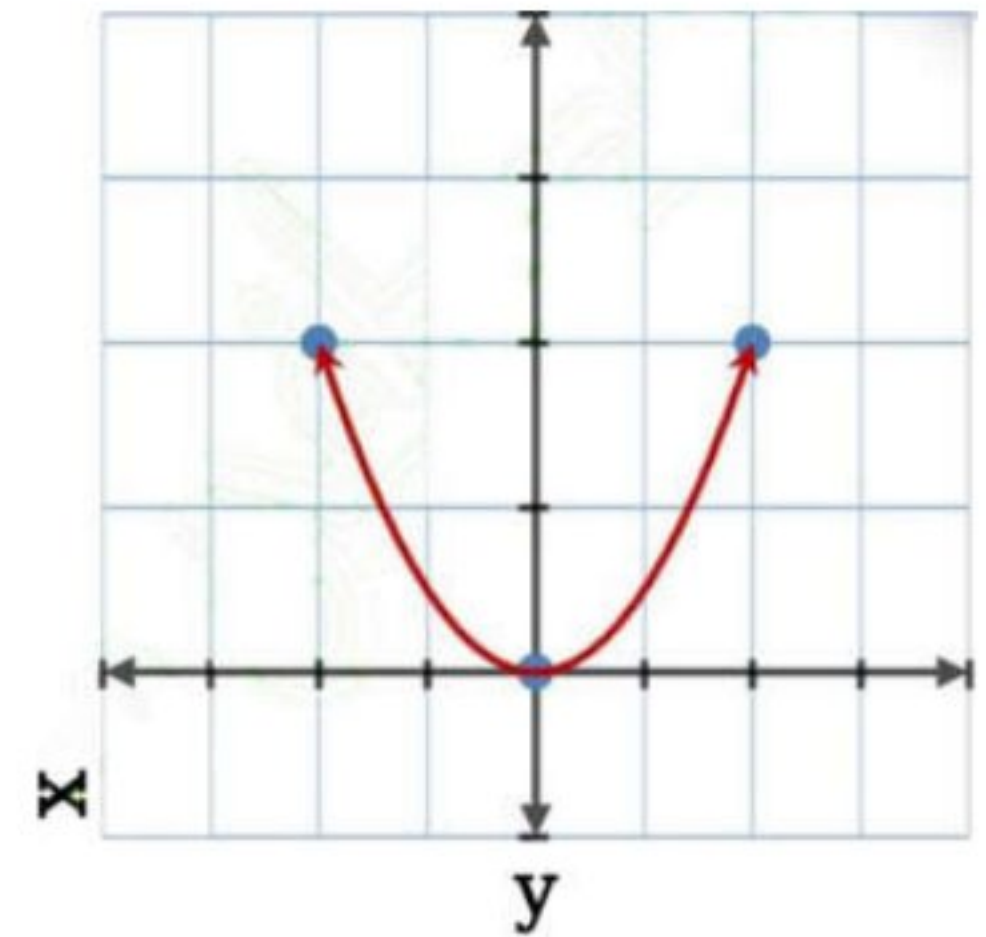
(ii) مثل العلاقة $f(x)$ في المستوي الإحداثي.

الحل

(الارتفاع) $\times$ (القاعدة) $\div 2$ = مساحة المثلث \ لأنه الدالة تمثل المساحة وهذه قانون مساحة مثلث القائم الزاوية

ثم نكون جدول الدالة التربيعية $f(x) = \frac{1}{2}(x)(x) = \frac{1}{2}x^2$

x	$y = f(x) = \frac{1}{2}x^2$	y	(x, y)
-2	$y = \frac{1}{2}(-2)^2 = \frac{1}{2}(4) \Rightarrow y = 2$	2	(-2, 2)
0	$y = \frac{1}{2}(0)^2 = \frac{1}{2}(0) \Rightarrow y = 0$	0	(0, 0)
2	$y = \frac{1}{2}(2)^2 = \frac{1}{2}(4) \Rightarrow y = 2$	2	(2, 2)



فيزياء: يمثل القانون $F = 9.8m$ القوة الناجمة على تأثير جاذبية الأرض

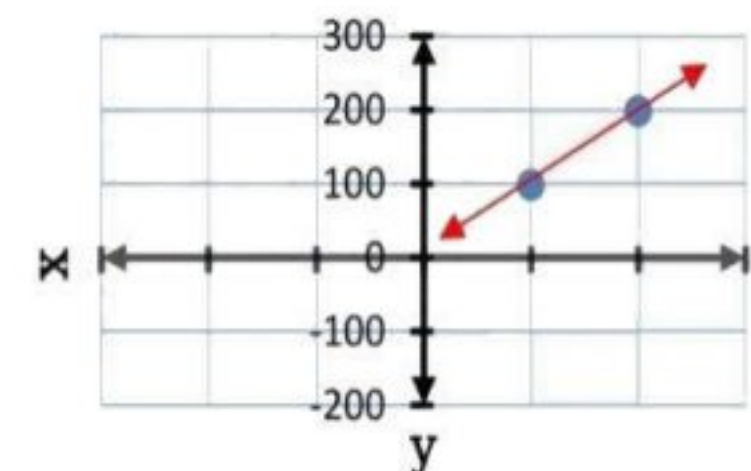
على جسم، حيث F القوة بالنيوتن، m كتلة الجسم بالكيلوغرام، مثل القانون بالمستوي الإحداثي.

الحل

تمثل معادلة خطية نختار قيم للـ m التي تمثل كتلة الجسم وتكون موجبة ولا تساوي صفر $F = 9.8m$ (لأنه لا توجد كتلة لجسم سالبة أو صفر)

نختار قيم $m = 10, 20$ أو أي قيم انت تختارها \ نفرض أن $m = x$ و $F = y$

m	$f = 9.8m$	f	(m, f)
10	$f = 98$	98	(10, 98)
20	$f = 196$	196	(20, 196)



22



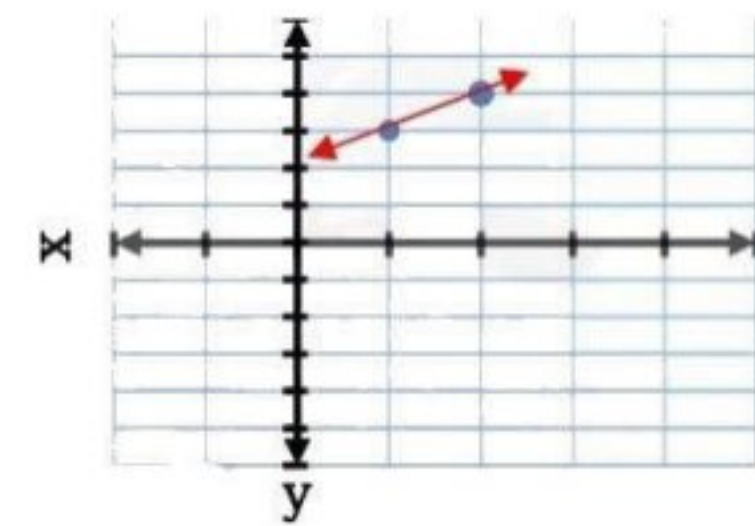
أعمال : تتقاضى شركة معدات بناء 10 آلاف دينار كتأمين، يضاف إليها 5 آلاف دينار عن كل ساعة، اكتب المعادلة التي تعبر عن المسألة، ثم مثلها بيانياً في المستوي الإحداثي.

الحل

نفرض أن عدد ساعات العمل x ويجب أن تكون قيمها موجبة ونفرض المبلغ الكلي الذي تتقاضاه الشركة y

$$y = 5x + 10$$

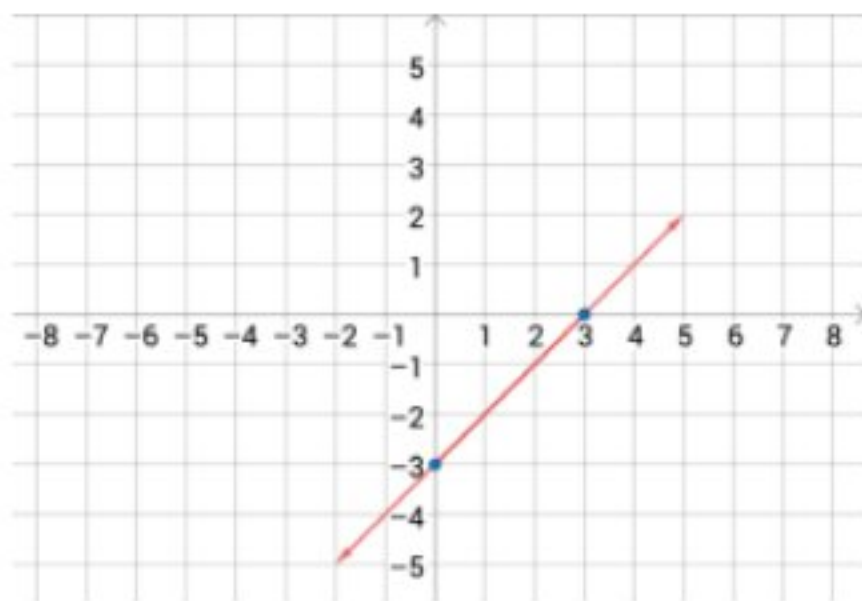
x	$y = 5x + 10$	y	(x, y)
1	$y = 5(1) + 10 \Rightarrow y = 15$	15	(1, 15)
2	$y = 5(2) + 10 \Rightarrow y = 20$	20	(2, 20)



فَكَّرْ

23

اكتشف الخطأ: مثل محمد المعادلة الخطية التالية $y = -3x + 9$ بالشكل البياني المجاور. اكتشف خطأ محمد وصححه.



الحل

$$y = -3x + 9$$

x	$y = -3x + 9$	(x, y)
0	$y = -3(0) + 9 = 0 + 9 \Rightarrow y = 9$	(0, 9)
1	$y = -3(1) + 9 = -3 + 9 \Rightarrow y = 6$	(1, 6)

خطأ محمد هو في تعيين مستقيم المعادلة والصحيح هو المستقيم باللون الأحمر.

مسألة مفتوحة: أعط مثلاً لمعادلة خطية على صورة $ax+by+c=0$ لكل حالة:

i) $a = 0$

ii) $b = 0$

iii) $c = 0$

الحل

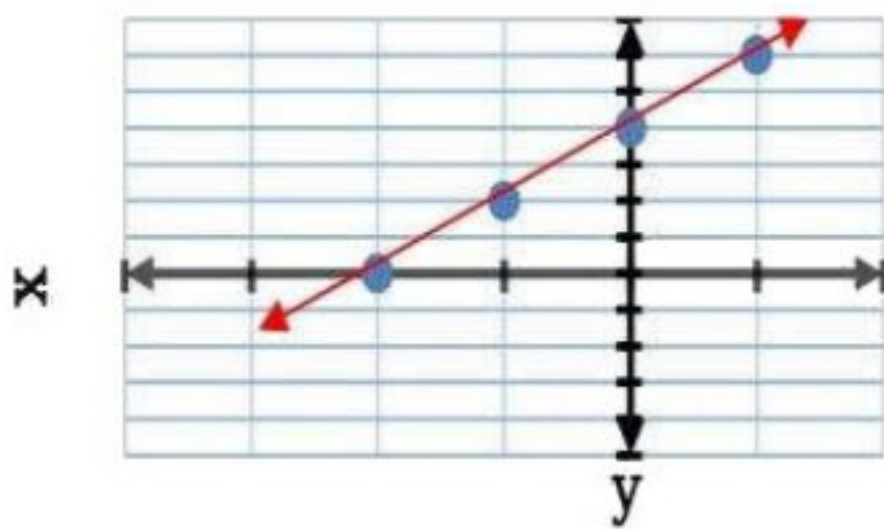
1 $a = 0 \Rightarrow 2y + 3 = 0$

2 $b = 0 \Rightarrow 2x + 3 = 0$

3 $c = 0 \Rightarrow 2x + 3y = 0$

تحدي: شكلت الأزواج المرتبة التالية $(-1,2), (1,6), (0,4)$ مستقيماً، ما نقطة تقاطع هذا المستقيم مع محور السينات؟

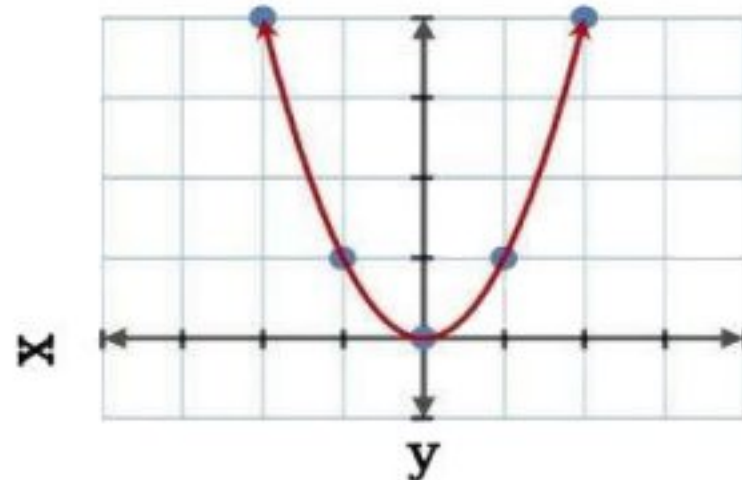
الحل



نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات هي $(-2,0)$

تبرير: بيّن اذا كانت الأزواج المرتبة الآتية: $\{(2,4), (1,1), (0,0), (-1,1), (-2,4)\}$ تمثل دالة خطية ام تربيعية.

الحل



تمثل داله تربيعية لان الرسم على شكل U

حس عددي: $y = x^2 + 1$, $y = x + 1$ ايهما تمثل دالة تربيعية؟ وضح ذلك.

الحل

$y = x^2 + 1$ تمثل دالة تربيعية \\\ لان اس المتغير 2

أكتب خطوات تبين ان $y=4x+3$ معادلة خطية؟

الحل

1 الدالة تحتوي على x من الدرجة الأولى .

2 بالتمثيل البياني نجد انها تمثل بمستقيم يقطع المحورين ولا يمر بنقطة الاصل

شاهد هذا الدرس
على يوتيوب



4

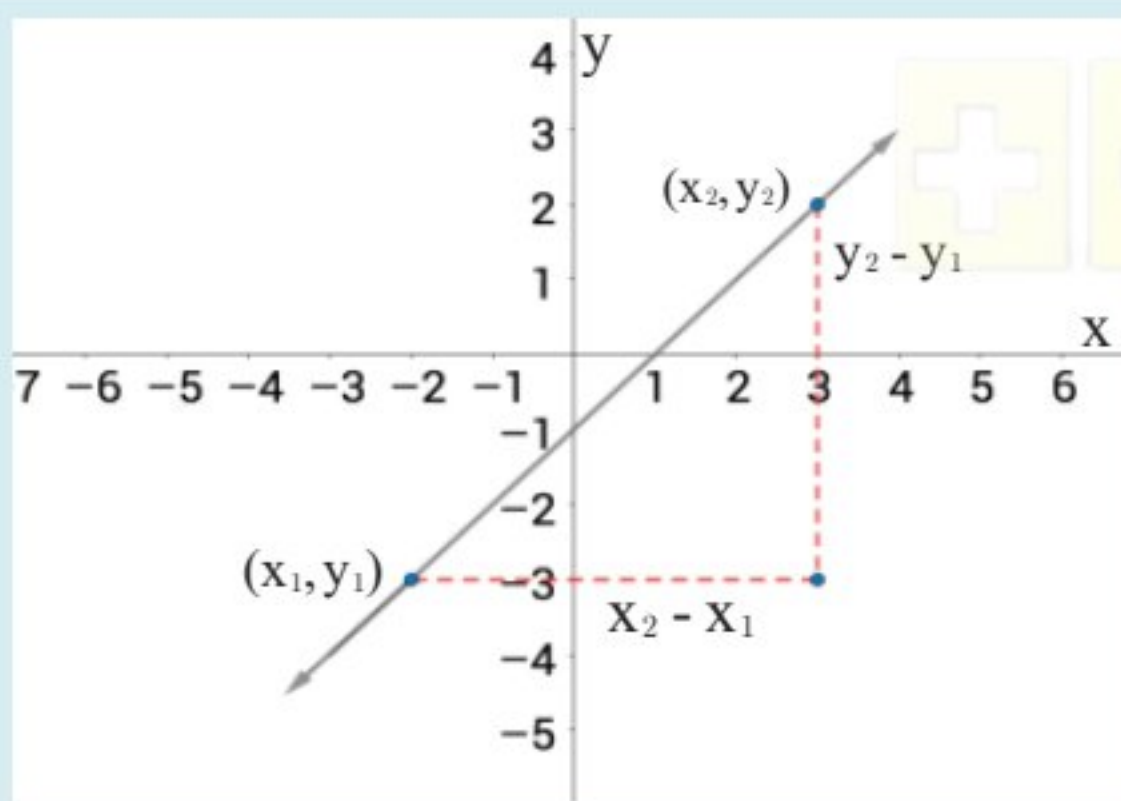
الدرس 2-4 ميل المستقيم.

تعلم

المنحدرات الجبلية تُعدّ مثلاً جيداً على الميل، فكلما زاد ارتفاع الجبل زاد الميل. كيف يمكننا تحديد ميل المنحدرات؟

[4-2-1] إيجاد ميل المستقيم

الميل: يُعرف ميل المستقيم غير الرأسّي بأنه النسبة بين التغير العمودي والتغير الأفقي.



التغير العمودي: هو التغير الصادي ويساوي $y_2 - y_1$

التغير الأفقي: هو التغير السيني ويساوي $x_2 - x_1$

التغير الصادي

التغير السيني

اي: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ حيث $x_2 - x_1 \neq 0$

m: هو ميل المستقيم المار بالنقطتين $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

يمكن ان يكون ميل المستقيم موجباً او سالباً اذا لم يكن افقياً او رأسياً وقد يكون صفراً (افقياً) او غير محدد (رأسياً).

مثال (1) جد ميل المستقيم المار بنقطتين في كل مما يأتي:

i) A(5, 7), B(-2, 1)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ميل المستقيم المار بنقطتين

$$m = \frac{1 - 7}{-2 - 5}$$

نعوض بالنقطتين

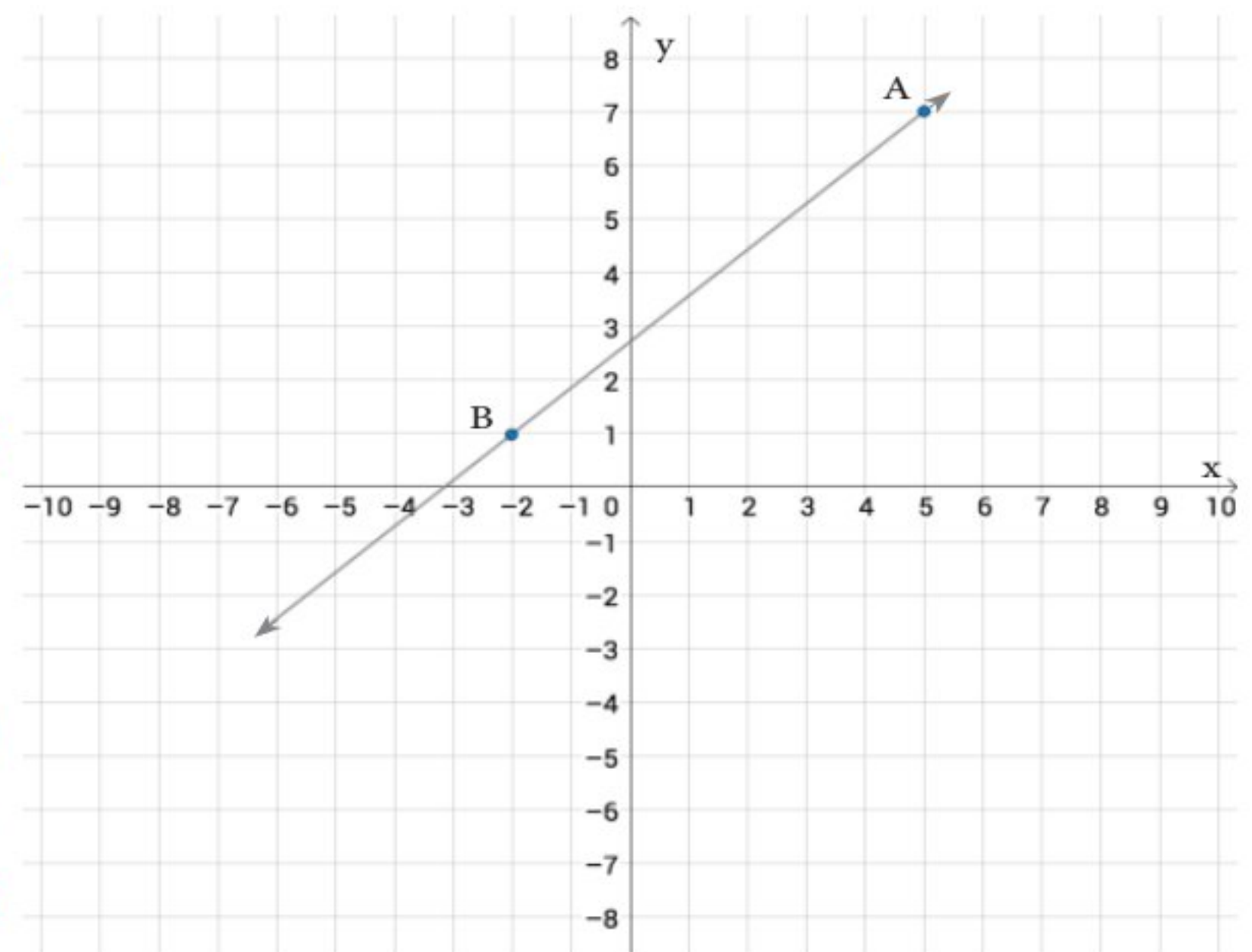
$$m = \frac{-6}{-7}$$

بالتبسيط

$$m = \frac{6}{7}$$

لذا ميل $\overrightarrow{AB}$ هو $\frac{6}{7}$ (موجب)

الميل موجب (المستقيم نحو الاعلى)
عند التحرك من اليسار الى اليمين
قيم y تتزايد.



ii) A (-1, 5), B(4, 2)

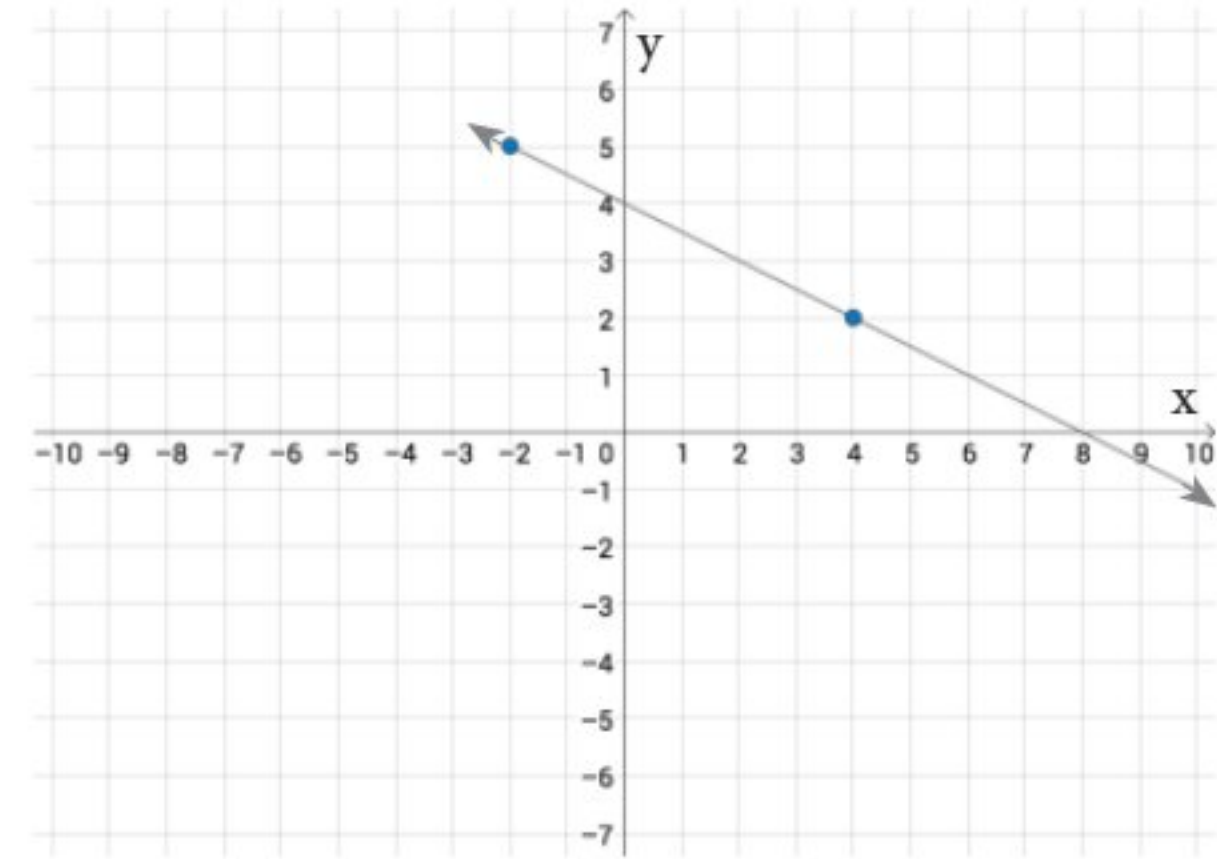
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 5}{4 - (-1)} = \frac{-3}{5}$$

ميل المستقيم المار بنقطتين

نعوض بالنقطتين

لذا ميل $\overrightarrow{AB}$ هو $-\frac{3}{5}$ (سالب)

الميل سالب (المستقيم نحو الأسفل) عند التحرك من اليسار إلى اليمين، قيم y تتناقص.



iii) A (1, - 2), B(4, - 2)

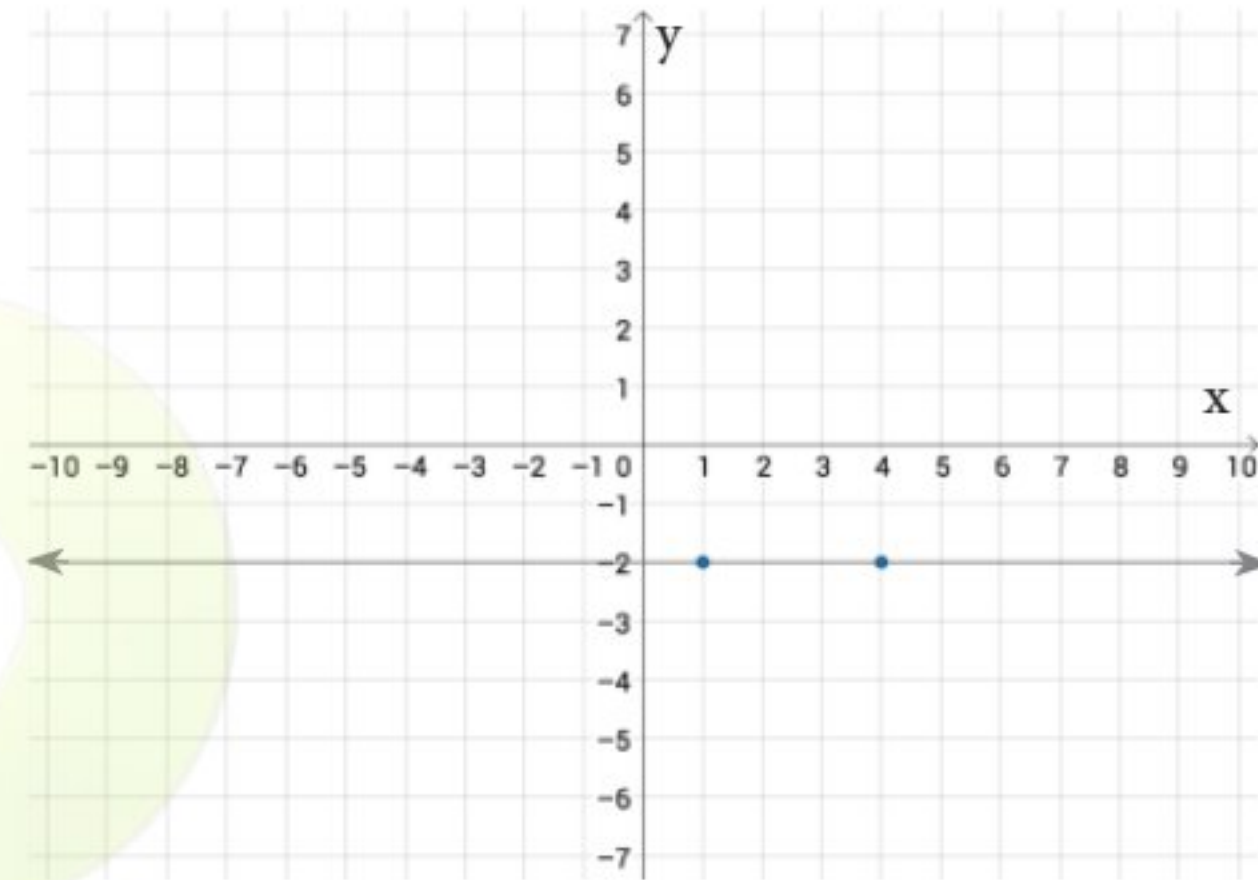
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - (-2)}{4 - 1} = \frac{0}{3} = 0$$

ميل المستقيم المار بنقطتين

نعوض بالنقطتين

لذا ميل $\overrightarrow{AB}$ هو 0

الميل صفر (المستقيم افقي) يوازي محور السينات، قيم y ثابتة.



iv) A (-2, 3), B(-2, - 3)

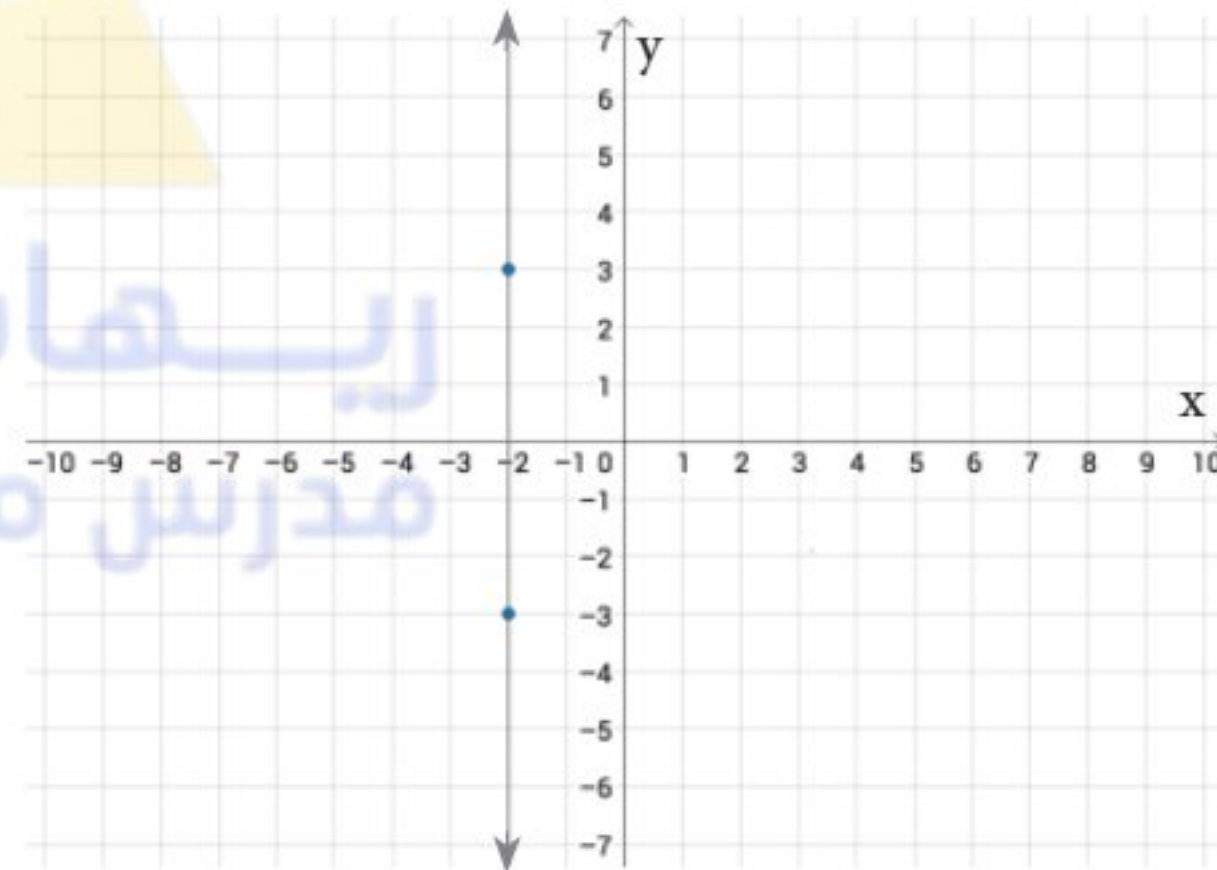
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - 3}{(-2) - (-2)} = \frac{-6}{0}$$

ميل المستقيم المار بنقطتين

نعوض بالنقطتين

لايجوز القسمة على 0 لذا ميل $\overrightarrow{AB}$ غير محدد

الميل غير محدد (المستقيم شاقولي) يوازي محور الصادات، قيم x ثابتة



يُمثل الجدول المجاور تغير درجات الحرارة بالزمن (بالساعات)، جد ميل المستقيم وشرح مايعنيه.

مثال (2)

الزمن (الساعات)	درجات الحرارة
1	-2
2	1
3	4
5	10

اختر اي نقطتين من الجدول ولتكن $(x_1, y_1) = (1, -2)$

$(x_2, y_2) = (3, 4)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ميل المستقيم المار بنقطتين

$$= \frac{4 - (-2)}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3$$

التعويض والتبسيط

بما ان ميل المستقيم 3 فان درجات الحرارة تزداد 3 درجات سيليزية كل ساعة.

شاهد هذا الدرس على يوتيوب



5

[4-2-2] تقاطع المستقيم مع المحورين في المستوي الإحداثي

يمكنك ان تمثل بسهولة معادلة المستقيم من خلال ايجاد نقطتي تقاطع المستقيم مع المحورين.

المقطع السيني: هو قيمة x من تقاطع المستقيم مع محور السينات، اي بالتعويض من $y = 0$. ونقطة التقاطع $(x, 0)$

المقطع الصادي: هو قيمة y من تقاطع المستقيم مع محور الصادات، اي بالتعويض من $x = 0$. ونقطة التقاطع $(0, y)$

مثال (3)

جد المقطع السيني والصادي للمستقيم $3x + 5y = 15$.

المقطع السيني

$$3x + 5y = 15$$

المعادلة

$$3x + 5(0) = 15$$

نعوض من $y = 0$

$$3x = 15$$

تبسيط

$$x = \frac{15}{3}$$

بقسمة طرفي المعادلة على 3

$$x = 5$$

لذا المقطع السيني هو 5.

ونقطة التقاطع مع محور السينات هي: $(5, 0)$

المقطع الصادي

$$3x + 5y = 15$$

المعادلة

$$3(0) + 5y = 15$$

نعوض من $x = 0$

$$5y = 15$$

تبسيط

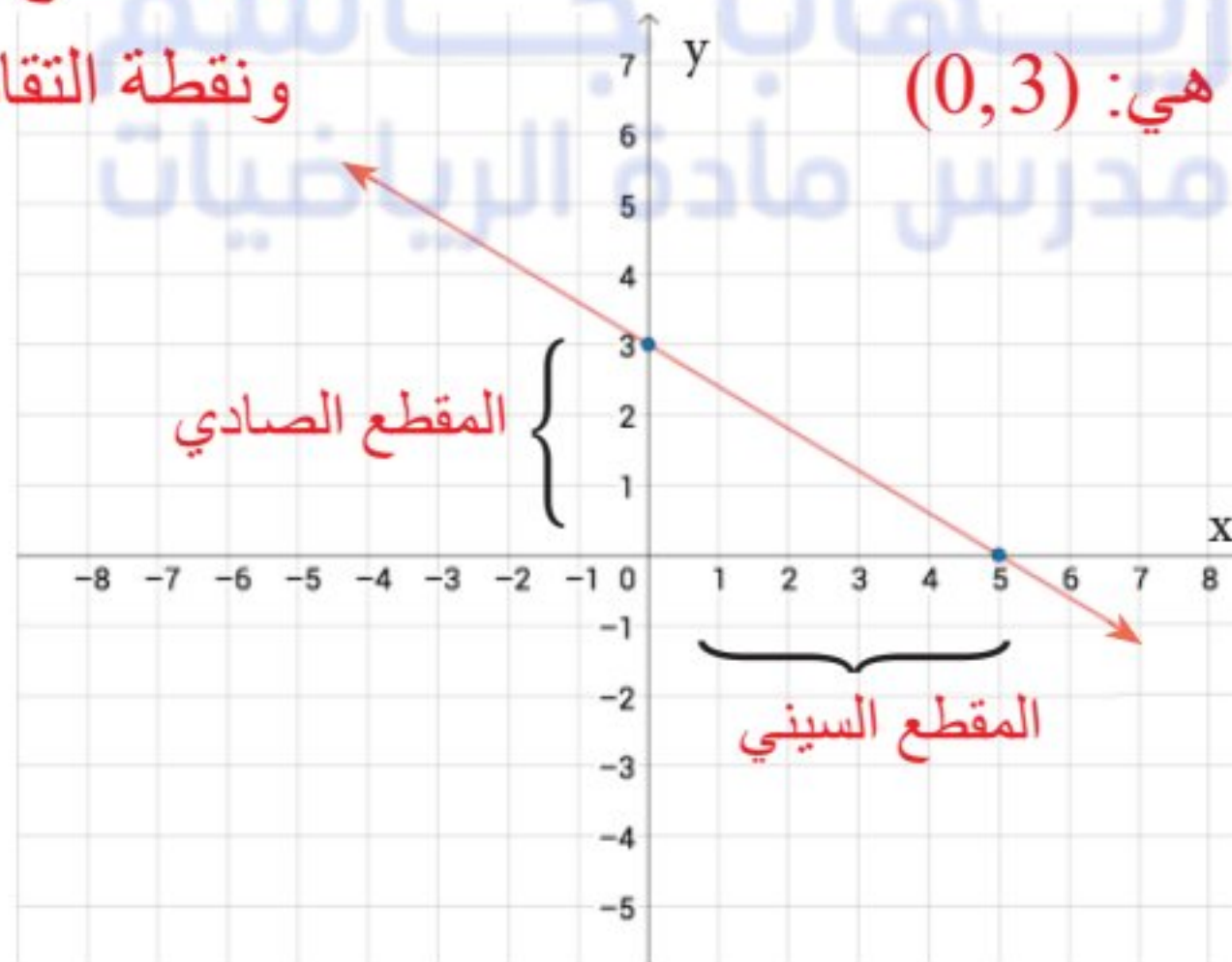
$$y = \frac{15}{5}$$

بقسمة طرفي المعادلة على 5

$$y = 3$$

لذا المقطع الصادي هو 3.

ونقطة التقاطع مع محور الصادات هي: $(0, 3)$



جد المقطع السيني والصادي ان وجد لكل مما يأتي:

مثال (4)

i) $x = -2$

ii) $y = 4$

$x = -2$ يمثل المقطع السيني ونقطة التقاطع $(-2, 0)$

$y = 4$ تمثل المقطع الصادي ونقطة التقاطع $(0, 4)$

المستقيم // محور الصادات

المستقيم // محور السينات



تأكد من فهمك

جد ميل المستقيم المار بالنقطتين، أموجب الميل أم سالب أم صفر أم غير محدد، ثم حدّد اتجاه حركته لكل مما يأتي:

الحل

1 $(-2, -2), (-4, 1)$
 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-2)}{-4 - (-2)} = \frac{1 + 2}{-4 + 2} = -\frac{3}{2}$

الميل موجب (المستقيم نحو الأعلى) عند التحريك من اليسار الى اليمين قيم y تتزايد.

الحل

2 $(0, 0), (3, 2)$
 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{3 - 0} = \frac{2}{3}$$

الميل موجب (المستقيم نحو الأعلى) عند التحريك من اليسار الى اليمين قيم y تتزايد.

الحل

3 $(-4, 4), (2, -5)$
 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5 - 4}{2 - (-4)} = \frac{-9}{6} = -\frac{3}{2}$$

الميل سالب (المستقيم نحو الأسفل) عند التحريك من اليسار الى اليمين قيم y تتناقص.

الحل

4 $(5, 0), (0, 2)$
 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{0 - 5} = -\frac{2}{5}$$

الميل سالب (المستقيم نحو الأسفل) عند التحريك من اليسار الى اليمين قيم y تتناقص.

الحل

5 $(4, 3), (4, -3)$
 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - 3}{4 - 4} = \frac{-6}{0}$

الميل غير معرف (المستقيم شاقولي) يوازي محور الصادات وقيم x ثابتة

الحل

6 $(-6, -1), (-2, -1)$
 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

الميل صفر (المستقيم أفقي) يوازي محور السينات قيم y ثابتة .
 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - (-1)}{-2 - (-6)} = \frac{0}{4} = 0$

جد المقطع السيني والمقطع الصادي لكل مما يأتي:

الحل

7 $3x + 6y = 18$

المقطع السيني

$3x + 6y = 18$ المعادلة

$y = 0 \Rightarrow 3x + 6(0) = 18$

$3x = 18$

$x = \frac{18}{3} = 6$

نقطة التقاطع مع محور السينات هي : $(6, 0)$

المقطع الصادي

$3x + 6y = 18$ المعادلة

$x = 0 \Rightarrow 3(0) + 6y = 18$

$6y = 18$

$y = \frac{18}{6} = 3$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي : $(0, 3)$

8 $y + 2 = 5x - 4$

المقطع السيني

$y + 2 = 5x - 4$ المعادلة

$y = 0 \Rightarrow 0 + 2 = 5x - 4$

$5x - 4 = 2$

$5x = 2 + 4 \Rightarrow 5x = 6$

$x = \frac{6}{5}$

نقطة التقاطع مع محور السينات هي : $(\frac{6}{5}, 0)$

المقطع الصادي

$y + 2 = 5x - 4$ المعادلة

$x = 0 \Rightarrow y + 2 = 5(0) - 4$

$y + 2 = -4$

$y = -4 - 2$

$y = -6$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي : $(0, -6)$



الحل

9 $y = -4x$

المقطع السيني

المقطع الصادي

$y = -4x$ المعادلة

$y = -4x$ المعادلة

$y = 0 \Rightarrow 0 = -4x \Rightarrow x = 0$

$x = 0 \Rightarrow y = -4(0) \Rightarrow y = 0$

نقطة التقاطع مع محور السينات هي : $(0, 0)$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي : $(0, 0)$

الحل

10 $y = -x + 8$

المقطع السيني

المقطع الصادي

$y = -x + 8$ المعادلة

$y = -x + 8$ المعادلة

$y = 0 \Rightarrow 0 = -x + 8$

$x = 0 \Rightarrow y = 0 + 8$

$x = 8$

$y = 8$

نقطة التقاطع مع محور السينات هي : $(8, 0)$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي : $(0, 8)$

الحل

11 $5x = y - 8$

المقطع السيني

المقطع الصادي

$5x = y - 8$ المعادلة

$5x = y - 8$ المعادلة

$y = 0 \Rightarrow 5x = 0 - 8$

$x = 0 \Rightarrow 5(0) = y - 8$

$5x = -8$

$0 = y - 8$

$x = -\frac{8}{5}$

$y = 8$

نقطة التقاطع مع محور السينات هي : $(-\frac{8}{5}, 0)$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي : $(0, 8)$

12 $y = -\frac{3}{4}x - 5$

الحل

المقطع السيني

المقطع الصادي

$y = -\frac{3}{4}x - 5$ المعادلة

$y = -\frac{3}{4}x - 5$ المعادلة

$y = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{3}{4}x - 5$

$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}(0) - 5$

$\frac{3}{4}x = -5 \Rightarrow 3x = -20$

$y = -5$

$x = -\frac{20}{3}$

نقطة التقاطع مع محور السينات هي : $(-\frac{20}{3}, 0)$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي : $(0, -5)$

13 $2x + 6y = 12$

الحل

المقطع السيني

المقطع الصادي

$2x + 6y = 12$ المعادلة

$2x + 6y = 12$ المعادلة

$y = 0 \Rightarrow 2x + 6(0) = 12$

$x = 0 \Rightarrow 2(0) + 6y = 12$

$2x = 12$

$6y = 12$

$x = \frac{12}{2} = 6$

$y = \frac{12}{6} = 2$

نقطة التقاطع مع محور السينات هي : $(6, 0)$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي : $(0, 2)$

الحل

14 $y + 4 = 2x - 4$

المقطع السيني

المعادلة $y + 4 = 2x - 4$

$y = 0 \Rightarrow 0 + 4 = 2x - 4$

$2x - 4 = 4$

$2x = 4 + 4 \Rightarrow 2x = 8$

$x = \frac{8}{2} = 4$

نقطة التقاطع مع محور السينات هي : $(4, 0)$

المقطع الصادي

المعادلة $y + 4 = 2x - 4$

$x = 0 \Rightarrow y + 4 = 2(0) - 4$

$y + 4 = -4$

$y = -4 - 4$

$y = -8$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي : $(0, -8)$

الحل

15 $y = -5x$

المقطع السيني

المعادلة $y = -5x$

$y = 0 \Rightarrow 0 = -5x \Rightarrow x = 0$

نقطة التقاطع مع محور السينات هي : $(0, 0)$

المقطع الصادي

المعادلة $y = -5x$

$x = 0 \Rightarrow y = -5(0) \Rightarrow y = 0$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي : $(0, 0)$

الحل

16 $x = 4$

تمثل المقطع السيني ونقطة التقاطع $(4, 0)$ والمستقيم يوازي محور الصادات .

الحل

17 $3y = -6$

$3y = -6$

تمثل المقطع الصادي ونقطة التقاطع $(0, -2)$ والمستقيم يوازي محور السينات .

الحل

18 $y = -\frac{1}{2}x + 4$

المقطع السيني

$y = -\frac{1}{2}x + 4$ المعادلة

$y = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{2}x + 4$

$\frac{1}{2}x = 4 \Rightarrow x = 8$

نقطة التقاطع مع محور السينات هي : (8, 0)

المقطع الصادي

$y = -\frac{1}{2}x + 4$ المعادلة

$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}(0) + 4$

$y = 4$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي : (0, 4)

تدرب وحل التمرينات

جد ميل المستقيم المار بالنقطتين، أوجب الميل أم سالب أم صفر أم غير محدد ثم حدد اتجاه حركته لكل مما يأتي:

الحل

19 (6, 2), (0, 2)
(x_1, y_1), (x_2, y_2)

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 2}{0 - 6} = \frac{0}{-6} = 0$

الميل صفر (المستقيم أفقي) يوازي محور السينات قيم y ثابتة.

الحل

20 (-2, -3), (2, 4)
(x_1, y_1), (x_2, y_2)

$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - (-3)}{2 - (-2)} = \frac{4 + 3}{2 + 2} = \frac{7}{4}$

الميل موجب (المستقيم نحو الأعلى) عند التحريك من اليسار الى اليمين قيم y تتزايد.

الحل

21 $(3, -5), (0, 0)$
 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - (-5)}{0 - 3} = -\frac{5}{3}$$

الميل سالب (المستقيم نحو الأسفل) عند التحريك من اليسار إلى اليمين قيم y تتناقص .

الحل

22 $(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}), (\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$
 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}}{\frac{3}{2} - \frac{3}{2}} = \frac{\frac{2}{4}}{0}$$

الميل غير معرف (المستقيم شاقولي) يوازي محور الصادات وقيم x ثابتة

جد المقطع السيني والمقطع الصادي لكل مما يأتي:

23 $3y - 7x = 9$

الحل

المقطع السيني

المقطع الصادي

$3y - 7x = 9$ المعادلة

$3y - 7x = 9$ المعادلة

$y = 0 \Rightarrow 3(0) - 7x = 9$

$x = 0 \Rightarrow 3y - 7(0) = 9$

$-7x = 9$

$3y = 9$

$x = -\frac{9}{7}$

$y = \frac{9}{3} = 3$

نقطة التقاطع مع محور السينات هي : $(-\frac{9}{7}, 0)$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي : $(0, 3)$

24 $y = -\frac{3}{2}x$

الحل

المقطع السيني

المقطع الصادي

$y = -\frac{3}{2}x$ المعادلة

$y = -\frac{3}{2}x$ المعادلة

$y = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{3}{2}x \Rightarrow x = 0$

$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}(0) \Rightarrow y = 0$

نقطة التقاطع مع محور السينات هي : $(0, 0)$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي : $(0, 0)$

25 $x = -4$

الحل

تمثل المقطع السيني ونقطة التقاطع $(-4, 0)$ والمستقيم يوازي محور الصادات .

26 $0 = y + 3$

الحل

$y = -3$

تمثل المقطع الصادي ونقطة التقاطع $(0, -3)$ والمستقيم يوازي محور السينات

تدرب وحل مسائل حياتية

27

فيزياء: يمثل الجدول المجاور كمية السائل المتدفق من حوض خلال فترة زمنية، جد ميل المستقيم الذي يمثله الجدول. وفسر مايعنيه.

الحل

كمية السائل المتسرب	
الزمن (ثوان)	حجم السائل m^3
10	40
13	52
16	64
19	76

نختاراي نقطتين من الجدول (13 - 52) و (10, -40)

يتدفق الماء بمعدل $4m^3$ في الثانية الواحدة

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \frac{52 - 40}{13 - 10} \Rightarrow m = \frac{12}{3} \Rightarrow m = 4$$

28

نبات: اذا كان طول نبتة 30cm، في غضون كل شهرين تنمو بمقدار ثابت 4cm اخرى.

الزمن	0	2	4
طول النبتة	30	34	38

الحل

نختاراي نقطتين من الجدول (2 - 34) و (0, -30)

الزمن	0	2	4
طول النبتة	30	34	38

1.

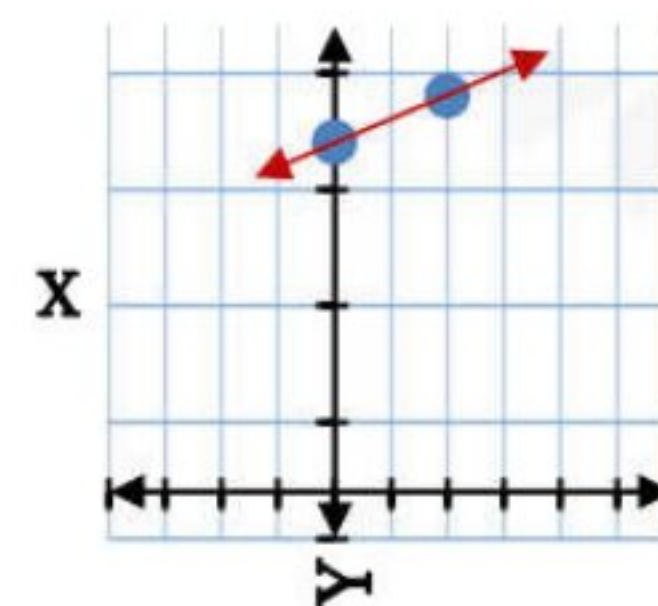
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \frac{34 - 30}{2 - 0} \Rightarrow m = \frac{4}{2} \Rightarrow m = 2$$

2.

3. تكون الدالة الخطية من خلال الجدول $y = 2x + 30$ حيث المدخلات الزمن والمخرجات طول النتيجة .

4.

x	$y = 2x + 30$	y	(x, y)
0	$y = 2(0) + 30$	30	(0, 30)
2	$y = 2(2) + 30$	34	(2, 34)



فَكَّرْ

29 **تحديد:** جد قيمة a التي تجعل ميل المستقيم المار بنقطتين $(1, 6), (-5, a)$ يساوي $\frac{1}{2}$.

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad m = \frac{1}{2}, \quad (1, 6), (-5, a)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{a - 6}{-5 - 1} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{a - 6}{-6} \Rightarrow 2(a - 6) = -6 \Rightarrow 2a - 12 = -6$$

$$\Rightarrow 2a = -6 + 12 \Rightarrow [2a = 6] \div 2 \Rightarrow a = 3$$

30 **تفكير ناقد:** هل يمكنك تحديد ميل مستقيم يمر بالنقطتين $(7, -3), (7, 3)$ ؟

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (7, -3), (7, 3)$$

$$m = \frac{3 - (-3)}{7 - 7} \Rightarrow m = \frac{6}{0} \Rightarrow m = \infty \quad \text{غير معروف}$$

اذن لا يمكن تحديد الميل لهذا المستقيم.

31 **اكتشف الخطأ:** ميل المستقيم الذي يمر في النقطتين $(0, 3), (3, -1)$ هو $\frac{3 - 0}{3 - (-1)} = \frac{3}{4}$ اكتشف الخطأ وصححه.

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (0, 3), (3, -1)$$

$$m = \frac{3 - (-1)}{3 - 0} \Rightarrow m = \frac{3 + 1}{3} \Rightarrow m = \frac{4}{3}$$

الخطأ هو في تعريف القانون حيث التغير السيني بالبسط والتغير الصادي في المقام وليس العكس.

32 **مسألة مفتوحة:** اذكر نقطتين على مستقيم يكون ميله $-\frac{1}{3}$.

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (1, 2), (4, 1)$$

$$m = \frac{1 - 2}{4 - 1} \Rightarrow m = \frac{-1}{3}$$

33

تفكير ناقد: من الشكل البياني المجاور حدّد اتجاه المستقيم.

الحل

من المخطط $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, (2, 0), (0, 2)$

$$m = \frac{2 - 0}{0 - 2} \Rightarrow m = \frac{2}{-2} \Rightarrow m = -1$$

بما ان الميل السالب اذا المستقيم يتجه نحو الاسفل

أكتب

باسلوبك ماذا يعني الميل يساوي صفراً، والميل غير محدد.

الحل

الميل يساوي صفر: المستقيم // محور السينات / الميل غير محدد // محور الصادات

شاهد هذا الدرس
على يوتيوب



6



الدرس 3-4 معادلة المستقيم.

تعلم

يقطع راكب دراجة هوائية 20 كيلو متراً في ساعتين و يقطع 50 كيلو متراً في خمس ساعات، ما المعادلة الخطية التي تربط بين المسافة و الزمن؟

[4-3-1] كتابة معادلة مستقيم بمعرفة نقطتين منه

معادله مستقيم يمر بالنقطتين $B(x_2, y_2), A(x_1, y_1)$ تعلمت سابقاً ايجاد ميل مستقيم يمر بالنقطتين A, B حيث $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ على فرض ان النقطة $C(x, y)$ تقع على المستقيم فيكون ميل المستقيم المار بالنقطتين A, C هو $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ من المعلوم ان ميل المستقيم ثابت في جميع نقاطه لذلك فإن:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

هذه المعادلة تمثل معادلة المستقيم AB .

مثال (1)

نجد المعادلة الخطية في فقرة (تعلم):

نفرض ان

$$C(x,y) \in \overrightarrow{AB}, \quad B(5,50), \quad A(2,20)$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$x_2 = 5, y_2 = 50 \quad x_1 = 2, y_1 = 20$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 20}{x - 2} = \frac{50 - 20}{5 - 2}$$

$$\frac{y - 20}{x - 2} = \frac{30}{3}$$

$$y - 20 = 10x - 20$$

$$y = 10x$$

كتابة معادلة المستقيم المار بنقطتين
التعويض من $(x_2, y_2), (x_1, y_1)$

بالتبسيط

الضرب التبادلي

اذن معادلة المستقيم هي $y - 10x = 0$

شاهد هذا الدرس والدرس
التالي على يوتيوب



7

[4-3-2] كتابة معادلة المستقيم بمعرفة ميله ونقط منه

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

معادلة مستقيم ميله m ويمر بالنقطة (x_1, y_1) :

تعلمت سابقاً معادلة مستقيم يمر بنقطتين و التي هي

وتعلمت ان ميل مستقيم مار بالنقطتين $(x_2, y_2), (x_1, y_1)$ هو

لذلك يمكن كتابة المعادلة في أعلاه بشكل

وبالضرب التبادلي نحصل على المعادلة المطلوبة $y - y_1 = m(x - x_1)$

مثال (2)

استعمل معادلة الميل والنقطة لكل مستقيم لتحديد ميله والنقطة المار بها:

i) $y - 3 = -5(x - 2)$

$$y - 3 = -5(x - 2)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$m = -5, (x_1, y_1) = (2, 3)$$

معادلة الميل - النقطة
بالمقارنة

ii) $y + 7 = \frac{2}{5}x$

$$y - (-7) = \frac{2}{5}(x - 0)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$m = \frac{2}{5}, (x_1, y_1) = (0, -7)$$

معادلة الميل - النقطة

بالمقارنة

مثال (3) جد معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{1}{2}$ ومقطعه السيني يساوي -1 .

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$m = \frac{1}{2}, \quad x_1 = -1, \quad y_1 = 0 \Rightarrow p(-1, 0)$$

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x - (-1))$$

$$y = \frac{1}{2}(x + 1)$$

$$2y = x + 1$$

معادلة الميل - النقطة

الميل، النقطة

بالتعويض من الميل والنقطة

بالتبسيط

ضرب طرفي المعادلة في 2

معادلة المستقيم المطلوب $2y - x = 1$

[4-3-3] كتابة معادلة المستقيم بمعرفه ميله ومقطعه مع أحد المحورين

هذا الدرس مشروح

على يوتيوب في الباركود

رقم 7 في الصفحة السابقة

معادلة المستقيم بدلالة ميله m ومقطعه الصادي k هي: $y = mx + k$

مثال (4) استعمل معادلة الميل و المقطع لكل مستقيم لتحديد ميله ومقطعه:

i) $2x + 3y = 6$ ii) $5x = 7y + 8$ iii) $y = x$ iv) $y = 1$ v) $y = 0$ vi) $y + x = 5$

i) $2x + 3y = 6 \Rightarrow 3y = -2x + 6$

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{2}{3}x + 2 \\ y = mx + k \end{array} \right\}$$

$$\therefore m = -\frac{2}{3}, \quad k = 2$$

بقسمة طرفي المعادلة على 3 المقارنة مع معادلة الميل - مقطع

ii) $5x = 7y + 8 \Rightarrow 7y = 5x - 8$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{5}{7}x - \frac{8}{7} \\ y = mx + k \end{array} \right\}$$

$$\therefore m = \frac{5}{7}, \quad k = -\frac{8}{7}$$

بقسمة المعادلة على 7 المقارنة مع معادلة الميل - مقطع

iii) $y = x \Rightarrow y = 1x + 0$

$$\left. \begin{array}{l} y = 1x + 0 \\ y = mx + k \end{array} \right\}$$

$$\therefore m = 1, \quad k = 0$$

المقارنة مع معادلة الميل - مقطع

iv) $y = 0x + 1$

$$\left. \begin{array}{l} y = 0x + 1 \\ y = mx + k \end{array} \right\}$$

$$\therefore m = 0, \quad k = 1$$

المقارنة مع معادلة الميل - مقطع

v) $y = 0x + 0$

$$\left. \begin{array}{l} y = 0x + 0 \\ y = mx + k \end{array} \right\}$$

$$\therefore m = 0, \quad k = 0$$

المقارنة مع معادلة الميل - مقطع

vi) $y = -1x + 5$

$$\left. \begin{array}{l} y = -1x + 5 \\ y = mx + k \end{array} \right\}$$

$$\therefore m = -1, \quad k = 5$$

المقارنة مع معادلة الميل - مقطع

مثال (5) مستقيم يمر في النقطة $(5, -1)$ وميله $-\frac{2}{5}$. جد مقطعه ومعادلته.

الطريقة الاولى

الطريقة الثانية

$$y = mx + k$$

$$m = -\frac{2}{5}$$

$$y = -\frac{2}{5}x + k$$

$$-1 = -\frac{2}{5}(5) + k$$

$$-1 = -2 + k$$

$$k = 1 \quad y = -\frac{2}{5}x + 1$$

معادلة الميل - المقطع

معطى

بالتعويض من الميل

بالتعويض بالنقطة

بالتبسيط

معادلة المستقيم

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$m = -\frac{2}{5}, p(5, -1)$$

$$y - (-1) = -\frac{2}{5}(x - 5)$$

$$5y + 5 = -2x + 10$$

$$5y = -2x + 5$$

$$y = -\frac{2}{5}x + 1$$

معادلة الميل - النقطة

معطى

بالتعويض من النقطة والميل

بضرب المعادلة في 5

بقسمة المعادلة على 5 بعد التبسيط

معادلة المستقيم

تأكد من فهمك

جد معادلة المستقيمات التي يمر كل منها بنقطتين فيما يأتي:

1 $(-3, 1), (2, -1)$
 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 1}{x - (-3)} = \frac{-1 - 1}{2 - (-3)} \Rightarrow \frac{y - 1}{x + 3} = \frac{-2}{5}$$

$$5y - 5 = -2x - 6 \Rightarrow 5y + 2x = -6 + 5 \Rightarrow 5y + 2x = -1$$

معادلة المستقيم

2 $(0, 2), (2, -4)$
 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 2}{x - 0} = \frac{-4 - 2}{2 - 0} \Rightarrow \frac{y - 2}{x} = \frac{-6}{2} \Rightarrow \frac{y - 2}{x} = -3$$

$$y - 2 = -3x \Rightarrow y + 3x = 2$$

معادلة المستقيم

الحل

الحل

استعمل معادلة الميل والنقطة لكل مستقيم لتحديد ميله والنقطة المار بها:

3 $y - 1 = 2(x - 3)$

الحل

$$y - 1 = 2(x - 3)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

بالمقارنة مع معادلة الميل - النقطة

$$m = 2, (x_1, y_1) = (3, 1)$$

4 $y + 1 = -x + 4$

الحل

$$y + 1 = -1(x - 4)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

بالمقارنة مع معادلة الميل - النقطة

$$m = -1, (x_1, y_1) = (4, -1)$$

جد معادلة المستقيم لكل مما يلي ثم جد مقطعه:

5 $(4, 6), -\frac{2}{5}$

الحل

$$m = -\frac{2}{5}, (x_1, y_1) = (4, 6)$$

بالتعويض الميل والنقطة $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 6 = -\frac{2}{5}(x - 4)$$

$$5y - 30 = -2x + 8$$

$$5y = -2x + 8 + 30 \Rightarrow 5y = -2x + 38 \} \div 5$$

$$y = -\frac{2}{5}x + \frac{38}{5}$$

معادلة المستقيم

6 $(-1, -3), \frac{1}{3}$

الحل

$$m = \frac{1}{3}, (x_1, y_1) = (-1, -3)$$

بالتعويض الميل والنقطة $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - (-3) = \frac{1}{3}(x - (-1))$$

$$y + 3 = \frac{1}{3}(x + 1) \Rightarrow 3y + 9 = x + 1$$

$$3y = x + 1 - 9 \Rightarrow 3y = x - 8 \} \div 3$$

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{8}{3}$$

معادلة المستقيم

استعمل معادلة الميل والنقطة لكل مستقيم لتحديد ميله ومقطعه:

7 $5y = -2x - 1$

الحل

$$5y = -2x - 1 \} \div 5$$

$$y = -\frac{2}{5}x - \frac{1}{5}$$

$$y = mx + k$$

بالمقارنة معادلة الميل - المقطع

$$m = -\frac{2}{5}, k = -\frac{1}{5}$$

8 $-y = 7x$

الحل

$$-y = 7x \} \times (-1)$$

$$y = -7x + 0$$

$$y = mx + k$$

بالمقارنة معادلة الميل - المقطع

$$m = -7, k = 0$$

تدرب وحل التمرينات

جد معادلة المستقيمات التي يمر كل منها بنقطتين فيما يأتي:

الحل

9 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$
 $(0, 0), (-3, 7)$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 0}{x - 0} = \frac{7 - 0}{-3 - 0} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{-7}{3} \text{ الطرفين في الوسطين}$$

$$3y = -7x \Rightarrow 3y + 7x = 0 \text{ معادلة المستقيم}$$

الحل

10 $(0, 7), (-5, 0)$
 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 7}{x - 0} = \frac{0 - 7}{-5 - 0} \Rightarrow \frac{y - 7}{x} = \frac{-7}{-5} \Rightarrow \frac{y - 7}{x} = \frac{7}{5} \text{ الطرفين في الوسطين}$$

$$5y - 35 = 7x \Rightarrow 5y - 7x = 35 \text{ معادلة المستقيم}$$

استعمل معادلة الميل والنقطة لكل مستقيم لتحديد ميله والنقطة المار بها:

11 $y + \frac{3}{2} = -5(x - 8)$

$$y + \frac{3}{2} = -5(x - 8) \quad \left. \begin{array}{l} \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ y - y_1 = m(x - x_1) \end{array} \right\} \text{بالمقارنة مع معادلة الميل - النقطة}$$

$$m = -5, (x_1, y_1) = \left(8, -\frac{3}{2}\right)$$

12 $y - x = 8$

$$y = x + 8$$

$$y - 0 = 1(x + 8) \quad \left. \begin{array}{l} \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ y - y_1 = m(x - x_1) \end{array} \right\} \text{بالمقارنة مع معادلة الميل - النقطة}$$

$$m = 1, (x_1, y_1) = (-8, 0)$$

جد معادلة المستقيم لكل مما يلي ثم جد مقطعه:

الحل

13 الميل -3 , $(-3, 7)$

(x_1, y_1)

بالتعويض الميل والنقطة $m = -3$, $(-3, 7) \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 7 = -3(x + 3) \Rightarrow y - 7 = -3x - 9 \Rightarrow y = -3x - 9 + 7$$

$$\Rightarrow y = -3x - 2$$

$$y = mx + k$$

بالمقارنة مع معادلة الميل - المقطع

$$k = -2 \text{ المقطع الصادي}$$

الحل

14 الميل $-\frac{1}{2}$, $(1, -4)$

$$m = \frac{-1}{2} \text{ , } (x_1, y_1) = (1, -4)$$

بالتعويض الميل والنقطة $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - (-4) = \frac{-1}{2}(x - 1)$$

$$y + 4 = \frac{-1}{2}(x - 1) \Rightarrow 2y + 8 = -x + 1$$

$$2y = -x + 1 - 8 \Rightarrow 2y = -x - 7 \} \div 2$$

$$y = \frac{-1}{2}x - \frac{7}{2}$$

معادلة المستقيم

$$y = mx + k$$

بالمقارنة مع معادلة الميل - المقطع

$$k = -\frac{7}{2} \text{ المقطع الصادي}$$

استعمل معادلة الميل والمقطع لكل مستقيم لتحديد ميله ومقطعه:

15 $y + 7 = 3x + 5$

$$y = 3x + 5 - 7$$

$$y = 3x - 2$$

$$y = mx + k$$

بالمقارنة مع معادلة الميل - المقطع

$$m = 3, k = -2$$

الحل

16 $\frac{1}{3}y = -5x - 1$

$$\frac{1}{3}y = -5x - 1$$

$$y = -15x - 3$$

$$y = mx + k$$

بالمقارنة مع معادلة الميل - المقطع

$$m = -15, k = -3$$

تدرب وحل مسائل حياتية



17 أحياء: ينمو ناب الفيل طول حياته بمعدل 1cm لكل شهر. افرض أنك بدأت بمراقبه فيل عندما كان طول نابه 100cm. اكتب على صورة الميل - النقطة معادلة تمثل نمو ناب الفيل بعد n شهر من المراقبة.

الحل

نكون الجدول التالي:

الزمن \ شهر	0	1	2	...	n
نمو الناب	100	101	102	...	100 + n

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{101 - 100}{2 - 1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

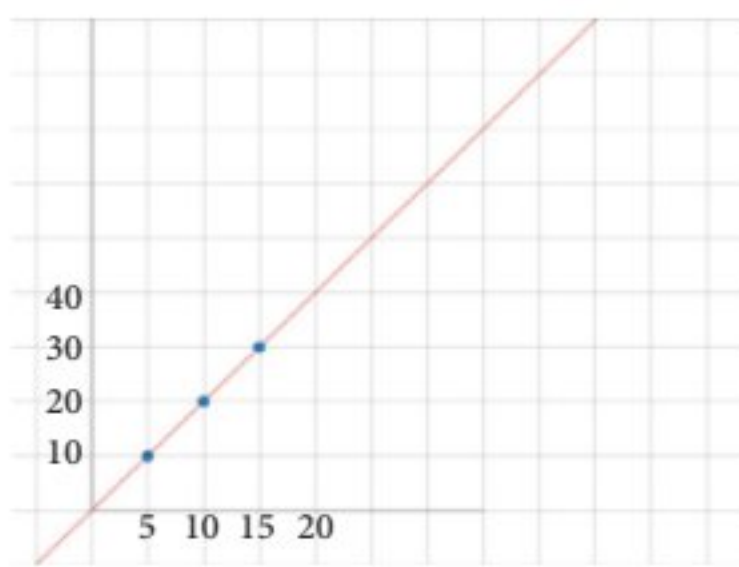
$$y - 100 = 1(x - 0)$$

$$y - 100 = x \Rightarrow y = x + 100$$

$$y = n + 100$$

والمطلوب هو المعادلة بعد n من المراقبة

إذا سوف نستخدم النقطتين (0,100), (1,101)



18 فيزياء: التمثيل البياني المجاور يمثل كمية المياه المتسربة من خزان خلال مدة زمنية محددة. اكتب على صورة نقطتين، معادلة تمثل تسرب المياه بعد n ثانية.

الحل

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 10}{x - 5} = \frac{20 - 10}{10 - 5} \Rightarrow \frac{y - 10}{x - 5} = \frac{10}{5} \Rightarrow \frac{y - 10}{x - 5} = \frac{2}{1}$$

$$y - 10 = 2(x - 5) \Rightarrow y - 10 = 2x - 10$$

$$y = 2x - 10 + 10 \Rightarrow y = 2x$$



نقود: يريد شخص تسديد مبلغ قدره 30 مليون دينار، بدفعات شهرية متساوية مقدارها 1.5 مليون دينار. المعادلة الخطية الآتية $y = -1.5x + 30$ حيث y القيمة الباقية من المبلغ، x عدد الاشهر، استعمل معادلة الميل - المقطع لتحديد ميله ومقطعه.

19

الحل

$$y = -1.5x + 30$$

$$y = mx + k$$

بالمقارنة مع معادلة الميل - المقطع

$$m = -1.5, k = 30$$



صحة: في دراسة حديثة توصلت الى ان الشخص يفقد 2 ساعة من عمره عند استهلاكه علبة سكاثر واحدة. اكتب المعادلة التي تمثل ذلك، ومثلها بيانياً

20

الحل

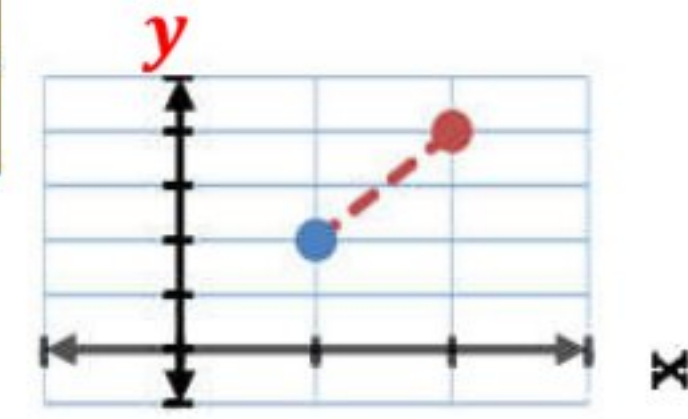
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

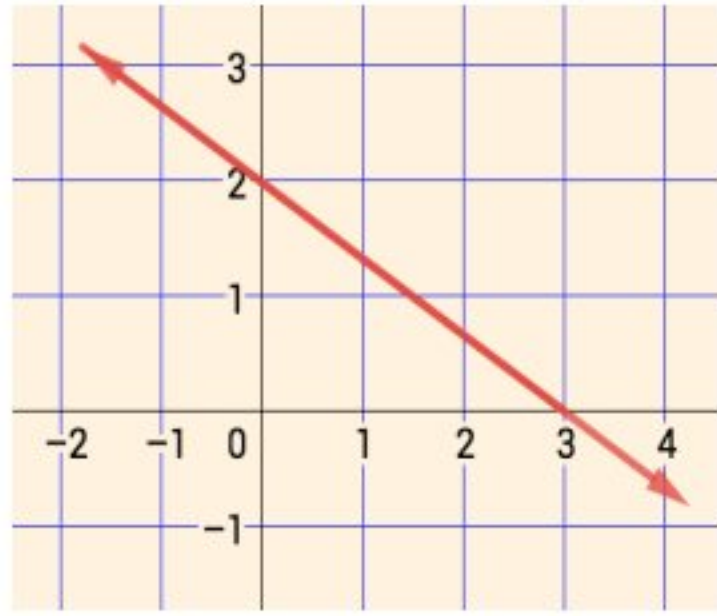
$$\frac{y - 2}{x - 1} = \frac{4 - 2}{2 - 1} \Rightarrow \frac{y - 2}{x - 1} = \frac{2}{1} \Rightarrow y - 2 = 2(x - 1)$$

$$y - 2 = 2x - 2 \Rightarrow y = 2x + 2 - 2$$

$$y = 2x$$

3	2	1	السكاثر
6	4	2	الوقت





هندسة: استعمل المعلومات في الشكل المجاور وجد معادلة المستقيم في الحالات الآتية: (i) نقطتان (ii) ميل - نقطة (iii) ميل - مقطعه الصادي

الحل

① نجد معادلة المستقيم من نقطتان

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 0}{x - 3} = \frac{2 - 0}{0 - 3} \Rightarrow \frac{y}{x - 3} = \frac{2}{-3}$$

$$2(x - 3) = -3y \Rightarrow 2x - 6 = -3y$$

$$2x + 3y = 6$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{2 - 0}{0 - 3} \Rightarrow m = \frac{2}{-3}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{2}{-3}(x - 3)$$

$$y = \frac{-2}{3}x + 2 \Rightarrow \left[y + \frac{2}{3}x = 2 \right] (\times 3)$$

$$3y + 2x = 6$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{2 - 0}{0 - 3} \Rightarrow m = \frac{2}{-3}$$

$$y = mx + k$$

$$y = \frac{-2}{3}x + 2$$

$$\left[y = \frac{-2}{3}x + 2 \right] (\times 3) \Rightarrow 3y = -2x + 6$$

$$3y + 2x = 6$$

② نجد الميل باستخدام القانون

③ نجد الميل باستخدام القانون

من خلال الرسم يكون

مقطعه الصادي $K = 2$

فكر

22 **تفكير ناقد:** هل يوجد مستقيم ميله 4 ويمر بالنقطتين $(5, 7)$, $(8, -2)$ ؟ إن وجدت مستقيماً كهذا فاكتب معادلته وإلا فحل جوابك.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{-2 - 7}{8 - 5}$$

$$m = \frac{-9}{3} \Rightarrow m = -3$$

الحل نعوض النقطتين $(5, 7)$, $(8, -2)$ في القانون الاتي لايجاد الميل

لا يوجد مستقيم ميله 4 يمر بالنقطتين السابقتين لان المستقيم المار بالنقطتين ميله هو 3

23 **تحذّر:** مستقيم تقاطعه الأفقي النظير الجمعي لتقاطعه العمودي، ويمر في النقطة $(2, 3)$. اكتب معادلة الميل - النقطة لهذا المستقيم.

الحل نفترض ان تقاطعه العمودي في a فتصبح النقطة $(a, 0)$

بما ان التقاطع الافقي هو نظير العمودي فيكون $-a$ وتصبح النقطة $(0, -a)$ نجد الميل من النقطتين السابقتين

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \frac{-a - 0}{0 - a} \Rightarrow m = \frac{-a}{-a} \Rightarrow m = 1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 3 = 1(x - 2)$$

$$y - 3 = x - 2 \Rightarrow y = x - 2 + 3 \Rightarrow y = x + 1$$

نكتب معادله ميل - نقطه ثم نعوض الميل والنقطه $(2, 3)$ لكي نجد المعادله .

24 **أيهما صحيح:** معادلة مستقيم ميله $\frac{3}{5}$ ويمر بالنقطة $(-1, 7)$.

$$y - 7 = \frac{5}{3}(x + 1)$$

$$y - 7 = \frac{3}{5}(x + 1)$$

أيهما اجابته صحيحة؟

الحل

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 7 = \frac{3}{5}(x - (-1))$$

$$y - 7 = \frac{3}{5}(x + 1)$$

نعوض النقطة $(-1, 7)$ والميل $m = \frac{3}{5}$ في القانون الاتي :

اذن اجابة محمد هي الصحيحة.

أكتب مسألة من واقع الحياة يمكن تمثيلها بمعادلة الخط المستقيم.

الحل يصرف احد طلاب الثالث متوسط في اليوم الواحد 5 الاف دينار اكتب معادله ميل - نقطه لما يصرفه لـ n من الأيام.





شاهد الجزء الاول
من هذا الدرس
على يوتيوب

12



الدرس 4-4 النسب المثلثية

تعلم

وقف مساح على بعد d متر من
بناية، ومن خلال جهازه نظر
اعلى البناية بزاوية معينة.
- كيف تساعده النسب المثلثية في
ايجاد ارتفاع البناية؟

[4-4-1] النسب المثلثية ($\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$)

النسبة المثلثية: هي النسبة التي تقارن بين طولي ضلعين من اضلاع المثلث القائم الزاوية.
النسبة الاساسية هي: الجيب $\sin$ ، الجيب تمام $\cos$ ، الظل $\tan$.

حفظ $\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

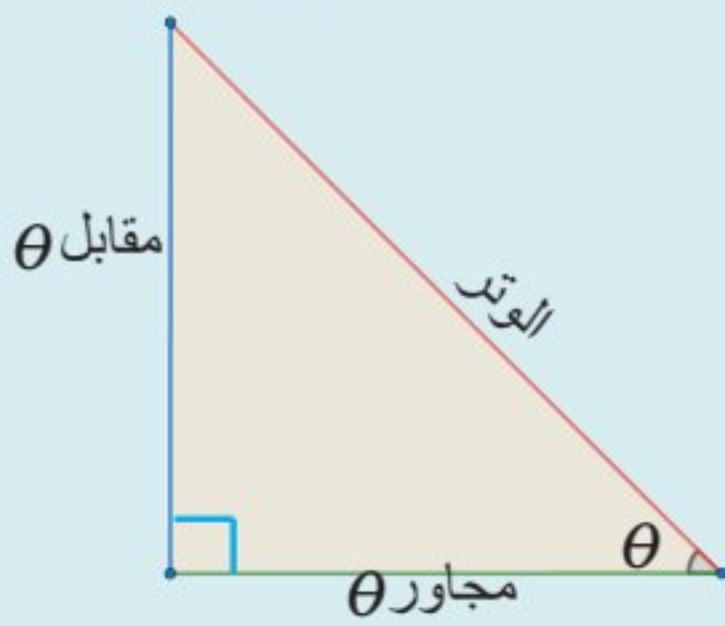
حفظ $\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

حفظ $\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

جيب الزاوية θ (يرمز له $\sin\theta$): هي النسبة بين الضلع المقابل للزاوية θ و الوتر:

جيب تمام الزاوية θ (يرمز له $\cos\theta$): هي النسبة بين الضلع المجاور للزاوية θ والوتر:

ظل الزاوية θ (يرمز له $\tan\theta$): هي النسبة بين الضلع المقابل للزاوية θ والضلع المجاور لها:



حفظ

لإيجاد النسب المثلثية ($\sin, \cos, \tan$) نتبع ما يأتي:

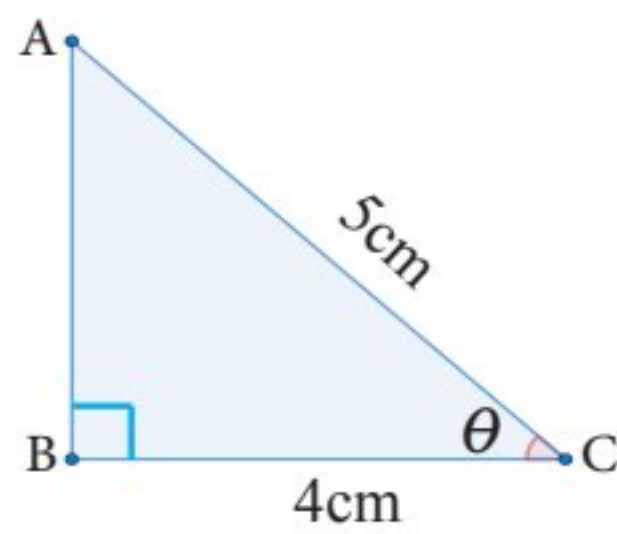
(1) رسم تخطيطي لمثلث قائم الزاوية، وتثبت عليه المعطيات.

(2) نستعمل مبرهنة فيثاغورس لإيجاد الضلع المجهول.

(3) نستعمل النسب المثلثية لإيجاد المطلوب.

مثال (1)

من الشكل المجاور، جد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية θ .



أستعمل مبرهنة فيثاغورس لأجد طول الضلع AB (المقابل)

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

$$(5)^2 = (AB)^2 + (4)^2$$

$$(AB)^2 = 25 - 16 = 9$$

$$AB = 3$$

مبرهنة فيثاغورس

بالتعويض والتبسيط

بجذر الطرفين (إشارة موجبة لأنه طول)

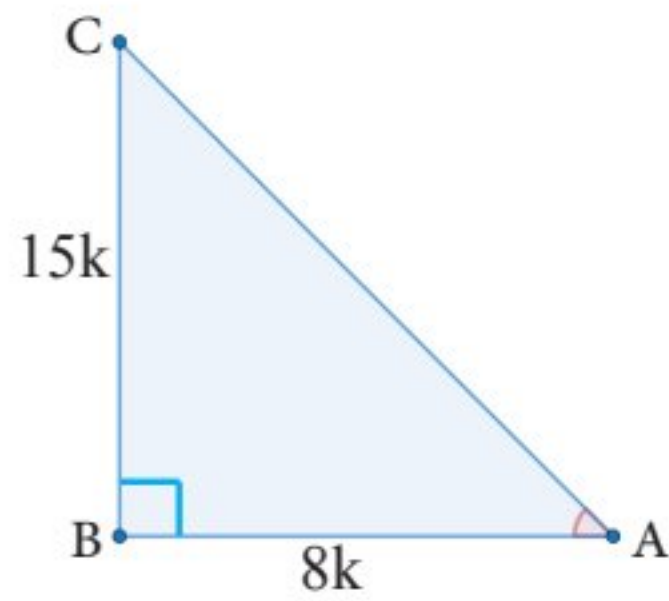
$$\sin\theta = \frac{\text{مقابل الزاوية } \theta}{\text{الوتر}} = \frac{3}{5}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{مجاور الزاوية } \theta}{\text{الوتر}} = \frac{4}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{مقابل الزاوية } \theta}{\text{مجاور الزاوية } \theta} = \frac{3}{4}$$

استعمل النسب المثلثية ثم التعويض

مثال (2) المثلث ABC القائم الزاوية في B اذا كانت $\tan A = \frac{15}{8}$ جد: i) $\sin A$ ii) $\cos A$



$$\left. \begin{aligned} \tan A &= \frac{15k}{8k} \\ \tan A &= \frac{BC}{BA} \end{aligned} \right\}$$

بضرب البسط والمقام في الثابت k حيث k اكبر من 0

قانون الظل

بالمقارنة

مبرهنة فيثاغورس

بالتعويض

بالتبسيط

$$\therefore BC = 15k, AB = 8k$$

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

$$= (8k)^2 + (15k)^2$$

$$= 64k^2 + 225k^2$$

$$(AC)^2 = 289k^2 \Rightarrow \therefore AC = 17k$$

نجد الطرفين

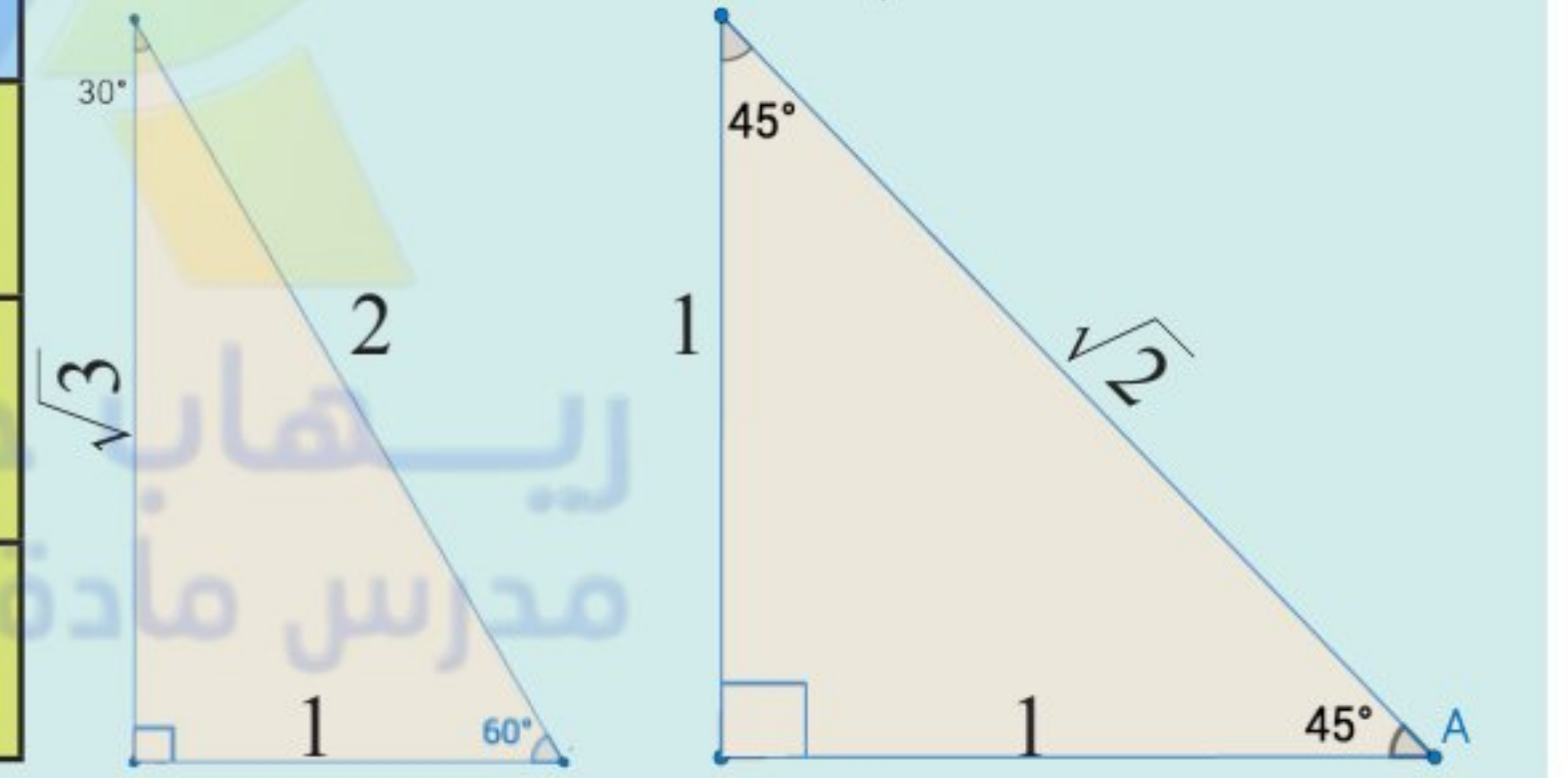
$$i) \sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{15k}{17k} = \frac{15}{17} \quad ii) \cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{8k}{17k} = \frac{8}{17}$$

حفظ

[4-4-2] النسب المثلثية للزوايا الخاصة

النسبة المثلثية	30°	60°	45°	90°	0°
الجيب sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	0
الجيب تمام cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	1
الظل tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	1	غير معرف	0

الجدول المجاور يبين قيم النسب المثلثية للزوايا الخاصة:



شاهد الجزء الثاني
من هذا الدرس
على يوتيوب



13

مثال (3) أثبت ان: $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \sin 30^\circ = \sin 90^\circ$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \sin 90^\circ = 1$$

من الجدول نجد:

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

بالتعويض في الطرف الايمن R.H.S

والطرف الايسر L.H.S

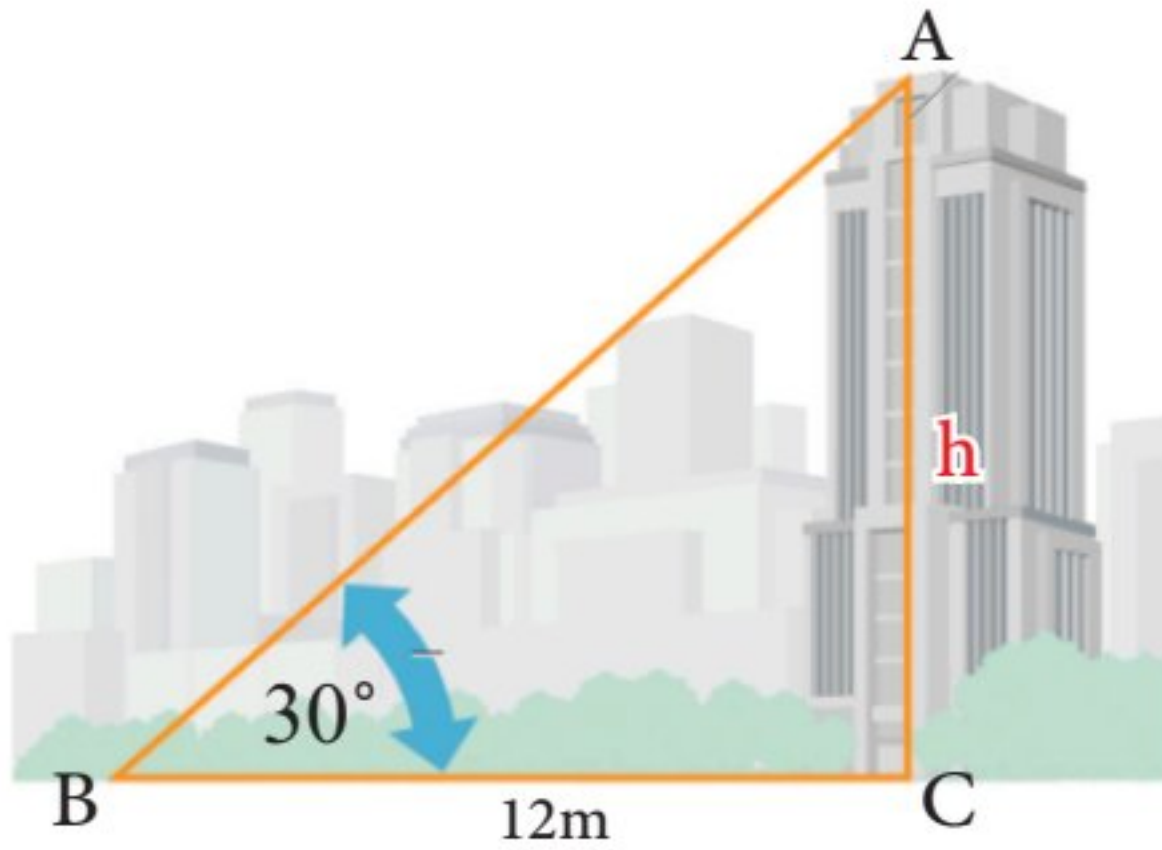
$$\text{L.H.S: } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{R.H.S: } \sin 90^\circ = 1$$

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\text{L.H.S} = \text{R.H.S} \therefore$$

مثال (4) وقف رجل امام بناية وعلى بعد 12m من قاعدتها ونظر الى قمة البناية بزاوية مقدارها 30° . جد ارتفاع البناية.



النسبة المثلثية التي تربط بين ارتفاع البناية h وبعد الرجل عن قاعدتها هي نسبة الظل.

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{12}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{12}$$

$$\sqrt{3}h = 12$$

$$h = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \text{ m}$$

قانون الظل

التعويض

الضرب التبادلي

التبسيط

ارتفاع البناية هو: $4\sqrt{3} \text{ m}$

شاهد الجزء الأخير
من هذا الدرس
على يوتيوب



14

[4-4-3] علاقات النسب المثلثية

سنقتصر في هذا البند على مقلوب النسب المثلثية $\sin, \cos, \tan$ و كما ملاحظ في

الجدول
الآتي:

النسبة المثلثية	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
مقلوبها	$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$ قاطع تمام	$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$ قاطع	$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$ ظل تمام

مثال (5) مثلث قائم الزاوية في B، اذا كانت $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$ فجد: i) $\sec A$ ii) $\csc A$ iii) $\cot A$

$$\cos A = \frac{\sqrt{3}k}{\sqrt{11}k} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = \sqrt{3}k, AC = \sqrt{11}k$$

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

$$(\sqrt{11}k)^2 = (\sqrt{3}k)^2 + (BC)^2$$

$$11k^2 = 3k^2 + (BC)^2$$

$$(BC)^2 = 8k^2$$

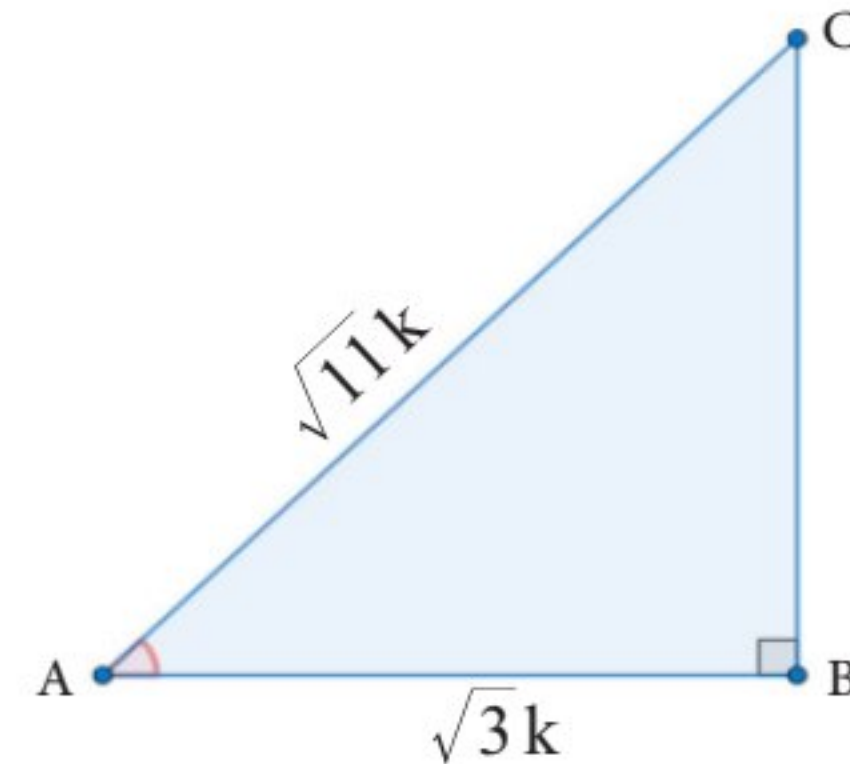
$$\therefore BC = \sqrt{8}k$$

مبرهنة فيثاغورس

بالتعويض

بالتبسيط

نجد الطرفين



$$\text{i) } \cos A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}} \Rightarrow \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{ii) } \sin A = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{11}} \Rightarrow \csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{8}}$$

$$\text{iii) } \tan A = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$$

مقلوب النسب المثلثية الاساسية

جد القيمة العددية للمقدار الآتي: $(\sin 45^\circ)(\sec 45^\circ) - (\tan 60^\circ)(\cot 30^\circ) + 2 \csc 90^\circ$

مثال (6)

$$\left. \begin{aligned} \sin 45^\circ &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \sec 45^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \\ \tan 60^\circ &= \sqrt{3}, \cot 30^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3} \\ \csc 90^\circ &= \frac{1}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned} \right\}$$

من الجداول نجد قيم النسب المثلثية الخاصة ومقلوبات النسب المثلثية الأساسية

$$(\sin 45^\circ)(\sec 45^\circ) - (\tan 60^\circ)(\cot 30^\circ) + 2 \csc 90^\circ$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\sqrt{2}) - (\sqrt{3})(\sqrt{3}) + 2(1) \Rightarrow 1 - 3 + 2 = 0$$

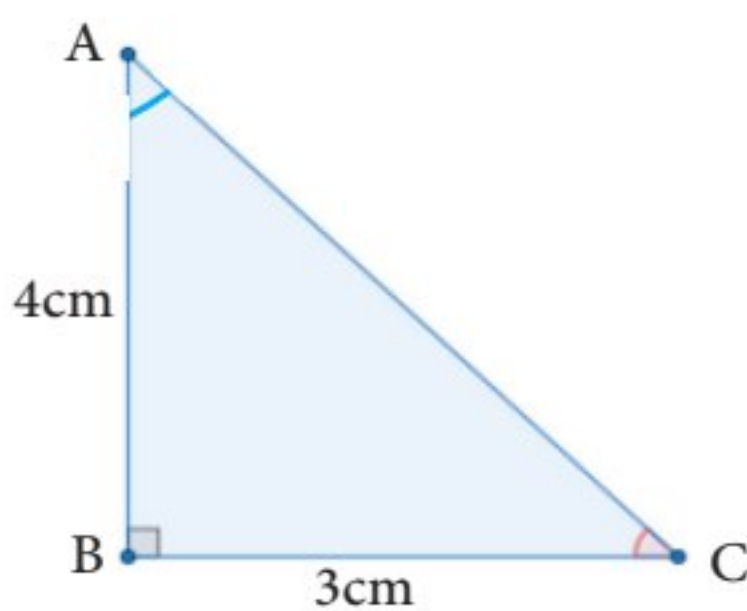
المقدار المعطى بالتعويض والتبسيط

∴ الناتج العددي للمقدار يساوي 0

تأكد من فهمك

1 من الشكل المجاور، جد النسب المثلثية الآتية:

- i) $\sin A$ ii) $\cos C$ iii) $\cot C$ iv) $\sec A$



الحل

مبرهنة فيثاغورس $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

$$(AC)^2 = (4)^2 + (3)^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow AC = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

$$\text{i) } \sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{ii) } \cos C = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{iv) } \cos A = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{4}{5}$$

$$\text{iii) } \tan C = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \cot C = \frac{1}{\tan C} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{5}{4}$$

2 في المثلث ABC القائم الزاوية في B ، اذا كانت $\cot A = \sqrt{3}$ جد :

i) $\tan A$ ii) $\sin A$ iii) $\csc A$ iv) $\sec A$ v) $\cos A$

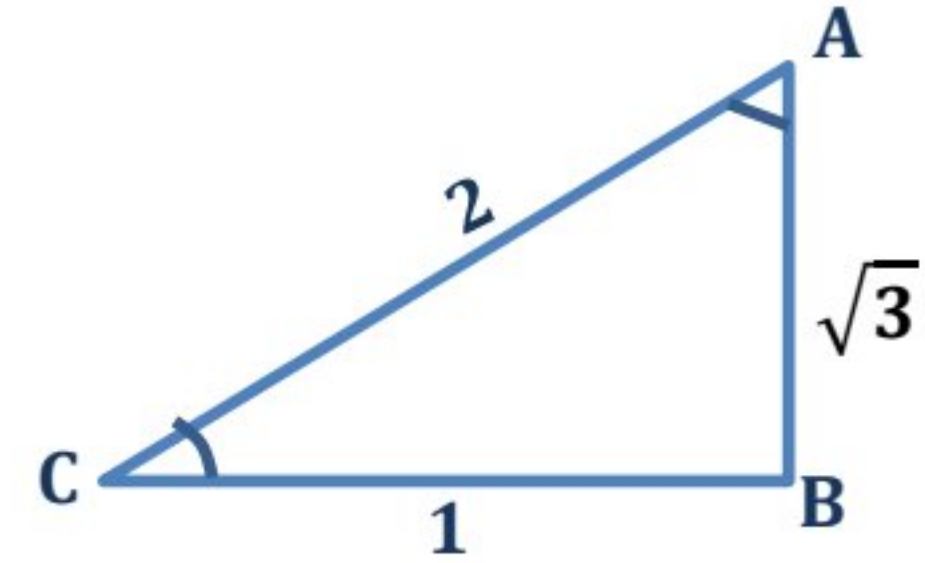
الحل

$$i) \cot A = \frac{1}{\tan A} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{1}{\tan A}$$

$$\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \quad \text{مبرهنة فيثاغورس}$$

$$(AC)^2 = (\sqrt{3})^2 + (1)^2 = 3 + 1 = 4 \Rightarrow AC = \sqrt{4} = 2$$



$$ii) \sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{1}{2} \quad iii) \sin C = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \csc C = \frac{1}{\sin C} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$iv) \cos A = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$v) \cos A = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

3 أثبت ما يأتي:

الحل

$$i) (\cos 30^\circ - \csc 45^\circ)(\sin 60^\circ + \sec 45^\circ) = -\frac{5}{4}$$

من الجدول نجد قيم النسب المثلثية الخاصة :

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \csc 45^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}, \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sec 45^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

$$\text{الطرف الايسر} = (\cos 30^\circ - \csc 45^\circ)(\sin 60^\circ + \sec 45^\circ)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - (\sqrt{2})^2$$

$$= \frac{3}{4} - 2 = \frac{3 - 8}{4} = \frac{-5}{4} \quad \text{الطرف الايمن}$$

$$\text{ii) } 2\sin 30^\circ \sec 30^\circ = \csc 60^\circ$$

الحل

من الجدول نجد قيم النسب المثلثية الخاصة :

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sec 30^\circ = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \csc 60^\circ = \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{الطرف الايسر} = 2 \sin 30^\circ \sec 30^\circ = 2 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{الطرف الأيمن} = \csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \text{الطرف الايسر} = \text{الطرف الأيمن}$$

$$\text{iii) } (\cos 45^\circ - \csc 45^\circ)(\tan 45^\circ)(\csc 90^\circ) = -\cos 45^\circ$$

الحل

$$\text{الطرف الايسر} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{1}\right)(1)(1)$$

$$\text{الطرف الايسر} = \left(\frac{1 - \sqrt{2}(\sqrt{2})}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\text{الطرف الايسر} = \frac{1-2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{الطرف الايسر} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{الطرف الأيمن} = -\cos 45^\circ$$

$$\text{الطرف الأيمن} = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \text{الطرف الأيمن} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{الطرف الأيمن} = \text{الطرف الايسر}$$

$$\text{iv) } \sqrt{\frac{1 - \cos 60^\circ}{2}} = \sin 30^\circ$$

الحل

من الجدول نجد قيم النسب المثلثية الخاصة :

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\sqrt{\frac{1 - \cos 60^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2-1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \quad \text{الطرف الايسر}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{الطرف الأيمن} \Rightarrow \text{الطرف الايسر} = \text{الطرف الأيمن}$$

4 طائرة ورقية ارتفاعها $3\sqrt{3} \text{ m}$ عن سطح الأرض، إذا كان الخيط المتصل بها يصنع زاوية مقدارها 60° مع الأرض. جد طول الخيط.

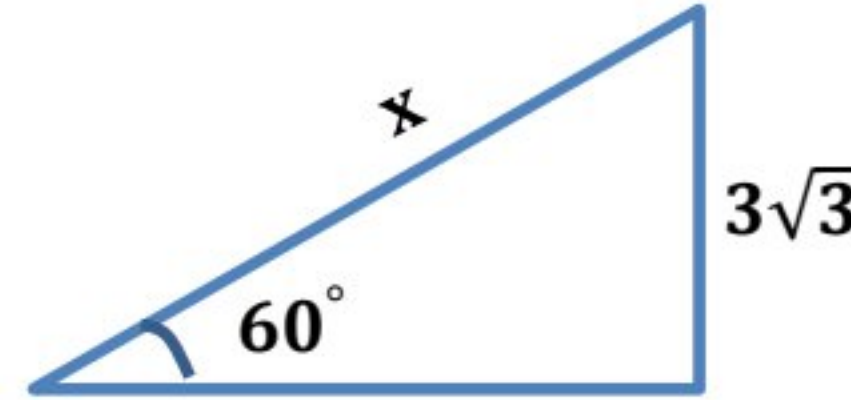
الحل

نفرض طول الخيط x

$$\sin 60^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{x} \Rightarrow \sqrt{3} x = 6\sqrt{3}$$

$$x = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = 6 \text{ طول الخيط}$$

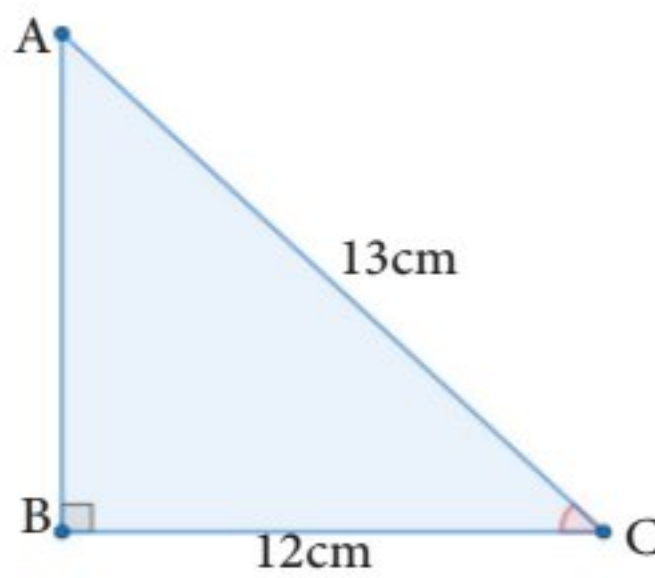


تدرب وحل التمرينات

5 من الشكل المجاور، جد النسب المثلثية الآتية:

i) $\cot A$ ii) $\cot C$ iii) $\sec C$ iv) $\csc A$

الحل



$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

$$(13)^2 = (AB)^2 + (12)^2 \Rightarrow 169 = (AB)^2 + 144$$

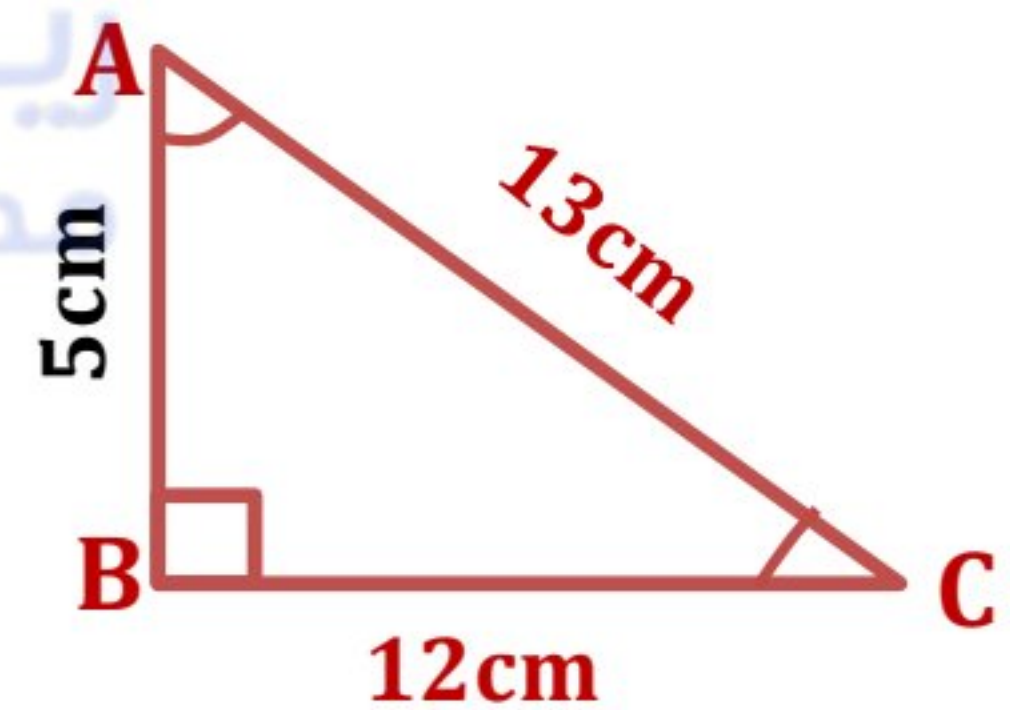
$$(AB)^2 = 169 - 144 = 25 \Rightarrow AB = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

$$i) \tan A = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{12}{5} \Rightarrow \cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{5}{12}$$

$$ii) \tan C = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{5}{12} \Rightarrow \cot C = \frac{1}{\tan C} = \frac{12}{5}$$

$$iii) \cos C = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{12}{13} \Rightarrow \sec C = \frac{1}{\cos C} = \frac{13}{12}$$

$$iv) \sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{12}{13} \Rightarrow \csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{13}{12}$$



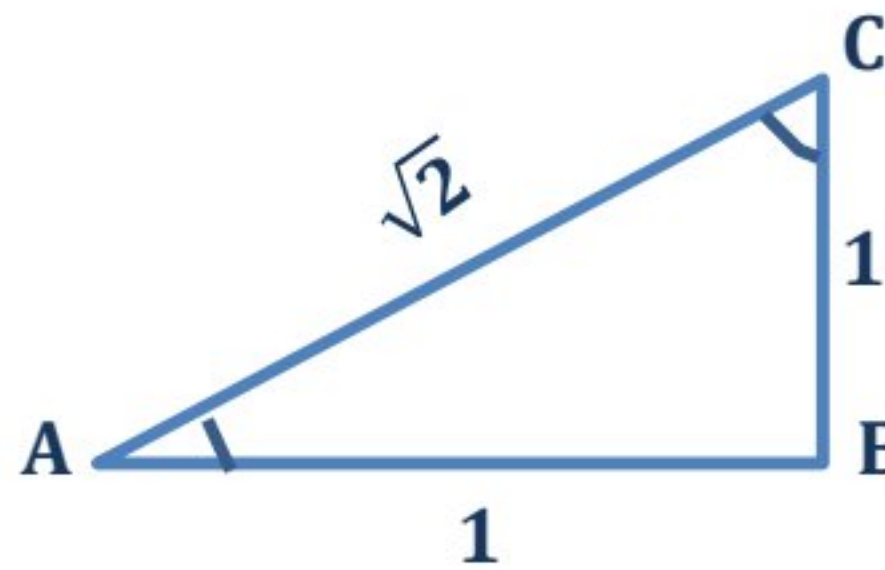
مبرهنة فيثاغورس

6

في المثلث ABC القائم الزاوية في B، إذا كانت $\sec A = \sqrt{2}$ جد:

i) $\sin A$ ii) $\cot C$ iii) $\csc A$ iv) $\cos C$

الحل



$$\sec A = \frac{1}{\cos A} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{1}{\cos A} \Rightarrow \cos A = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \quad \text{مبرهنة فيثاغورس}$$

$$(\sqrt{2})^2 = (1)^2 + (BC)^2 \Rightarrow 2 = 1 + (BC)^2$$

$$(BC)^2 = 2 - 1 = 1 \Rightarrow BC = 1$$

$$i) \sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$ii) \tan C = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \cot C = \frac{1}{\tan C} = \frac{1}{1} = 1$$

$$iii) \sin A = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$iv) \cos C = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

أثبت ما يأتي:

7

$$i) \cos 60^\circ \csc 60^\circ + \sin 60^\circ \sec 60^\circ = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

الحل من الجدول نجد قيم النسب المثلثية الخاصة:

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \csc 60^\circ = \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sec 60^\circ = \frac{1}{\cos 60^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\cos 60^\circ \csc 60^\circ + \sin 60^\circ \sec 60^\circ \quad \text{المقدار}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) (2) = \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \frac{1+3}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \quad \text{الطرف الايمن}$$

ii) $\sin 45^\circ \sec 45^\circ + \csc 45^\circ \sin 45^\circ = 2,$

الحل من الجدول نجد قيم النسب المثلثية الخاصة :

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sec 45^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}, \csc 45^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}, \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\sin 45^\circ \sec 45^\circ + \csc 45^\circ \sin 45^\circ$ المقدار

$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\sqrt{2}) + (\sqrt{2})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + 1 = 2$ الطرف الايمن

تدرب وحل مسائل حياتية

رياضة: عمل جهاز رياضي مائل لتمارين السير بزاوية قدرها 30° ، فإذا كان طرف الجهاز يرتفع 1.5m عن سطح الارض . فما طول حزام الجهاز؟

8



الحل

نرسم مثلث قائم الزوايا ونحدد عليه المعطيات ونضرب طول الحزام اي رمزوليكن **L** الذي يمثل الوتر بالنسبة

للزوايا والمقابل الذي يمثل **1.5m** فتكون النسبة التي تربط بين الوتر والمقابل هي $\sin 30^\circ = \frac{\text{مقابل } 30^\circ}{\text{الوتر}}$

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{مقابل } 30^\circ}{\text{الوتر}} = \frac{1.5m}{L}$$

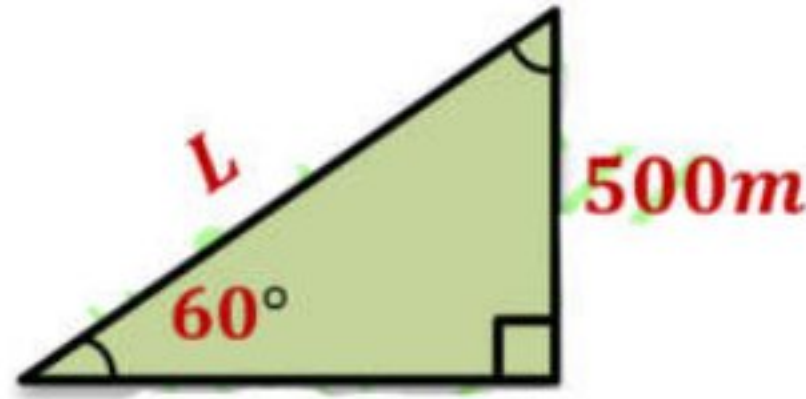
$$\frac{1}{2} = \frac{1.5}{L}$$

$$L = 2(1.5)$$

L = 3m طول حزام الجهاز

9 **تزلج على الجليد:** في موقع للتزلج على احد التلال، كان ارتفاع التلة الرئيسية 500m

وزاوية ميلها عن مستوى الارض 60° . ما طول سطح التزلج؟



الحل

نرسم مثلث قائم الزوايا ونحدد عليه المعطيات ونضرب طول الحزام اي رمز وليكن L الذي يمثل الوتر بالنسبة للزوايا والمقابل الذي يمثل $500m$ فتكون النسبة التي تربط بين الوتر والمقابل هي $\sin 60^\circ =$

مقابل 60°
الوتر

$$\sin 60^\circ = \frac{\text{مقابل } 60^\circ}{\text{الوتر}} = \frac{500}{L}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{500}{L} \Rightarrow \sqrt{3}L = 2(500)$$

$$\sqrt{3}L = 1000 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}L}{\sqrt{3}} = \frac{1000}{\sqrt{3}}$$

$$L = \frac{1000}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow L = \frac{1000\sqrt{3}}{3} \text{ m طول سطح التزلج}$$

10 **سلم اطفاء الحرائق:** سلم اطفاء حريق طوله 20m يرتكز احد طرفيه على بناية والطرف الآخر على ارض افقية بزاوية 45° ، جد ارتفاع نقطة ارتكاز طرف السلم على البناية.



الحل

نرسم مثلث قائم الزوايا ونحدد عليه المعطيات ونضرب ارتفاع البناية اي رمز وليكن h الذي يمثل المقابل بالنسبة للزوايا

والوتر الذي يمثل $20m$ طول السلم فتكون النسبة التي تربط بين الوتر والمقابل هي $\sin 45^\circ = \frac{\text{مقابل } 45^\circ}{\text{الوتر}}$

$$\sin 45^\circ = \frac{\text{مقابل } 45^\circ}{\text{الوتر}} = \frac{h}{20}$$

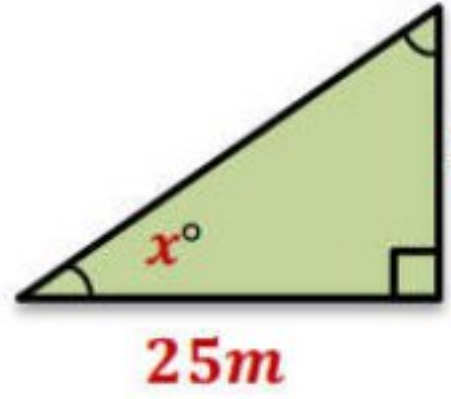
$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{h}{20} \Rightarrow \sqrt{2}h = 20$$

$$h = \frac{20}{\sqrt{2}} \Rightarrow h = \frac{(2)(10)}{\sqrt{2}} \Rightarrow h = \frac{(\sqrt{2} \times \sqrt{2})(10)}{\sqrt{2}}$$

$$h = 10\sqrt{2} \text{ m ارتفاع البناية}$$

11 **حديقة:** وقفت بنان على بعد 25m من قاعدة شجرة ارتفاعها 25m. فما قياس الزاوية التي تشكلها مع قمة الشجرة؟

الحل



نرسم مثلث قائم الزوايا ونحدد عليه المعطيات ونفرض طول الحزام أي رمزوليكن X $25m$ ثم نحدد المقابل $25m$ الذي يمثل طول الشجرة والمجاور $25m$ الذي يمثل بعد الشجرة

$$\tan X^\circ = \frac{\text{مقابل } X^\circ}{\text{المجاور}} = \frac{25}{25} \Rightarrow \tan x^\circ = \frac{25}{25}$$

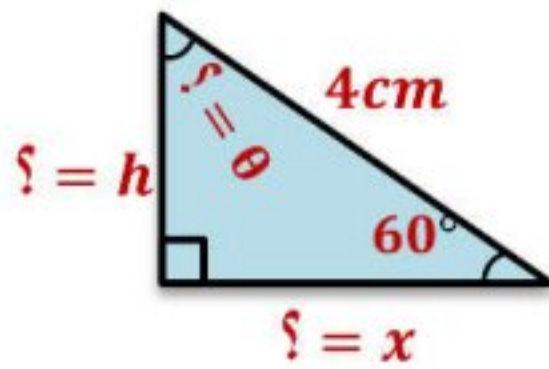
$$\tan x^\circ = 1$$

$$\therefore x^\circ = 45^\circ$$

فكر

12 **تحد:** في الشكل المجاور، جد القيم المؤشرة (?) باستعمال النسب المثلثية.

الحل



$$\sin 60^\circ = \frac{\text{مقابل } 60^\circ}{\text{الوتر}} = \frac{h}{4}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{4} \Rightarrow [2h = 4\sqrt{3}] \div 2$$

$$h = 2\sqrt{3}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\text{مجاور } 60^\circ}{\text{الوتر}} = \frac{x}{4}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{4} \Rightarrow [2x = 4] \div 2$$

$$x = 2$$

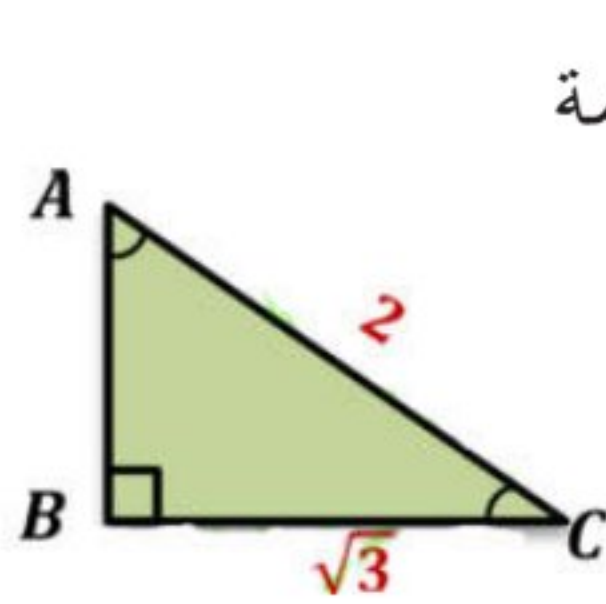
$$\sin \theta = \frac{\text{مقابل } \theta}{\text{الوتر}} = \frac{2}{4}$$

$$\sin \theta = \frac{2}{4} \xrightarrow{\text{نختصر}} \sin \theta = \frac{1}{2} \therefore \theta = 30^\circ$$

نجد مقابل الزاوية 60° لان الوتر معلوم يساوي $4cm$ فتكون النسبة المثلثية

نجد مجاور الزاوية 60° لان الوتر معلوم يساوي $4cm$ فتكون النسبة المثلثية

نجد الزاوية θ لان الوتر معلوم يساوي $4cm$ والمقابل وجدناه 2 فتكون النسبة المثلثية



مسألة مفتوحة: 13 مثلث قائم الزاوية في B، $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ كيف تجد قيمة الزاوية C؟

الحل

نرسم المثلث ثم نحدد الحرف B على الزاوية القائمة من خلال المعطيات $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\text{مقابل A}}{\text{الوتر}}$ نحدد مقابل A والوتر.

الطريقة الأولى: من خلال المعطيات المثلث المجاور C يساوي $\sqrt{3}$ والوتر يساوي 2 فتكون النسبة: $\cos C = \frac{\text{مجاور C}}{\text{الوتر}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore C = 30^\circ$$

الطريقة الثانية: من خلال المعطيات $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ من الجدول الخاص بقياس الزاوية $A = 60^\circ$ ومن خلال مجموع زوايا المثلث تساوي:

$$180^\circ = A + B + C \Rightarrow 180^\circ$$

$$180^\circ = 60^\circ + 90^\circ + C \Rightarrow 180^\circ = 150^\circ + C$$

$$C = 180^\circ - 150^\circ \Rightarrow C = 30^\circ$$

تبرير: 14 اذا كان جيب زاوية وجيب تمامها متساويين في مثلث قائم الزاوية. ما نوع المثلث من حيث اطوال اضلاعه؟

الحل

هذا يدل على انه في المقابل يساوي المجاور اذا الضلعين متساويين كيف يكون المثلث نوعه متساوي الساقين

$$\sin = \cos \Rightarrow \frac{\text{مقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{مجاور}}{\text{الوتر}}$$

أكتب مسألة تستعمل فيها نسبة الجيب لايجاد طول ضلع مجهول في مثلث قائم الزاوية. ثم حلها.

الحل

سبق وتطرقنا الى هذه المسائل في سياق شرح الدرس راجع تمرين رقم 4 تأكد من فهمك

اختبار الفصل

1 مثل المعادلات التالية في المستوى الإحداثي

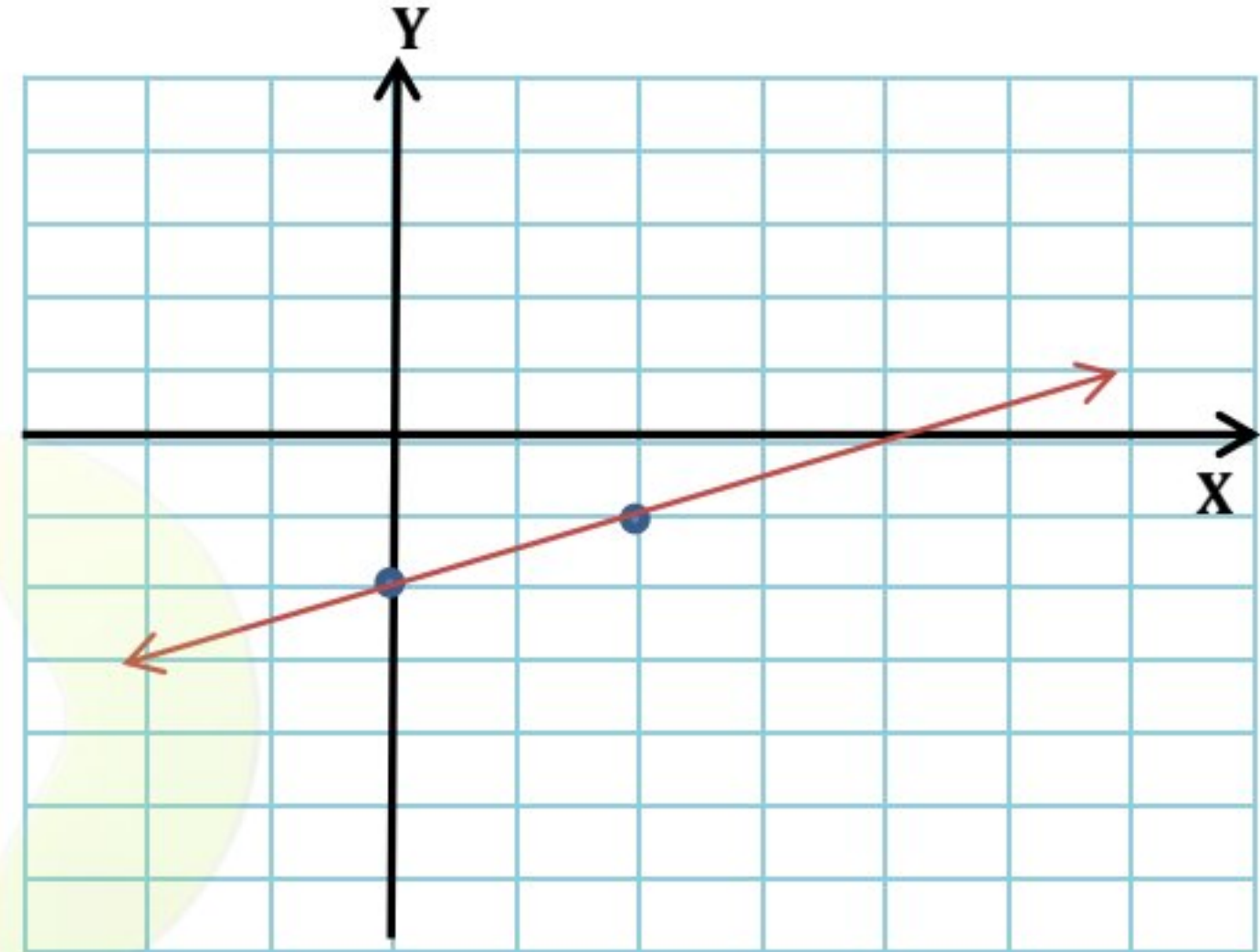
i) $2x - 4y = 8$

الحل

$4y = 2x - 8 \} \div 4$

$y = \frac{2}{4}x - 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 2$

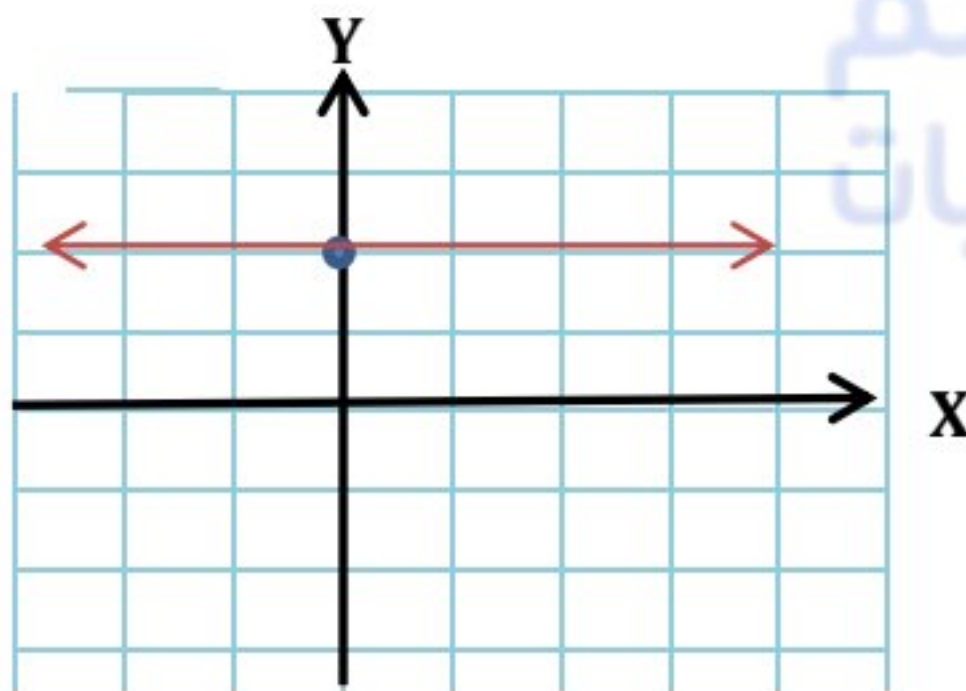
x	$y = \frac{1}{2}x - 2$	(x, y)
0	$\frac{1}{2}(0) - 2 = 0 - 2 = -2$	(0, -2)
2	$\frac{1}{2}(2) - 2 = 1 - 2 = -1$	(2, -1)



المستقيم يقطع محور السينات والصادات ولا يمر بنقطة الاصل

ii) $y = 2$

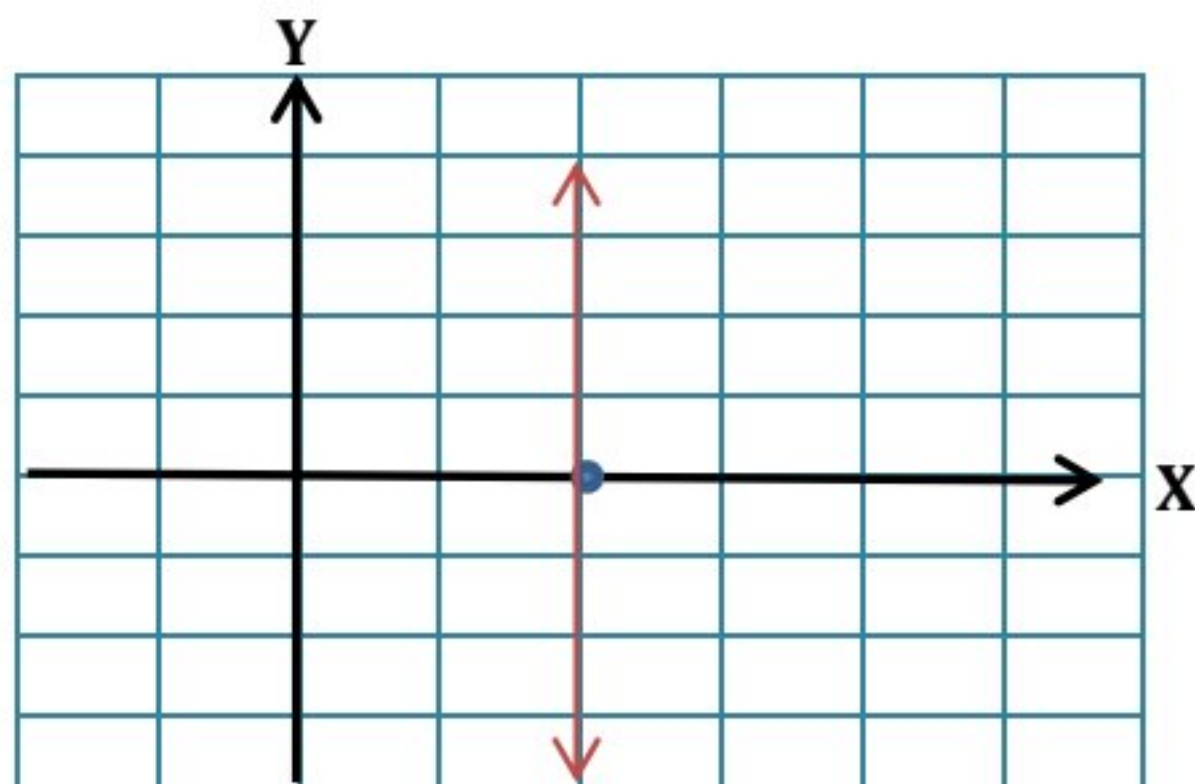
الحل



المستقيم يوازي محور السينات وعمودي على محور الصادات عن (0, 2)

iii) $x = 2$

الحل

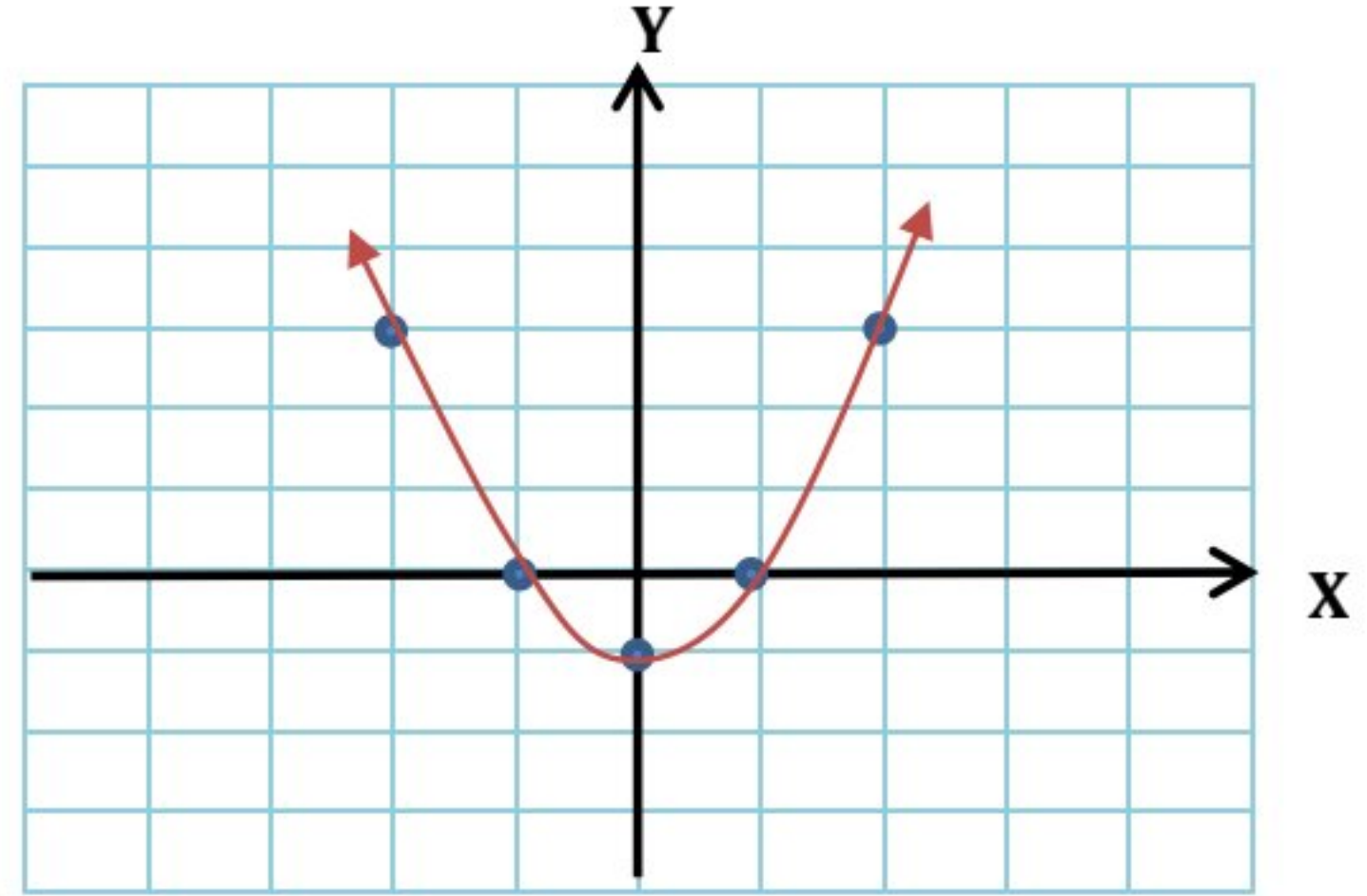


المستقيم يوازي محور الصادات وعمودي على محور السينات عند (2, 0)

الحل

iv) $y = x^2 - 1$

x	$y = x^2 - 1$	(x, y)
0	$(0)^2 - 1 = 0 - 1 = -1$	(0, -1)
1	$(1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$	(1, 0)
2	$(2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$	(2, 3)
-1	$(-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$	(-1, 0)
-2	$(-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$	(-2, 3)



2 جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين: $A(-2, -3), B(2, 3)$
(x_1, y_1), (x_2, y_2)

الحل

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - (-3)}{x - (-2)} = \frac{3 - (-3)}{2 - (-2)} \Rightarrow \frac{y + 3}{x + 2} = \frac{6}{4} \Rightarrow \frac{y + 3}{x + 2} = \frac{3}{2}$$

$$3x + 6 = 2y + 6 \Rightarrow 3x - 2y = 6 - 6 \Rightarrow 3x - 2y = 0$$

3 جد المقطع السيني والصادي للمعادلة الآتية: $y - x = 4$

الحل

المقطع السيني	المقطع الصادي
المعادلة $y - x = 4$	المعادلة $y - x = 4$
$y = 0 \Rightarrow 0 - x = 4$	$x = 0 \Rightarrow y - 0 = 4$
$-x = 4 \Rightarrow x = -4$	$y = 4$
∴ نقطة التقاطع هي: $(-4, 0)$	∴ نقطة التقاطع هي: $(0, 4)$

4 جد معادلة المستقيم لكل مما يأتي:

الحل

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

(i) يمر بالنقطتين: $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$
 $(3, -2), (1, 5)$

$$\frac{y - (-2)}{x - 3} = \frac{5 - (-2)}{1 - 3} \Rightarrow \frac{y + 2}{x - 3} = \frac{7}{-2}$$

الطرفين في الوسطين

$$7x - 21 = -2y - 4 \Rightarrow 7x + 2y = -4 + 21 \Rightarrow 7x + 2y = 17$$

معادلة المستقيم

(ii) ميله $\frac{3}{2}$ ومقطعه الصادي يساوي (-5)

$$m = \frac{3}{2}, \quad y = -5 \Rightarrow (x_1, y_1) = (0, -5)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{بالتعويض الميل - النقطة}$$

$$y - (-5) = \frac{3}{2}(x - 0) \Rightarrow y + 5 = \frac{3}{2}x \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 5$$

معادلة المستقيم

(iii) ميله $-\frac{1}{5}$ ومقطعه السيني يساوي (3)

$$m = -\frac{1}{5}, \quad x = 3 \Rightarrow (x_1, y_1) = (3, 0)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{بالتعويض الميل - النقطة}$$

$$y - 0 = -\frac{1}{5}(x - 3) \Rightarrow y = -\frac{1}{5}(x - 3) \Rightarrow 5y = -x + 3 \Rightarrow x + 5y = 3$$

معادلة المستقيم

5 استعمل معادلة الميل والنقطة لتحديد ميل المستقيم واحدى نقاطه $2y - 3x = 8$

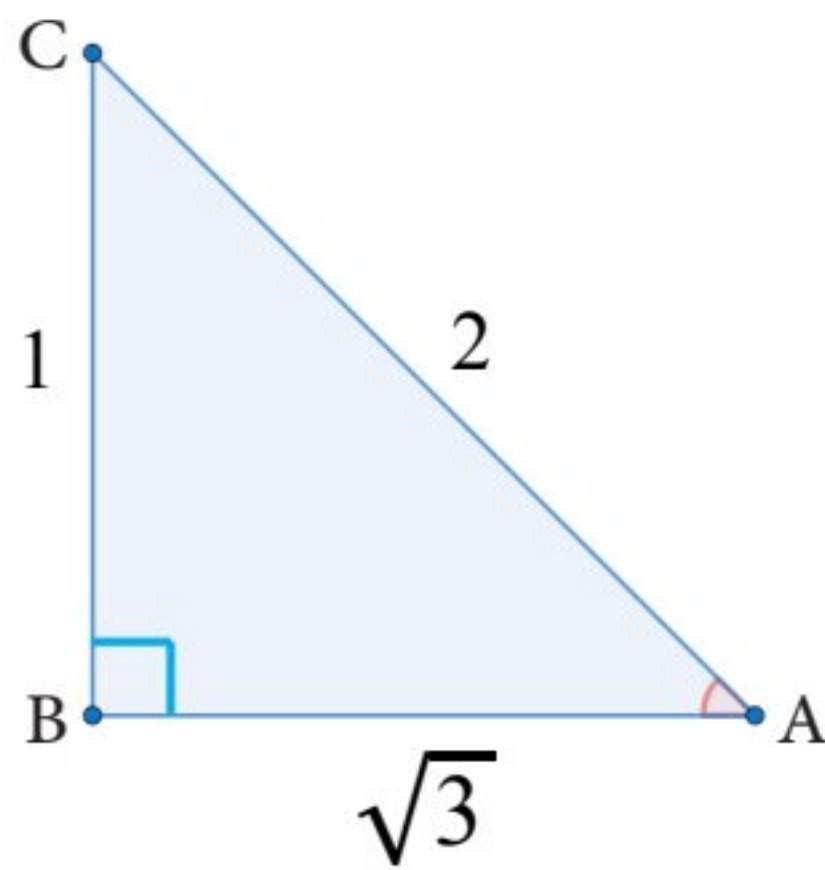
الحل

$$2y - 8 = 3x \quad \} \div 2 \Rightarrow y - 4 = \frac{3}{2}x$$

$$y - 4 = \frac{3}{2}(x - 0)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow m = \frac{3}{2}, \quad (x_1, y_1) = (0, 4)$$

6 في المثلث ABC القائم الزاوية في B، اذا كانت $\sin A = \frac{1}{2}$ جد:
i) $\cos A$ ii) $\tan A$ iii) $\cot C$ iv) $\sec A$



$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

$$(2)^2 = (AB)^2 + (1)^2$$

$$4 = (AB)^2 + 1$$

$$(AB)^2 = 4 - 1$$

$$(AB)^2 = 3$$

$$AB = \sqrt{3}$$

نجد الطرفين

مبرهنة فيثاغورس

بالتعويض

بالتبسيط

$$i) \cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$ii) \tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$iii) \cot C = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$iv) \sec A = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

إختبروا مستواكم في وزاريات الفصل الرابع

السؤال 1

مثل المعادلة الآتية في المستوى الإحداثي $y = x^2 - 1$

السؤال 2

جد قيمة a التي تجعل ميل المستقيم المار بالنقطتين $(6, a)$, $(3, 2)$ يساوي $\left(-\frac{1}{4}\right)$

السؤال 3

المستقيم الموازي لمحور السينات يكون ميله

أ- موجب ب- سالب ج- غير معرف د- صفر

السؤال 4

مستقيم يمر بالنقطة $(-1, 5)$ وميله $\left(-\frac{2}{5}\right)$ جد معادلته

السؤال 5

جد معادله المستقيم الذي ميله $\left(\frac{1}{2}\right)$ ومقطعه السيني (-1)

السؤال 6

جد القيمة $\sin 60^\circ \cos 30^\circ - 2 \cos 45^\circ \sin 45^\circ$

السؤال 7

في المثلث ABC القائم الزاوية في B حيث $AB = 6\text{cm}$, $BC = 4\text{cm}$ جد $\sin C$, $\cos C$, $\tan C$

السؤال 8

أثبت ان $\sin^2 60 - \cos^2 60 = \sin 30$

السؤال 9 جد قيمة $\sqrt{3}\sin 60^\circ \cdot \cos 60^\circ - \sin 30^\circ \cdot \tan 45^\circ$

السؤال 10 أثبت ان $2\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ = \sin 60^\circ \cdot \tan 45^\circ$

السؤال 11 هل ان $\sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \cdot \cos 60^\circ = \sin 60^\circ \cdot \tan 45^\circ$

السؤال 12 جد قيمة $4\sin 60^\circ \cdot \cos 60^\circ + 2\sin 30^\circ \cdot \tan 45^\circ$

السؤال 13 جد قيمة $\sin^2 45^\circ + \cos 60^\circ + \tan 45^\circ$

السؤال 14 بين صحة او خطأ ما يأتي $2\sin 30^\circ + \tan 45^\circ + 1 = 3$

السؤال 15 جد ناتج: $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ + \sqrt{3}\tan 60^\circ$

السؤال 16 أثبت ان $\sin 30^\circ + \cos^2 45^\circ - \cos 60^\circ = \sin^2 45^\circ$

السؤال 17 جد ناتج: $(\sin^2 30^\circ + \sin^2 60^\circ)^2$

السؤال 18 اثبت ان $\sqrt{\frac{1 - \sin 30^\circ}{2}} + \cos 60^\circ = \tan 45^\circ$

السؤال 19 جد ناتج : $3\sin 30^\circ + \sin^2 60^\circ$

السؤال 20 جد القيمة العددية للمقدار $\sin 30^\circ \cos 30^\circ$

السؤال 21 اثبت ان $\cos 60^\circ \csc 60^\circ + \sin 60^\circ \sec 60^\circ = \frac{4}{\sqrt{3}}$

السؤال 22 جد القيمة العددية للمقدار $(\sec 60^\circ)^2 - (\tan 60^\circ)^2$

السؤال 23 $\sqrt{\frac{1 - \cos 60^\circ}{2}} = \sin 30^\circ$

السؤال 24 اثبت ان $\sin 45^\circ \sec 45^\circ + \csc 45^\circ \sin 45^\circ = 2$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

الفصل الخامس : الهندسة والقياس

جدول مراجعة لبعض قوانين (المحيط والمساحة والمساحة الجانبية والكلية و الحجم للأشكال المجسمة) للأشكال الهندسية التي درستها سابقاً

اسم الشكل	رسم الشكل	المحيط	المساحة
المستطيل		$P = 2(a + b)$ او مجموع أضلاعه الأربعة	$A = a \times b$ او الطول $\times$ العرض
المربع		$P = 4 \times L$ او مجموع أضلاعه الأربعة	$A = L \times L = L^2$ او طول الضلع $\times$ نفسه
المثلث القائم		$P = h + H + l$ او مجموع أضلاعه الثلاثة	$A = \frac{1}{2}(H \times h)$ او نصف القاعدة $\times$ الارتفاع
المثلث متساوي الاضلاع		$P = L + L + L$ او مجموع أضلاعه الثلاثة	$A = \frac{\sqrt{3}}{4}(L)^2$ او مربع الضلع $\times \frac{\sqrt{3}}{4}$
شبة المنحرف		$P = a + b + c + d$ او مجموع أضلاعه الأربعة	$A = \frac{1}{2}(a + b) \times h$ او نصف القاعدتين $\times$ الارتفاع
المعين		$P = 4 \times L$ او مجموع أضلاعه الأربعة	$A = L \times h$ او طول الضلع $\times$ الارتفاع
الدائرة		$P = 2r\pi$ او $2 \times$ نصف القطر $\times$ النسبة الثابتة	$A = r^2\pi$ او مربع نصف القطر $\times$ النسبة الثابتة

اسم الشكل	رسم الشكل	المساحة الجانبية	المساحة الكلية	الحجم
الاسطوانة		$L.A = 2r\pi \times h$ او محيط القاعدة $\times$ الارتفاع	$T.A = 2r\pi \times h + 2r^2\pi$ او المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين	$V = r^2\pi \times h$ او مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع

انتباه :

المحيط واطوال الاضلاع وحدة قياس واحدة $m, cm, \dots$ // المساحات وحدتين قياس $m^2, cm^2, \dots$ الحجوم ثلاث وحدات قياس $m^3, cm^3, \dots$



شاهد هذا الدرس
على يوتيوب

الدرس (5-1) المضلعات والمجسمات (الهرم والمخروط)

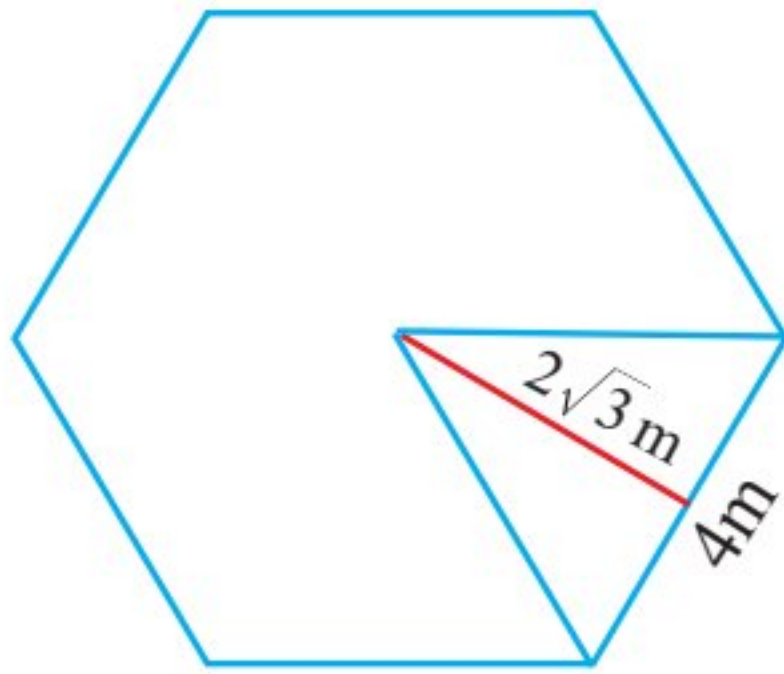
[5-1-1] المضلعات المنتظمة

	$P = n \times L$	محيط المضلع المنتظم = عدد الاضلاع مضروباً في طول الضلع.
	$A = \frac{1}{2} L \times H \times n$	مساحة المضلع المنتظم = مساحة المثلث الذي رأسه مركز المضلع وقاعدته ضلع المضلع $\times$ عدد اضلاعه.

إذا عرفت ان طول الضلع L و العامد H (هو العمود النازل من مركز المضلع على احد اضلاع المضلع).
يمكن حساب مساحة المثلث كما يأتي: مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع (العامد)، $A = \frac{1}{2} L \times H$

مثال (1)

جد محيط ومساحة الشكل السداسي المنتظم، طول ضلعه $4m$ وطول العامد $2\sqrt{3}m$



$$P = n \times L$$

$$P = 6 \times 4 = 24m$$

$$A = \frac{1}{2} L \times H \times n$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} \times 6 = 24\sqrt{3}m^2$$

باستعمال قانون محيط المضلع

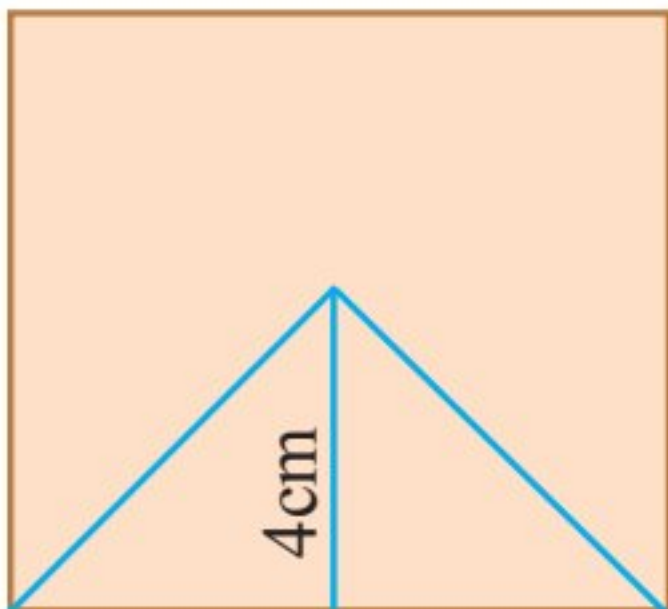
محيط المضلع

باستعمال قانون مساحة المضلع

بالتعويض والتبسيط

مثال (2)

جد مساحة المربع الذي طول العامد فيه $4cm$.



$$A = \frac{1}{2} L \times H \times n$$

$$L = 4 \times 2 = 8cm$$

$$A = \frac{1}{2} \times 8 \times 4 \times 4 = 64cm^2$$

$$A = L \times L$$

$$A = 8 \times 8 = 64cm^2$$

طريقة (1): باستعمال قانون مساحة المضلع المنتظم
طول ضلع المربع يساوي ضعف طول العامد

طريقة (2): باستعمال قانون مساحة المربع
(طول الضلع $\times$ نفسه)

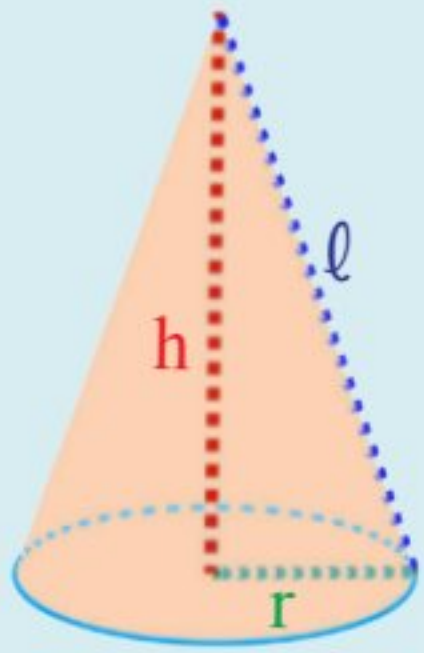


شاهد هذا الدرس
على يوتيوب

2

[5-1-2] الهرم والمخروط

المخروط: هو مجسم له قاعدة واحدة فقط عبارة عن دائرة وله رأس واحد.



$l =$ الارتفاع الجانبي (مولد المخروط)

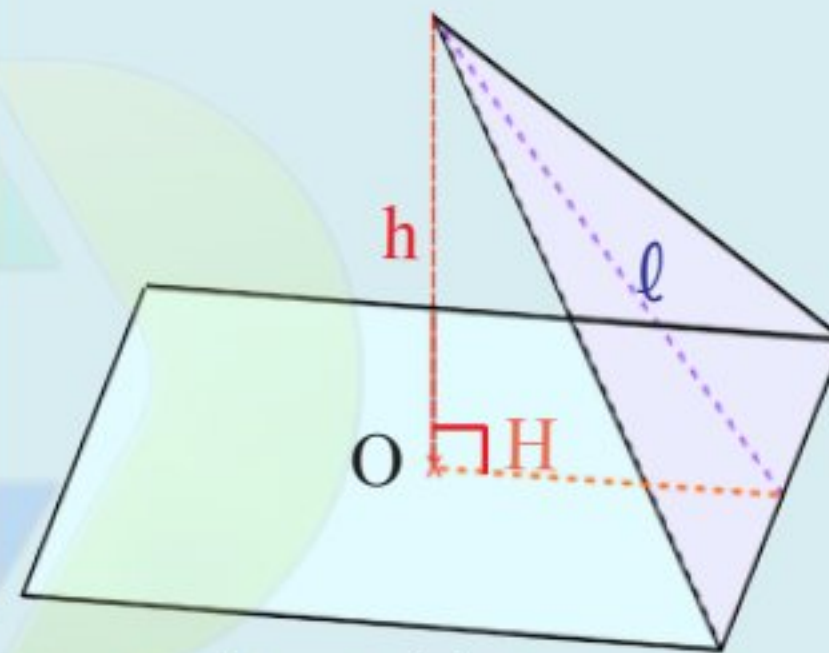
$h =$ الارتفاع

$r =$ نصف القطر

$$l^2 = h^2 + r^2$$

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة.

الهرم: هو مجسم له في الاقل ثلاثة اوجه مثلثة الشكل وله قاعدة واحدة تعبر عن شكل مضلع (شكل القاعدة يحدد اسم الهرم).



$h =$ الارتفاع

$H =$ العا

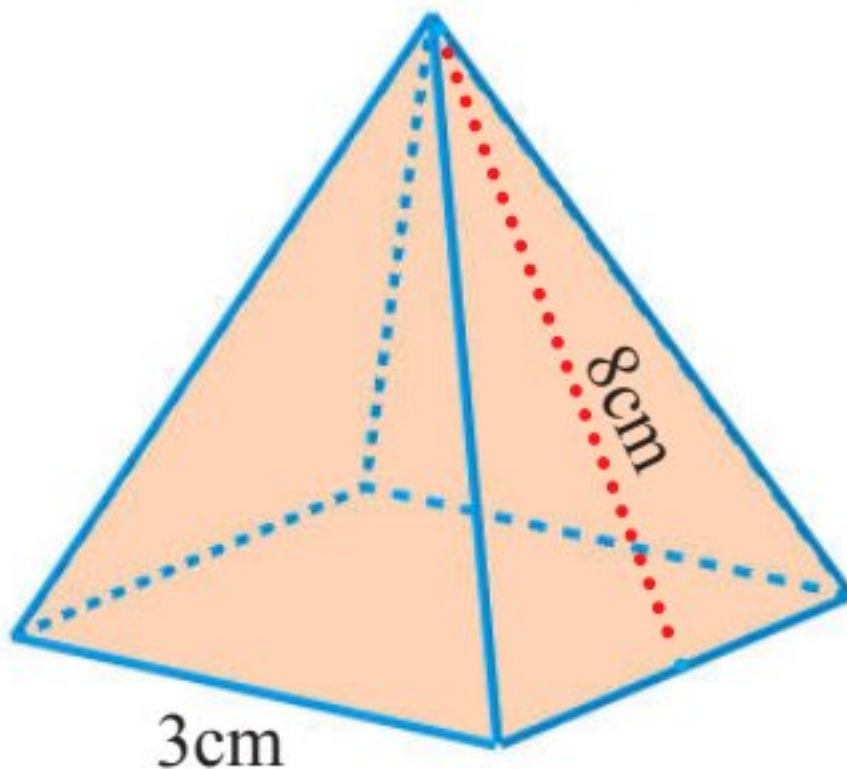
$l =$ الارتفاع الجانبي

$$l^2 = h^2 + H^2$$

قانون الحجم في الهرم والمخروط		قانون المساحة للهرم المنتظم والمخروط الدائري القائم		
المخروط القائم	الهرم المنتظم	المساحة الجانبية	المساحة الكلية	
$V = \frac{1}{3} b \times h$	حجم الهرم	$LA = \frac{1}{2} p \times l$ محيط القاعدة p	$TA = \frac{1}{2} p \times l + b$ مساحة القاعدة b	
$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \times h$	حجم المخروط	$LA = \pi r \times l$	$TA = \pi r \times l + \pi r^2$	

مثال (3)

جد المساحة الجانبية والمساحة الكلية لهرم منتظم ارتفاعه الجانبي 8cm وقاعدته مربعة طول ضلعها 3cm .



$$LA = \frac{1}{2} p \times l$$

$$LA = \frac{1}{2} \times 12 \times 8$$

$$LA = 48cm^2$$

$$TA = \frac{1}{2} p \times l + b$$

$$TA = 48 + 9 = 57cm^2$$

$$TA = 57cm^2$$

المساحة الجانبية

محيط القاعدة = محيط المربع = 4×3

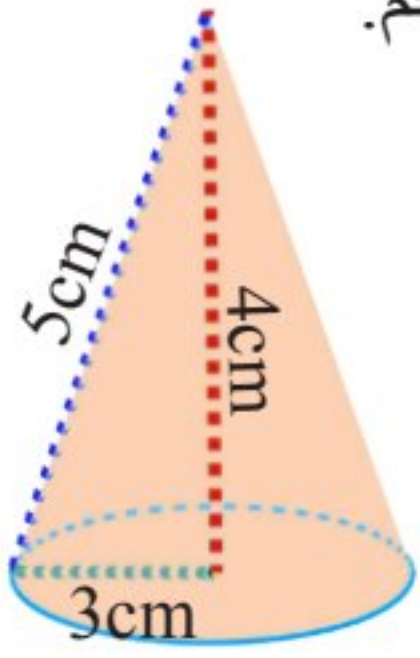
المساحة الكلية

مساحة القاعدة = مساحة المربع = 3×3

المساحة الكلية

مثال (4)

استخدم الشكل المجاور لإيجاد: (i) المساحة الجانبية (ii) المساحة الكلية (iii) الحجم.



$$i) LA = \pi r \times \ell$$

$$= \pi \times 3 \times 5 = 15\pi \text{ cm}^2$$

$$ii) TA = \pi r \times \ell + \pi r^2$$

$$= 15\pi + 9\pi = 24\pi \text{ cm}^2$$

$$iii) V = \frac{1}{3} \pi r^2 \times h$$

$$= \frac{1}{3} \times \pi \times 9 \times 4 = 12\pi \text{ cm}^3$$

المساحة الجانبية للمخروط

بالتعويض والتبسيط

المساحة الكلية للمخروط

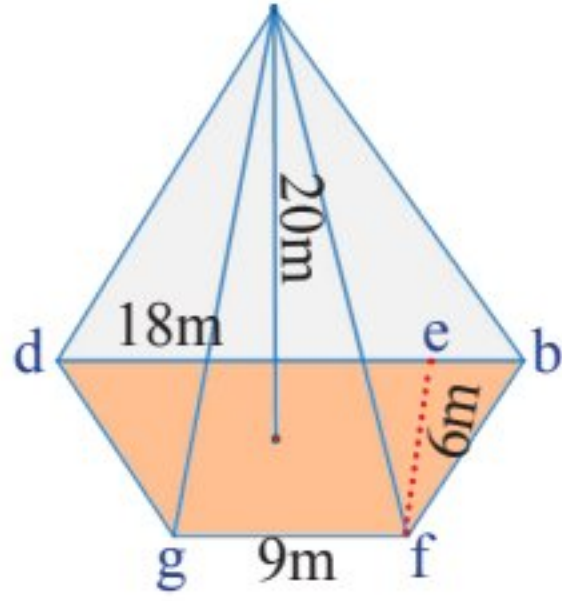
بالتعويض والتبسيط

حجم المخروط

بالتعويض والتبسيط

مثال (5)

جد حجم الهرم المجاور.



$$b = \frac{1}{2} (gf + bd) \times fe = \frac{1}{2} (9 + 18) \times 6 = 81 \text{ m}^2$$

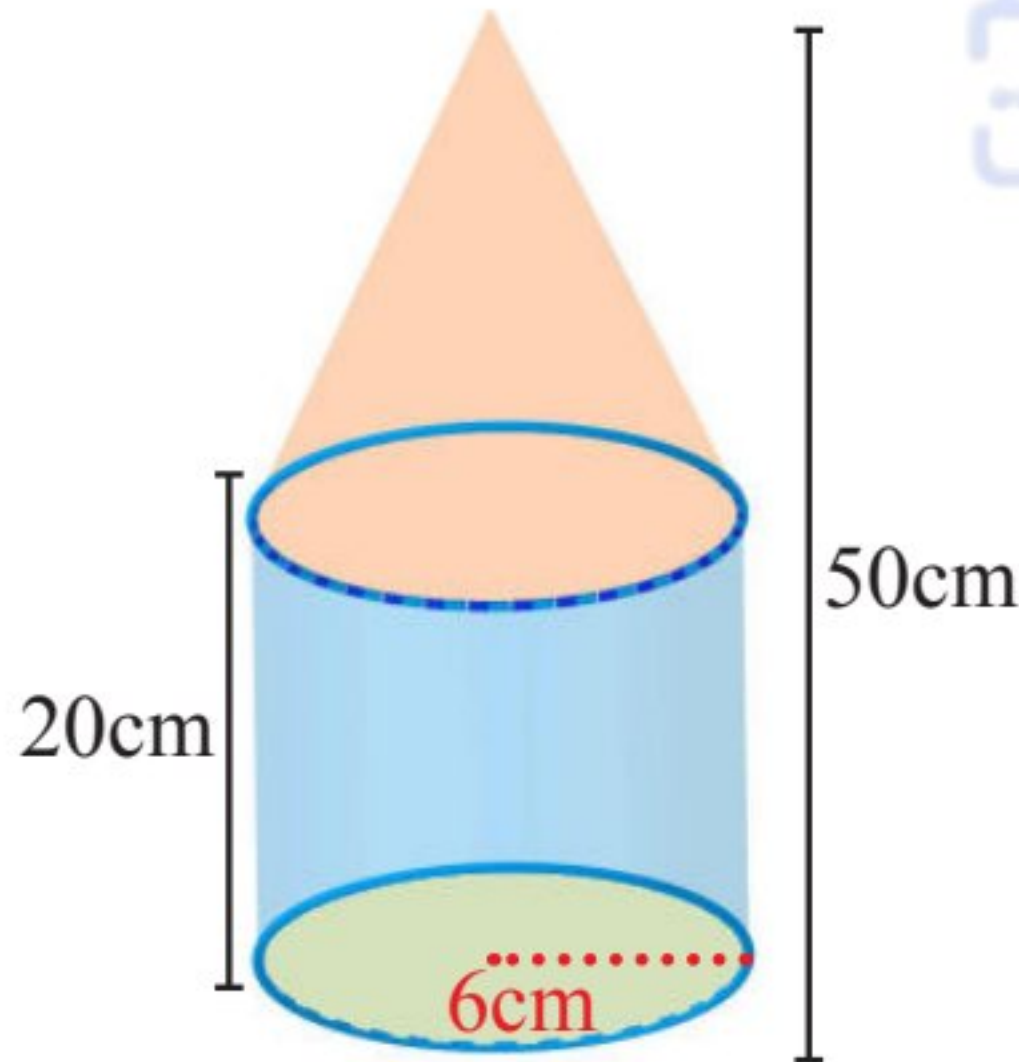
$$V = \frac{1}{3} b \times h = \frac{1}{3} \times 81 \times 20 = 540 \text{ m}^3$$

مساحة شبه المنحرف

حجم الهرم

مثال (6)

جد حجم الجسم المركب المجاور.



لايجاد حجم الجسم المركب نجد اولاً حجم الاسطوانة وحجم المخروط وبعد ذلك نجمع الحجم لنجد حجم الجسم المركب.

$$V_1 = \pi r^2 h \Rightarrow V_1 = 36\pi \times 20$$

$$V_1 = 720\pi \text{ cm}^3$$

$$V_2 = \frac{1}{3} r^2 \pi \times h$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \times 36\pi \times 30 = 360\pi \text{ cm}^3$$

$$V = V_1 + V_2$$

$$V = 720\pi + 360\pi = 1080\pi \text{ cm}^3$$

قانون حجم الاسطوانة

بالتعويض والتبسيط

قانون حجم المخروط

بالتعويض والتبسيط

حجم الجسم المركب

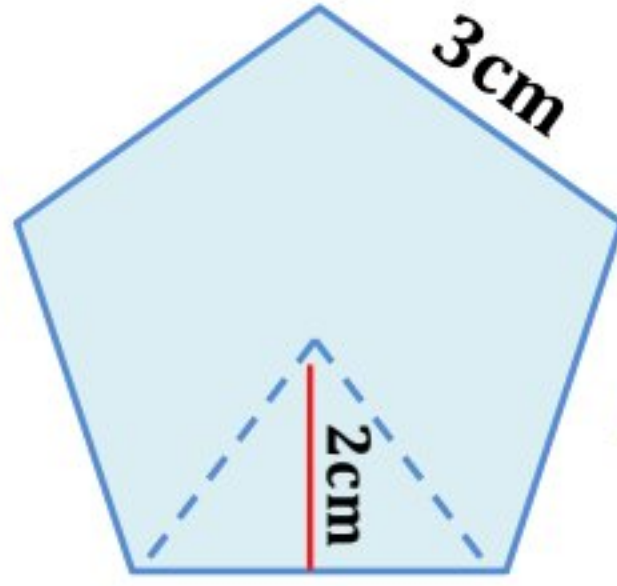
تأكّد من فهمك

جد محيط ومساحة كل مضلع منتظم:

$n = 5\text{cm}, L = 3\text{cm}, H = 2\text{cm}$

الحل:

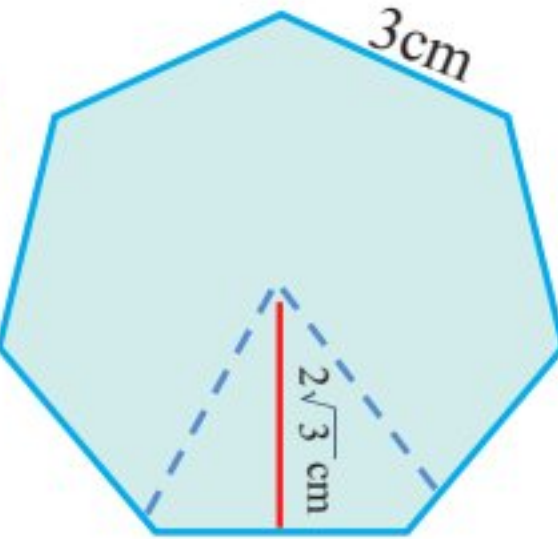
1



المحيط $P = n \times L = 5 \times 3 = 15\text{cm}^2$

المساحة $A = \frac{1}{2} L \times H \times n = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \times 5 = 15\text{cm}^2$

2



المحيط $P = n \times L = 7 \times 3 = 21\text{cm}^2$

المساحة $A = \frac{1}{2} L \times H \times n = \frac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{3} \times 7 = 21\sqrt{3}\text{cm}^2$

$n = 7\text{cm}, L = 3\text{cm}, H = 2\sqrt{3}\text{cm}$

الحل:

جد الحجم والمساحة الجانبية والكلية لكل مما يأتي :

3

(i) مخروط دائري قائم : مساحة قاعدته $225\pi\text{cm}^2$, محيط قاعدته $30\pi\text{cm}$, ارتفاعه 20cm , ارتفاعه الجانبي 25cm .

$B = 225\pi\text{cm}^2, P = 30\pi\text{cm}, h = 20\text{cm}, l = 25\text{cm}$

الحل:

$l^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow (25)^2 = (20)^2 + r^2$

$625 = 400 + r^2 \Rightarrow r^2 = 625 - 400 = 225$

$r = \sqrt{225} = 15\text{cm}$

الحجم $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \times h = \frac{1}{3} \pi \times 225 \times 20 = 1500\pi\text{cm}^3$

المساحة الجانبية $LA = \pi r \times l$

$LA = \pi \times 15 \times 25 = 375\pi\text{cm}^2$

المساحة الكلية $TA = \pi r \times l + \pi r^2$

$TA = 375\pi + 225\pi = 600\pi\text{cm}^2$

(ii) هرم : مساحة قاعدته $54\sqrt{3} \text{ cm}^2$, محيط قاعدته 36 cm , ارتفاعه $3\sqrt{6} \text{ cm}$, ارتفاعه الجانبي 9 cm .

$$B = 54\sqrt{3} \text{ cm}^2 , P = 36 \text{ cm} , h = 3\sqrt{6} \text{ cm} , l = 9 \text{ cm}$$

الحل:

$$V = \frac{1}{3} B \times h = \frac{1}{3} \times 54\sqrt{3} \times 3\sqrt{6} = 54\sqrt{18} = 54 \times 3\sqrt{2} = 108\sqrt{2} \text{ cm}^3 \text{ الحجم}$$

$$LA = \frac{1}{2} P \times l = \frac{1}{2} \times 36 \times 9 = 162 \text{ cm}^2 \text{ المساحة الجانبية}$$

$$TA = \frac{1}{2} P \times l + B = 162 + 54\sqrt{3} = 162 + 54(1.7) = 162 + 91.8 = 253.8 \text{ cm}^2 \text{ المساحة الكلية}$$

4 جد الحجم والمساحة الجانبية والكلية لكل مما يأتي :

(i) هرم قاعدته مثلث متساوي الاضلاع طول ضلعه 6 cm وارتفاعه $\sqrt{33} \text{ cm}$ وارتفاعه الجانبي 6 cm .

$$L = 6 \text{ cm} , h = \sqrt{33} \text{ cm} , l = 6 \text{ cm}$$

الحل:

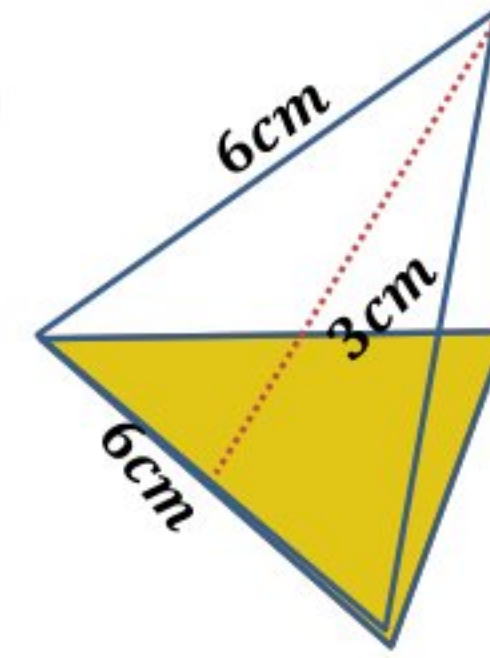
$$B = \frac{1}{2} L \times h = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (6)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 36 = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2 \text{ الحجم}$$

$$V = \frac{1}{3} B \times h = \frac{1}{3} \times 9\sqrt{3} \times \sqrt{33} = 3\sqrt{99} = 3(3\sqrt{11}) = 9\sqrt{11} \text{ cm}^3$$

$$P = L + h + l = 6 + 6 + 6 = 18 \text{ cm} \text{ محيط المثلث}$$

$$LA = \frac{1}{2} P \times l = \frac{1}{2} \times 18 \times 6 = 54 \text{ cm}^2 \text{ المساحة الجانبية}$$

$$TA = LA + B = 54 + 9\sqrt{3} \text{ cm}^2 \text{ المساحة الكلية}$$



(iii) هرم قاعدته مربعة طول ضلعها 12cm وارتفاعه 8cm وارتفاعه الجانبي 10cm

$$L = 12\text{cm} , h = 8\text{cm} , l = 10\text{cm}$$

الحل:

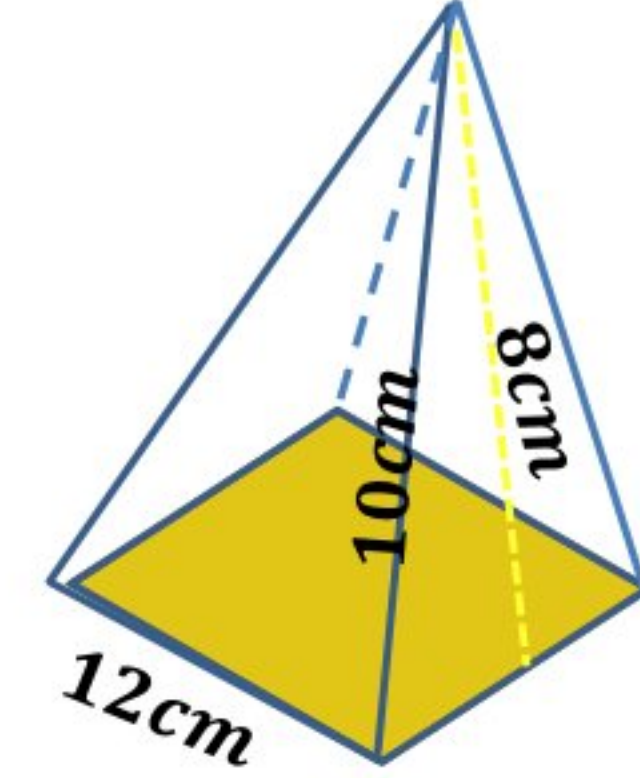
$$B = L \times L = 12 \times 12 = 144\text{cm}^2 \quad \text{مساحة المربع}$$

$$V = \frac{1}{3}B \times h = \frac{1}{3} \times 144 \times 8 = 48 \times 8 = 384\text{cm}^3 \quad \text{الحجم}$$

$$p = 4 \times L = 4 \times 12 = 48\text{cm} \quad \text{محيط المربع}$$

$$LA = \frac{1}{2}P \times l = \frac{1}{2} \times 48 \times 10 = 240\text{cm}^2 \quad \text{المساحة الجانبية}$$

$$TA = \frac{1}{2}P \times l + B = 240 + 144 = 384\text{cm}^2 \quad \text{المساحة الكلية}$$



جد الحجم والمساحة الجانبية والمساحة الكلية مستعملا الاشكال ادناه :

5

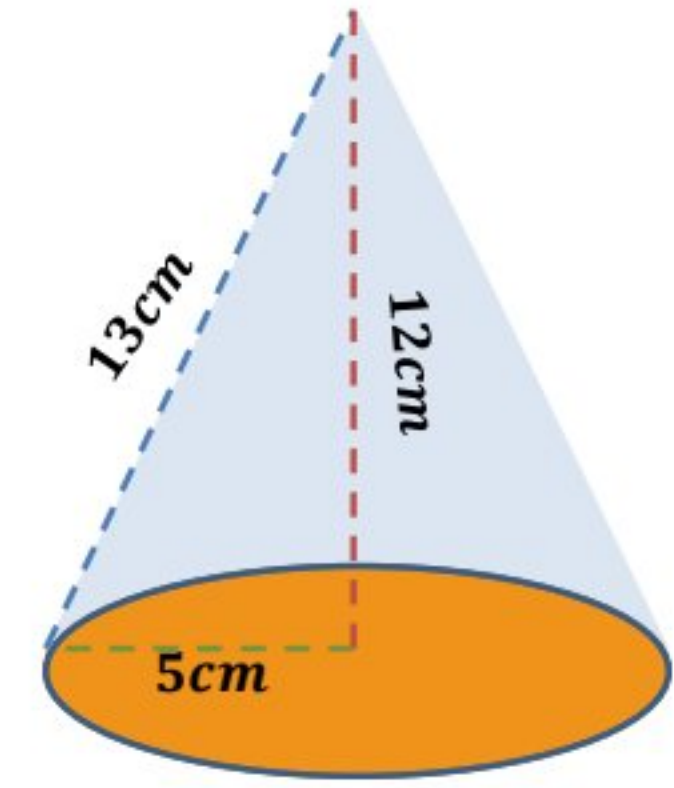
$$l = 13\text{cm} , h = 12\text{cm} , r = 5\text{cm}$$

الحل:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h = \frac{1}{3}\pi \times (5)^2 \times 12 = 100\pi \text{cm}^3 \quad \text{الحجم}$$

$$LA = \pi r \times l = \pi \times 5 \times 13 = 65\pi \text{cm}^2 \quad \text{المساحة الجانبية}$$

$$TA = \pi r \times l + \pi r^2 = 65\pi + 25\pi = 90\pi \text{cm}^2 \quad \text{المساحة الكلية}$$



(i)

$$l = ? , h = 4\text{cm} , r = 3\text{cm}$$

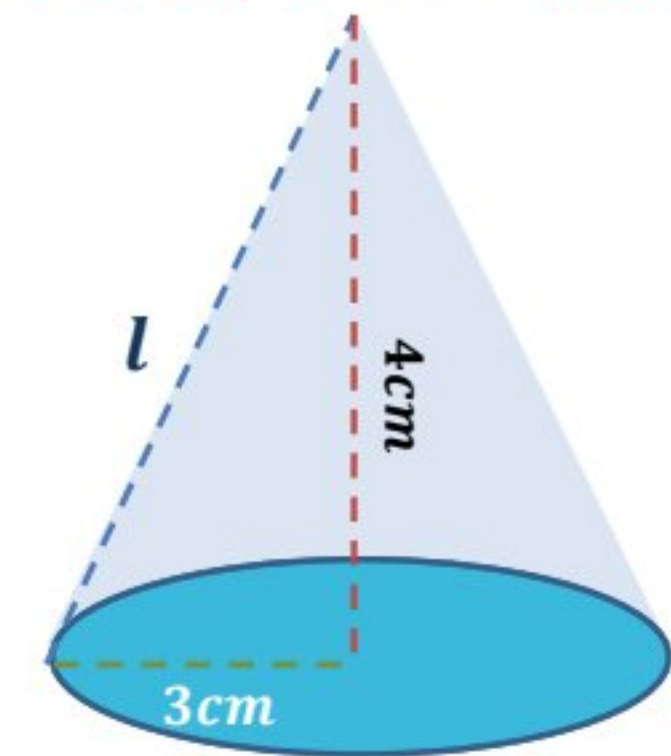
الحل:

$$l^2 = h^2 + r^2 = (4)^2 + (3)^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow l = 5\text{cm}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h = \frac{1}{3}\pi \times 9 \times 4 = 12\pi \text{cm}^3 \quad \text{الحجم}$$

$$LA = \pi r \times l = \pi \times 3 \times 5 = 15\pi \text{cm}^2 \quad \text{المساحة الجانبية}$$

$$TA = \pi r \times l + \pi r^2 = 15\pi + 9\pi = 24\pi \text{cm}^2 \quad \text{المساحة الكلية}$$



(ii)

$$l = 3\text{cm} , h = ? , r = \sqrt{3}\text{cm}$$

الحل:

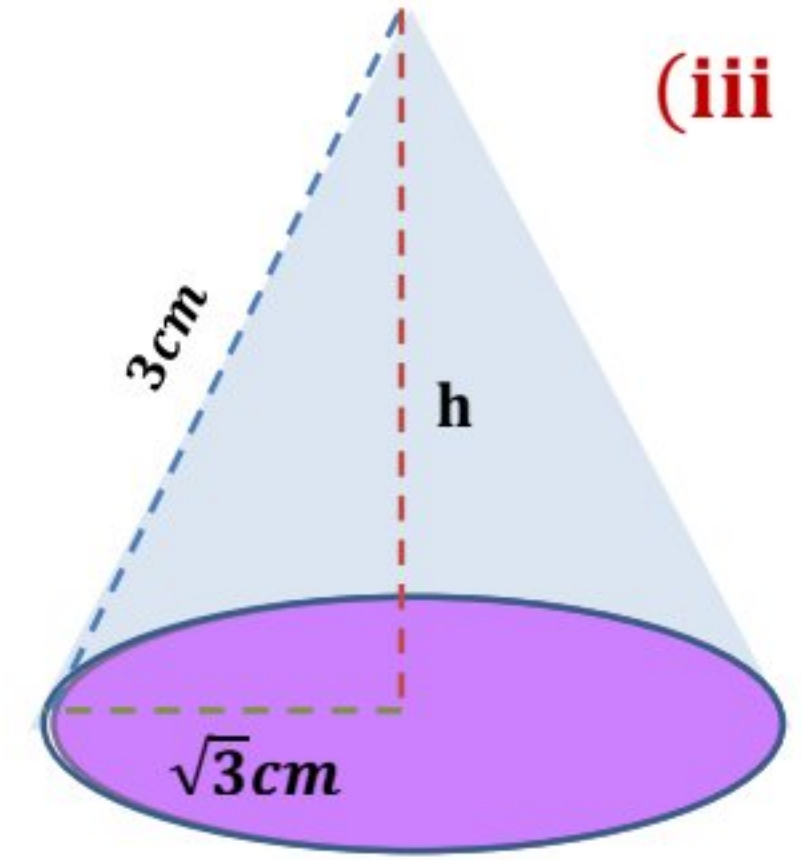
$$l^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow (3)^2 = h^2 + (\sqrt{3})^2 \Rightarrow 9 = h^2 + 3 \Rightarrow h^2 = 9 - 3 = 6$$

$$h = \sqrt{6}\text{cm}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h = \frac{1}{3}\pi \times 3 \times \sqrt{6} = \sqrt{6}\pi\text{cm}^3 \text{ الحجم}$$

$$LA = \pi r \times l = \pi \times \sqrt{3} \times 3 = 3\sqrt{3}\pi\text{cm}^2 \text{ المساحة الجانبية}$$

$$TA = \pi r \times l + \pi r^2 = 3\sqrt{3}\pi + 9\pi \text{ المساحة الكلية}$$



(iii)

جد الحجم والمساحة الجانبية والكلية لكل مما يأتي مستعملا الاشكال ادناه :

6

$$l = 5\text{cm} , h = 3\text{cm} , L = 8\text{cm}$$

الحل:

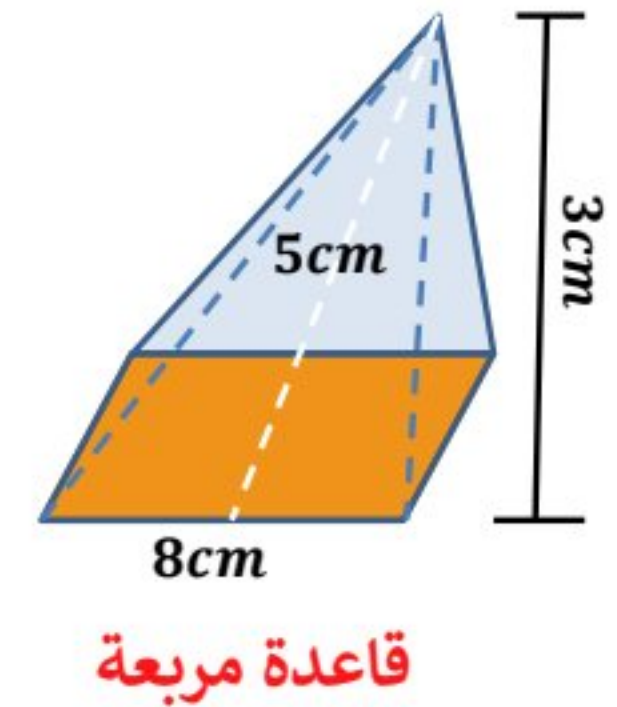
$$B = L \times L = 8 \times 8 = 64\text{cm}^2 \text{ مساحة المربع}$$

$$V = \frac{1}{3}B \times h = \frac{1}{3} \times 64 \times 3 = 64\text{cm}^3 \text{ الحجم}$$

$$P = 4 \times L = 4 \times 8 = 32\text{cm} \text{ محيط المربع}$$

$$LA = \frac{1}{2}P \times l = \frac{1}{2} \times 32 \times 5 = 80\text{cm}^2 \text{ المساحة الجانبية}$$

$$TA = \frac{1}{2}P \times l + B = 80 + 64 = 144\text{cm}^2 \text{ المساحة الكلية}$$



(i)

تدرب وحل التمرينات

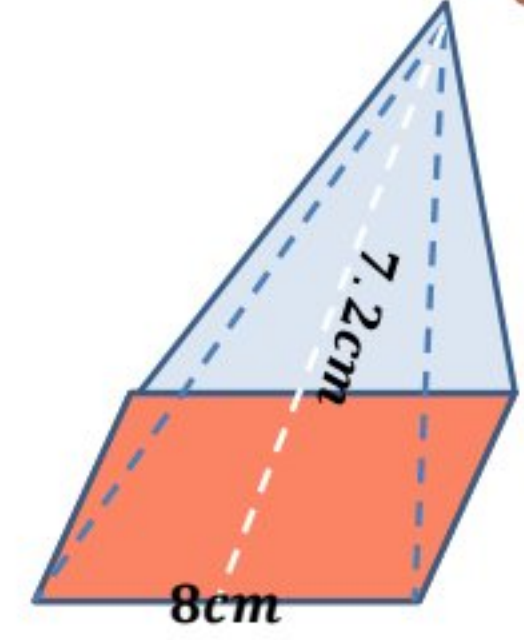
7 جد المساحة الجانبية للهرم الذي قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها $8cm$ وارتفاعها الجانبي $7.2cm$

7

الحل: $L = 8cm, l = 7.2cm$

محيط المربع $P = 4 \times L = 4 \times 8 = 32 cm^2$

المساحة الجانبية $LA = \frac{1}{2} P \times l = \frac{1}{2} \times 32 \times 7.2 = 16 \times 7.2 = 115.2 cm^2$



8 جد المساحة الجانبية للمضلع الثماني المنتظم الذي قياس طول ضلعه $1.16cm$ وارتفاعه الجانبي $2cm$

8

الحل: $n = 8cm, L = 1.16cm, H = 2cm$

$S = \frac{1}{2} L \times H \times n = \frac{1}{2} \times 1.16 \times 2 \times 8 = 9.28 cm^2$

9 جد المساحة الجانبية والمساحة الكلية لمخروط دائري قائم قطر قاعدته $35m$ وارتفاعه الجانبي $20m$

9

واكتب الجواب بدلالة π .

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

الحل: $r = \frac{35}{2} = 17.5m, l = 20m$

المساحة الجانبية $LA = 2\pi r \times l = 2\pi \times 17.5 \times 20 = 700\pi cm^2$

المساحة الكلية $TA = 2\pi r \times l + \pi r^2 = 700\pi + \pi(17.5)^2 = 700\pi + 306.25\pi = 1006.25\pi cm^2$

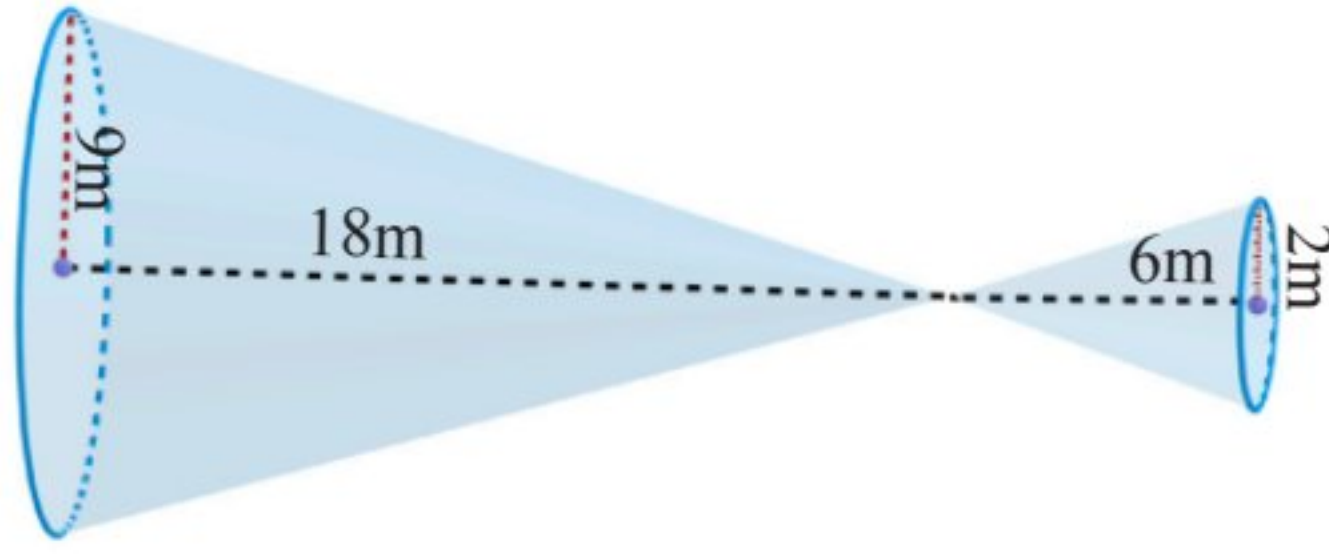
10 جد حجم هرم قاعدته مثلث منتظم وطول ضلعه $6m$ وارتفاعه $13m$.

10

الحل: $L = 6m, h = 13m$

مساحة المثلث $B = \frac{1}{2} L \times h = \frac{1}{2} \times 6 \times 13 = 39 m^2$

الحجم $V = \frac{1}{3} B \times h = \frac{1}{3} \times 39 \times 13 = 13 \times 13 = 169 m^3$



جد حجم الشكل المركب المجاور؟

11

الحل /

الحل: لإيجاد حجم الجسم المركب نجد أولاً حجم المخروط الصغير وحجم المخروط الكبير وبعد ذلك نجمع الحجوم

حجم المخروط الصغير : $h = 6m, r = 2m$

$$V_1 = \frac{1}{3}r^2\pi \times h = \frac{1}{3} \times (2)^2\pi \times 6 = 8\pi m^3$$

حجم المخروط الكبير : $h = 18m, r = 9m$

$$V_2 = \frac{1}{3}r^2\pi \times h = \frac{1}{3} \times (9)^2\pi \times 18 = 81 \times 6 = 486\pi m^3$$

$$V = V_1 + V_2 = 8\pi + 486\pi = 494\pi m^3 \quad \text{حجم الجسم المركب}$$

تدرب وحل مسائل حياتية

علوم: نموذج بركاني علي شكل مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته $3cm$ اذا كان حجم

12

النموذج $203cm^3$ تقريبا، ما ارتفاعه؟

الحل:

$$V = \frac{1}{3}r^2\pi \times h \quad \text{حجم المخروط}$$

$$r = \frac{6}{2} = 3cm, V = 203cm^3, h = ?$$

$$203 = \frac{1}{3} \times (3)^2 \times h \times 3.14 \Rightarrow 203 = \frac{1}{3} \times 9 \times h \times 3.14 \Rightarrow 203 = 9.42 \times h$$

$$h = \frac{203}{9.42} = \frac{20300}{942} = 21.55cm \quad \text{ارتفاع النموذج البركاني}$$

13

بنه : يبلغ ارتفاع برج العرب $321m$ ويمثل هرمًا مقوساً، احسب المساحة التقريبية لقاعدته اذا كان حجم الهرم

$$1904000cm^3$$

الحل /

$$h = 321m, B = ?, V = 1904000m^3$$

$$V = \frac{1}{3}B \times h \quad \text{حجم الهرم}$$

$$1904000 = \frac{1}{3} \times B \times 321 \Rightarrow 1904000 = B \times 107$$

$$B = \frac{1904000}{107} = 17794.4 \quad \text{المساحة التقريبية}$$

14

جد المساحة الجانبية للهرم الذي قاعدته مربعة الشكل والمبين بالشكل المجاور الشكل

هو هرم لان قاعدته مربعه $\ell = 8cm, L = 4cm$

الحل /

$$L.A = \frac{1}{2} \times P \times \ell \quad \text{نعوض المعطيات بقانون المساحة الجانبية للهرم}$$

$$L.A = \frac{1}{2} \times (4 \times 4) \times 8$$

$$L.A = \frac{1}{2} \times 16 \times 8$$

$$L.A = 8 \times 8 = 64cm^2$$

$$P = 4 \times L \quad \text{محيط المربع}$$

فكر

15 **تحد:** مخروط وأسطوانة لهما نفس القاعدة والحجم، قطر الاسطوانة 40cm وارتفاعها 7cm ما المساحة الجانبية للمخروط؟

الحل: الاسطوانة : $r = \frac{40}{2} = 20\text{cm}$, $h = 7\text{cm}$

$$V = r^2 h \pi = (20)^2 \times 7\pi = 400 \times 7\pi = 2800\pi\text{cm}^2 \text{ حجم الاسطوانة}$$

$$V = \frac{1}{3} r^2 \pi \times h$$

حجم الاسطوانة = حجم المخروط $2800\pi\text{cm}^3$

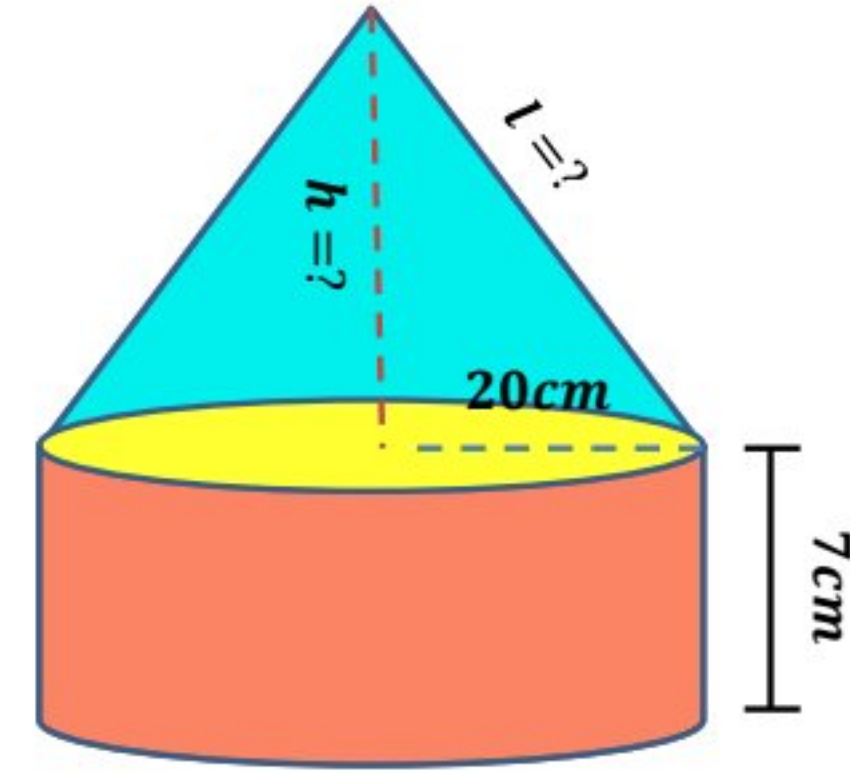
$$2800\pi = \frac{1}{3} \times 400\pi \times h \Rightarrow 8400\pi = 400\pi \times h$$

$$h = \frac{8400\pi}{400\pi} = 21\text{cm}$$

$$l^2 = h^2 + r^2 = (21)^2 + (20)^2 = 441 + 400 = 841$$

$$l = \sqrt{841} = 29\text{cm}$$

$$LA = 2\pi r \times l = 2\pi \times 20 \times 29 = 1160\text{cm}^2 \text{ المساحة الجانبية}$$



16 **اكتشف الخطأ:** أي الحلين خطأ؟ وضح ذلك؟

$$V = \frac{1}{3} \times b \times h$$

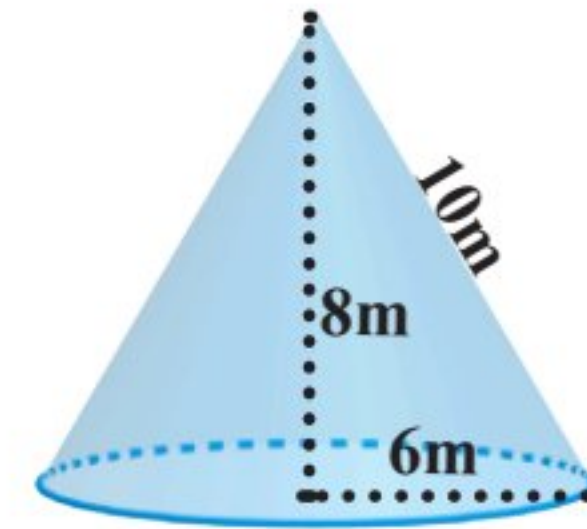
الحل الاول /

$$V = \frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times \pi \times 10 = 120\pi\text{m}^3$$

$$V = \frac{1}{3} \times b \times h$$

الحل الثاني /

$$V = \frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times \pi \times 8 = 96\pi\text{m}^3$$



الحل الاول خطأ لان مقدار $h = 8\text{cm}$ وليس $h = 10\text{cm}$ لذلك يكون الحل الثاني هو الصحيح $V = 96\pi\text{m}^3$

مسألة عن مضلع منتظم تسمح المعطيات فيه ايجاد محيط المضلع ومساحته؟

أكتب

الحل / راجع المثال الاول من هذه الدرس او أي مثال يخص منطوق السؤال أعلاه

شاهد هذا الدرس
على يوتيوب



3

بعض الرموز الرياضية التي سنستخدمها في هذا الفصل :

الرمز	معناه	الرمز	معناه
$\cong$	يطابق	$\leftrightarrow$	مستقيم
$\sim$	يشابه	—	قطعه مستقيم
$\angle$	زاوية	Δ	مثلث
m	قياس (تستخدم ع الزوايا)	$//$	يوازي
$^\circ$	درجه (وحده قياس الزوايا)	$\perp$	عمودي

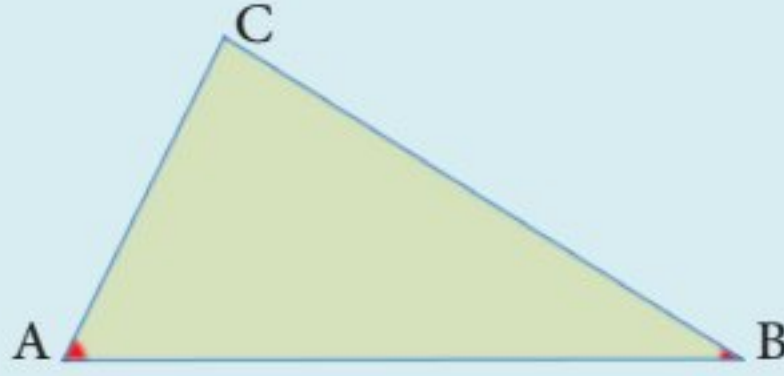
الدرس (2-5) المثلثات

[5-2-1] الاضلاع والزوايا في المثلث

(مبرهنات من دون برهان) في كل مثلث:

مبرهنة: اذا تباین ضلعا مثلث تباینّت الزاويتان المقابلتان لهما، فأكبرهما

تقابل الضلع الاكبر وبالعكس. $BC > AC \Leftrightarrow m\angle A > m\angle B$



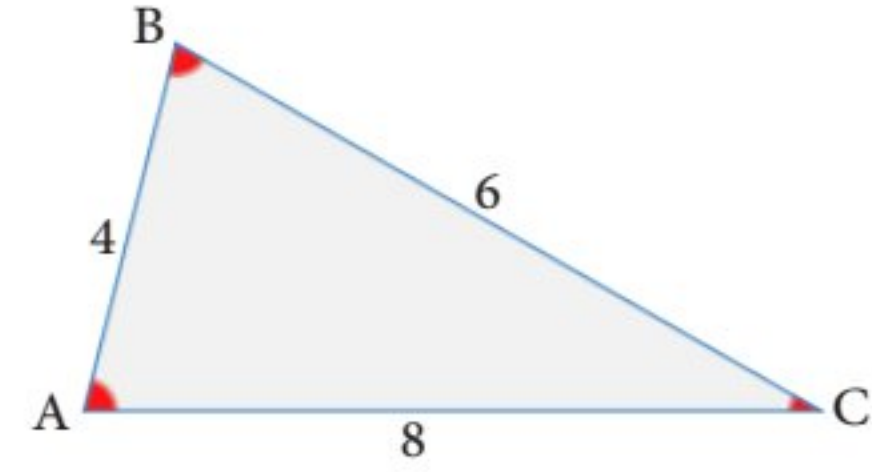
تذكير (1): مجموعة زوايا المثلث 180° , $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

تذكير (2): يمكن كتابة رموز الاضلاع من البداية الى النهاية او العكس مثلا $\overline{AB}$ يمكن كتابة $\overline{BA}$.

مثال (1)

i- في المثلث ادناه رتب الزوايا من الاصغر الى الاكبر.
ii- في المثلث ادناه رتب الاضلاع من الاقصر الى الاطول واحسب قياس $\angle C$.

الضلع الاقصر $\overline{AB}$ اذن الزاوية الصغرى $\angle C$
الضلع الاطول $\overline{AC}$ اذن الزاوية الكبرى $\angle B$
الترتيب هو $m\angle C, m\angle A, m\angle B$



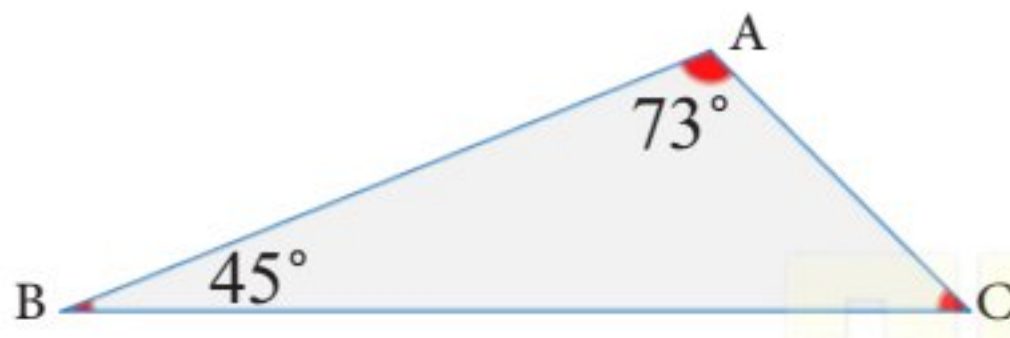
$$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ \quad \text{مجموع زوايا المثلث}$$

$$m\angle C = 180^\circ - (73^\circ + 45^\circ) = 62^\circ$$

$$\therefore m\angle B < m\angle C < m\angle A$$

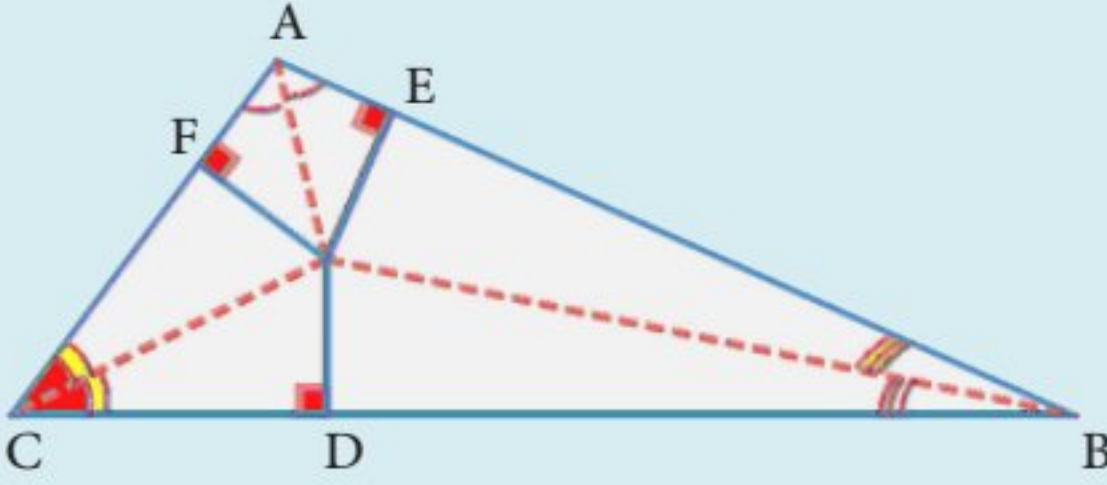
$\overline{AC}, \overline{BA}, \overline{BC}$

الترتيب هو:



(مبرهنات من دون برهان) في كل مثلث:

مبرهنة: منصفات زوايا المثلث تتلاقى بنقطة واحدة تكون متساوية الابعاد عن اضلاعه. (والعكس صحيح).
اذا كان $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ منصفات الزوايا A, B, C على الترتيب، تلتقي في نقطة O ، فإن: $OD=OE=OF$



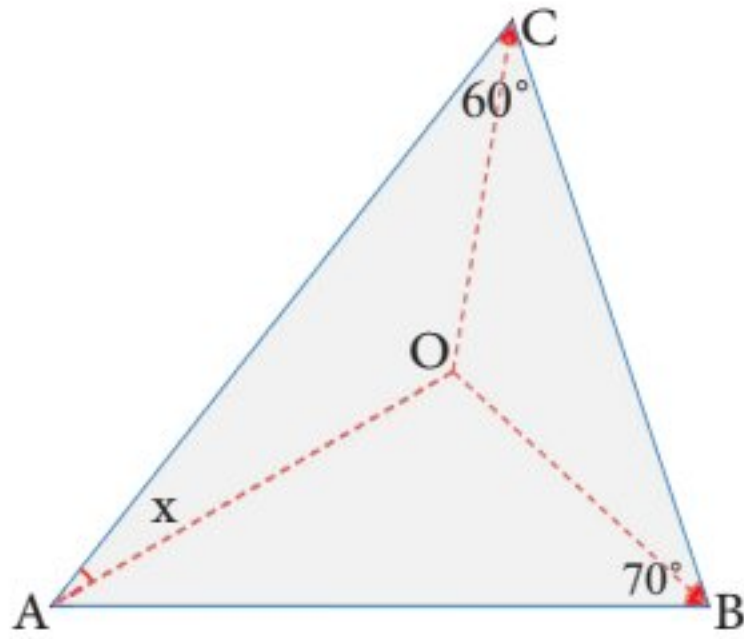
مثال (2)

في المثلث المجاور جد قيمة x .

$\overline{BO}$ تنصف $\angle B$, $\overline{CO}$ تنصف $\angle C$, $\therefore O$ نقطة التقاء منصفات زوايا المثلث ABC
($\overline{AO}$ تنصف $\angle A$) $x = \frac{1}{2} m\angle A$ مبرهنة

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ \quad \text{مجموع زوايا المثلث}$$

$$m\angle A = 180^\circ - (70^\circ + 60^\circ) = 50^\circ \Rightarrow \therefore x = 25^\circ$$

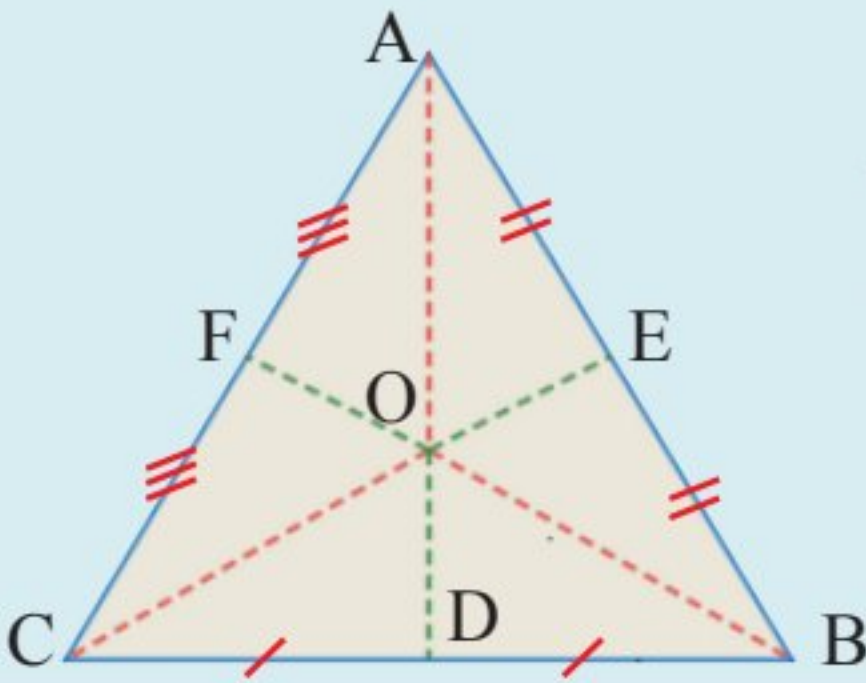


(مبرهنات من دون برهان) في كل مثلث:

مبرهنة: القطع المستقيمة المتوسطة للمثلث تتلاقى في نقطة واحدة تسمى مركز ثقل المثلث، تقسم كل منها بنسبة $\frac{2}{3}$ من جهة الرأس الى منتصف الضلع المقابل.

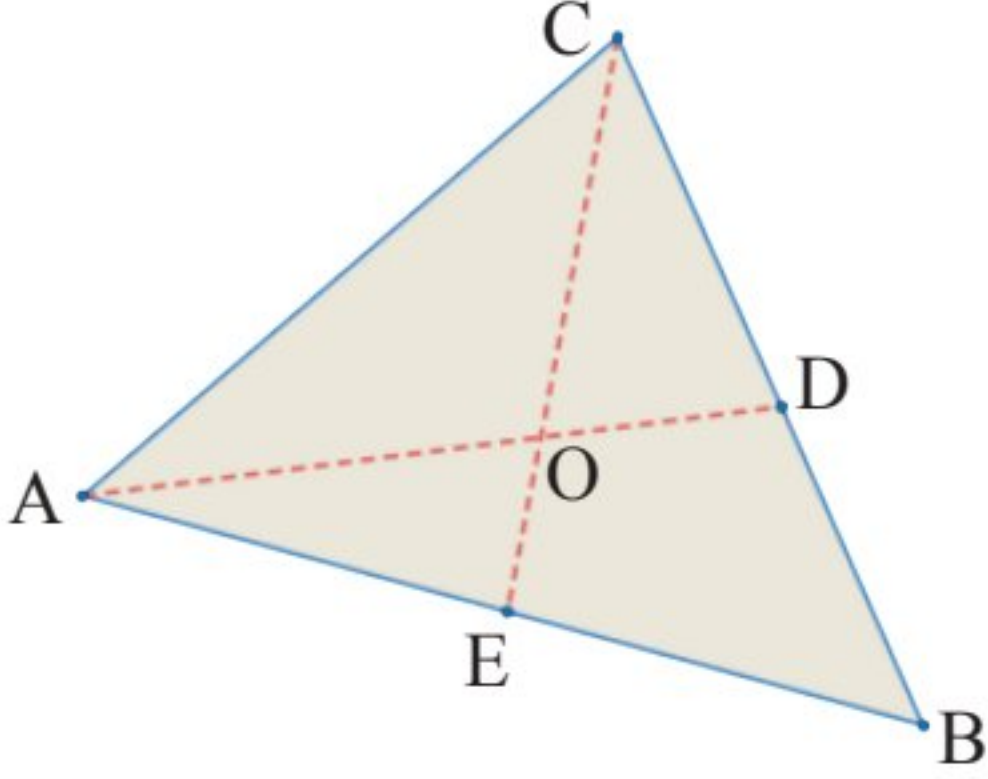
$$AO = \frac{2}{3} AD, BO = \frac{2}{3} BF, CO = \frac{2}{3} CE$$

$$OD = \frac{1}{3} AD, OF = \frac{1}{3} BF, OE = \frac{1}{3} CE$$



مثال (3)

المثلث ABC فيه $\overline{AD}$, $\overline{CE}$ قطعان متوسطتان يلتقيان في نقطة O، $CE = 9\text{cm}$, $AD = 6\text{cm}$ ،
جد طول $\overline{AO}$, $\overline{OE}$.



$$OE = \frac{1}{3} CE$$

$$\therefore OE = \frac{1}{3} \times 9 = 3\text{cm}$$

$$\therefore OA = \frac{2}{3} AD$$

$$\therefore OA = \frac{2}{3} \times 6 = 4\text{cm}$$

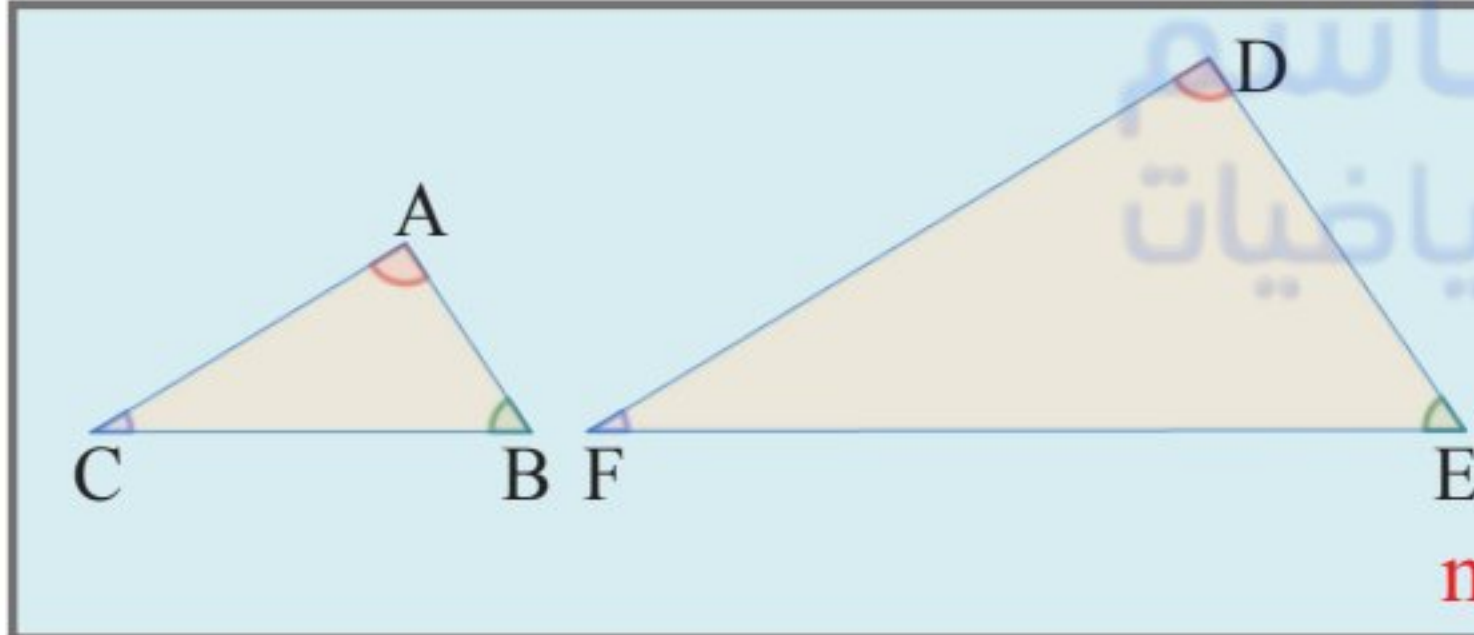
$\overline{CE}$ قطعة متوسطة

كذلك $\overline{AD}$ قطعة متوسطة



شاهد هذا الدرس
على يوتيوب

[5-2-2] تشابه المثلثات



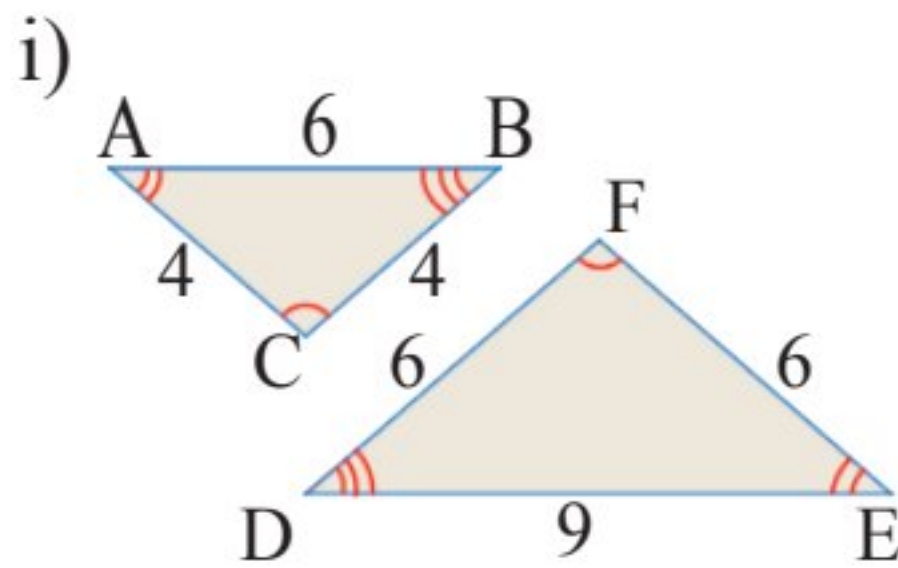
المثلثان المتشابهان: هما مثلثان تتناسب اضلاعهما وتتطابق زواياهما ويرمز للتشابه بالرمز ($\sim$). المبرهنات من دون برهان
مبرهنة: اذا تطابقت زاويتان في مثلث مع زاويتين في مثلث آخر فان المثلثين يتشابهان.

$$m\angle A = m\angle D, m\angle C = m\angle F, \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

مبرهنة: اذا تناسب ثلاثة اضلاع من مثلث مع ثلاثة اضلاع من مثلث آخر فان المثلثين يتشابهان.

مثال (4)

بين ما اذا كان المثلثان في الشكل المجاور متشابهان، واكتب نسبة التشابه.

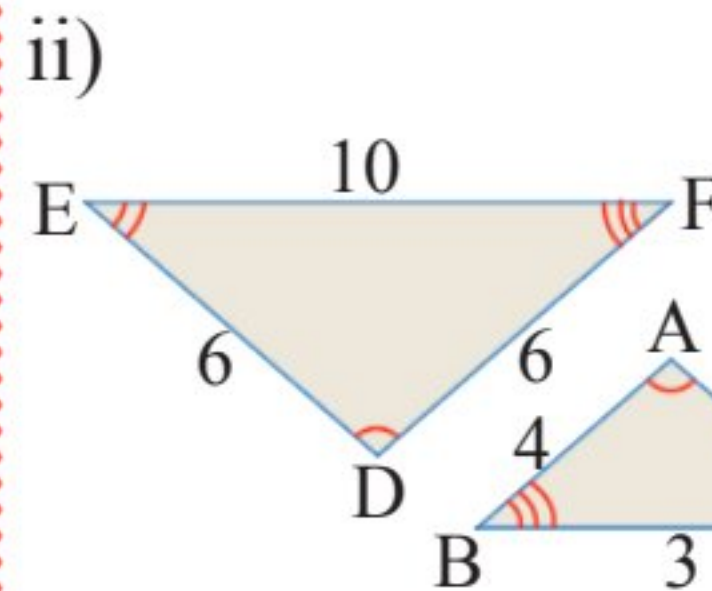


$$\frac{AB}{DE} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{AC}{EF} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{BC}{FD} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

اذن المثلثان متشابهان



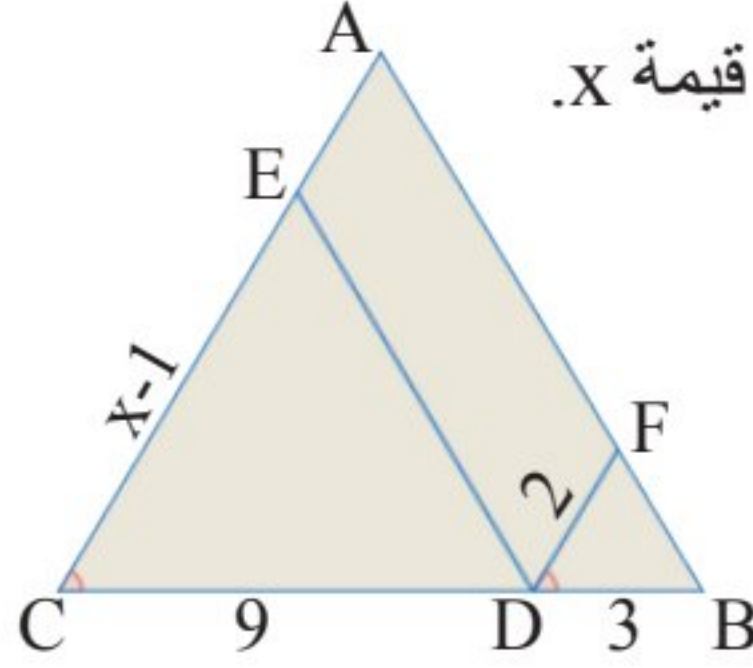
$$\frac{BC}{EF} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{AB}{DF} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{BC}{EF} \neq \frac{AB}{DF}$$

اذن المثلثان غير متشابهان

مبرهنة: اذا تناسب ضلعان في مثلث مع نظائريهما في مثلث آخر، وتطابقت الزاوية المحصورة بينهما مع نظيرتها فان المثلثين يتشابهان.



مثال (5) في الشكل المجاور: اذا كان $\frac{EC}{FD} = \frac{CD}{DB}$ ، $m\angle C = m\angle FDB$ ، جد قيمة x .

بما ان المثلثين BFD, DEC متشابهان، اذن اضلاعهما المتناظرة متناسبة.

$$\frac{x-1}{2} = \frac{9}{3}$$

$$3x - 3 = 18$$

$$3x = 21 \Rightarrow x = 7$$

التناسب

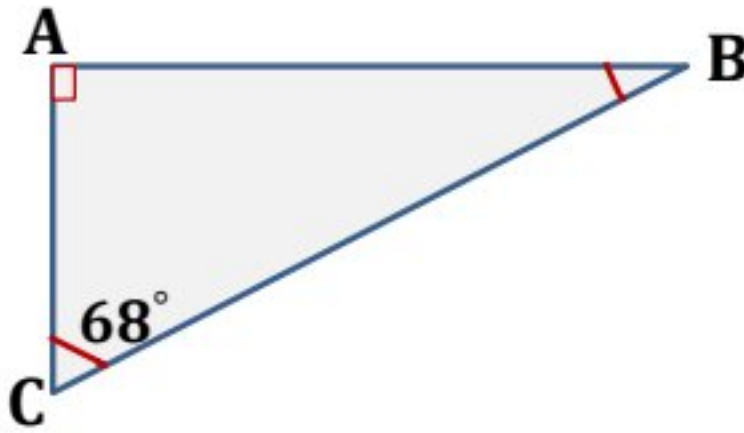
الضرب التبادلي

التبسيط

تأكّد من فهمك

رتب الاضلاع من الاقصر الى الاطول

1



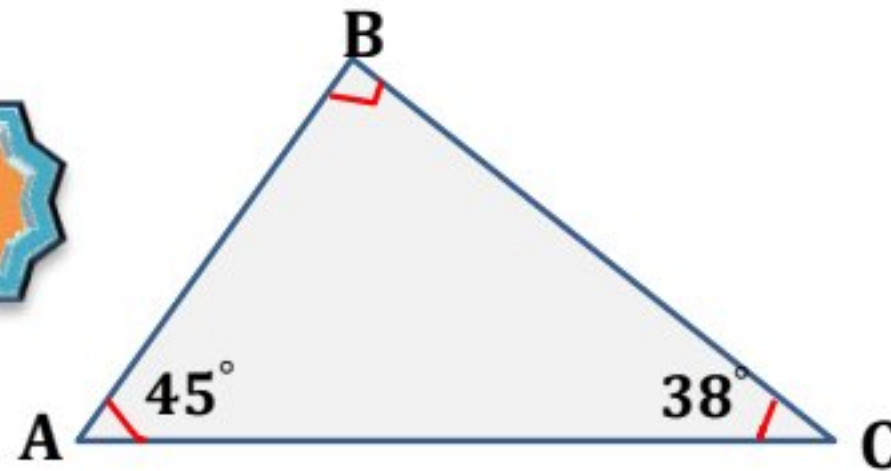
مجموع زوايا المثلث $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$

$$90^\circ + m\angle B + 68^\circ = 180^\circ \Rightarrow m\angle B + 158^\circ = 180^\circ$$

$$m\angle B = 180^\circ - 158^\circ = 22^\circ$$

الترتيب هو $m\angle B, m\angle C, m\angle A$

2



مجموع زوايا المثلث $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$

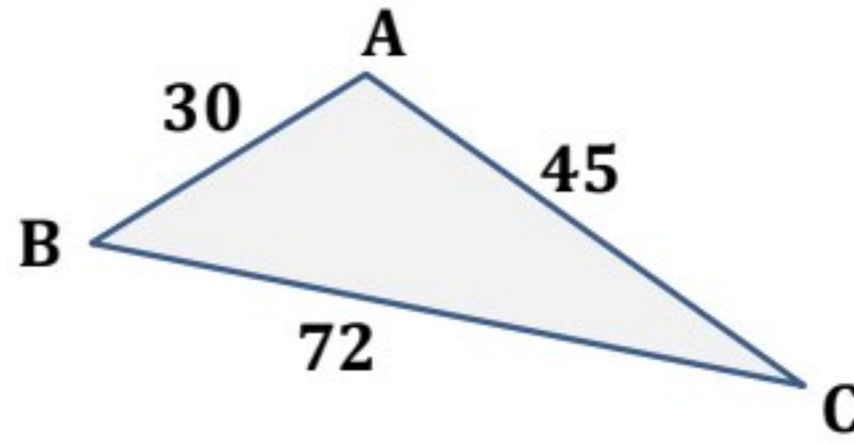
$$45^\circ + m\angle B + 38^\circ = 180^\circ \Rightarrow m\angle B + 83^\circ = 180^\circ$$

$$m\angle B = 180^\circ - 83^\circ = 97^\circ$$

الترتيب هو $m\angle C, m\angle A, m\angle B$

رتب الزوايا من الاصغر الى الاكبر.

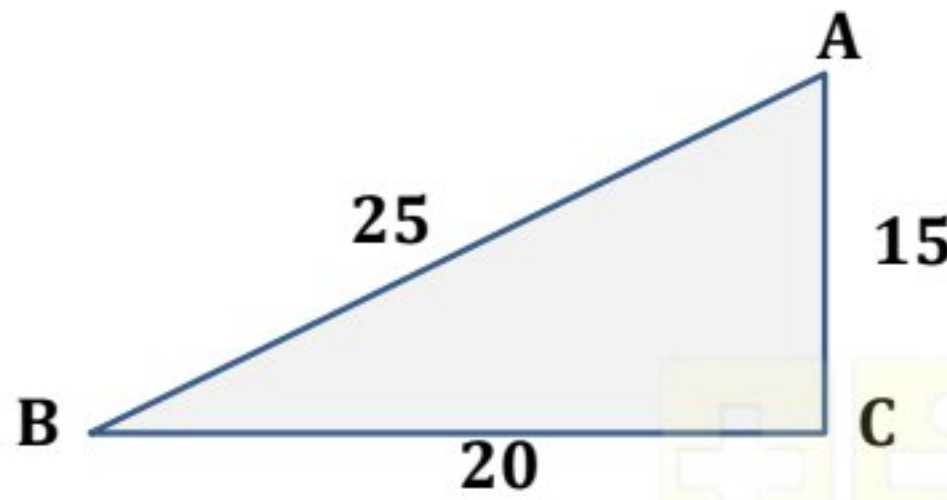
3



الحل: الضلع الاقصر $\overline{AB} = 30$ اذن الزاوية الصغرى $\angle C$
الضلع الاطول $\overline{BC} = 72$ اذن الزاوية الكبرى $\angle A$

الترتيب هو $m\angle C, m\angle B, m\angle A$

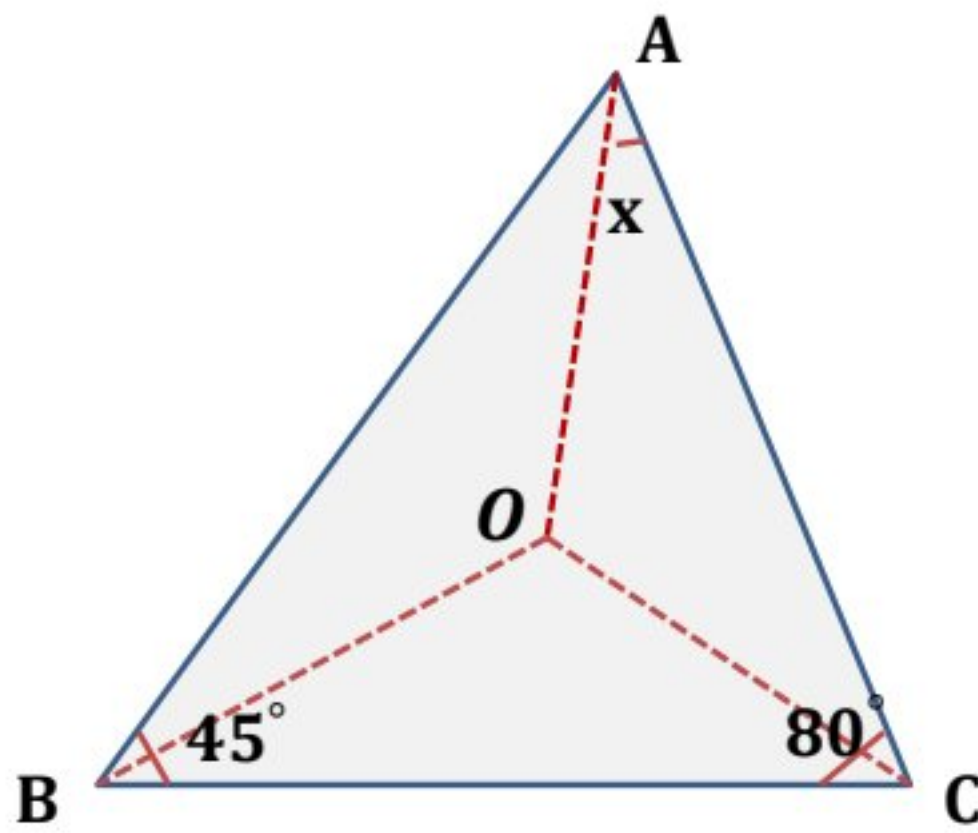
4



الحل: الضلع الاقصر $\overline{AC} = 15$ اذن الزاوية الصغرى $\angle B$
الضلع الاطول $\overline{AB} = 25$ اذن الزاوية الكبرى $\angle C$

الترتيب هو $m\angle B, m\angle A, m\angle C$

5 في المثلث المجاور اذا كان $\overline{AO}, \overline{BO}, \overline{CO}$ منصفات الزوايا A, B, C جد $m\angle x$.



الحل: $\overline{BO}$ تنصف $\angle B$, $\overline{CO}$ تنصف $\angle C$, $\overline{AO}$ تنصف $\angle A$

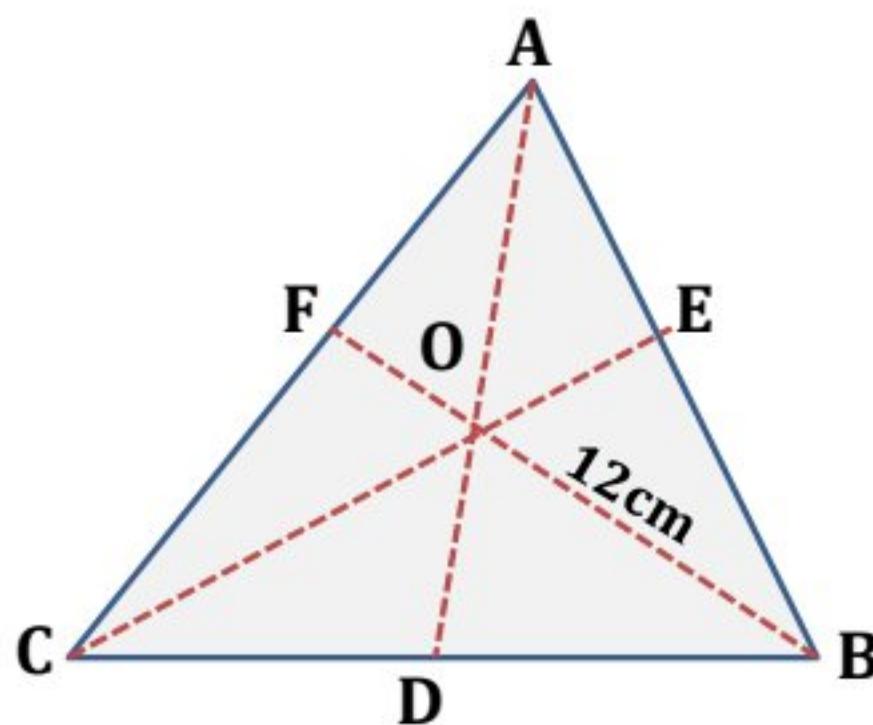
مجموع زوايا المثلث $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$

$$m\angle A + 45^\circ + 80^\circ = 180^\circ \Rightarrow m\angle A + 125^\circ = 180^\circ$$

$$m\angle A = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$$

$$x = \frac{1}{2} m\angle A = \frac{1}{2} \times 55^\circ = 27.5^\circ$$

6 ABC مثلث، O نقطة تقاطع مستقيماته المتوسطة، اذا كان $BO = 12\text{cm}$ جد طول القطعة المستقيمة التي احد طرفيها النقطة B.



الحل: $\overline{BF}$ قطعة متوسطة

$$BO = \frac{2}{3} BF \Rightarrow 12 = \frac{2}{3} BF$$

$$2 BF = 36 \Rightarrow BF = \frac{36}{2} = 18 \text{ cm}$$

7

في المثلث ABC , O نقطة التقاء القطع المتوسطة، جد طول $\overline{AD}$ اذا علمت ان:
 $m\angle COB = 90^\circ$, $\overline{AO} \cap \overline{BC} = \{D\}$, $BC = 6cm$

ملاحظة: طول القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة الى منتصف الوتر يساوي نصف طول الوتر.

الحل: $\triangle COB$ قائم الزاوية في O ((معطى))

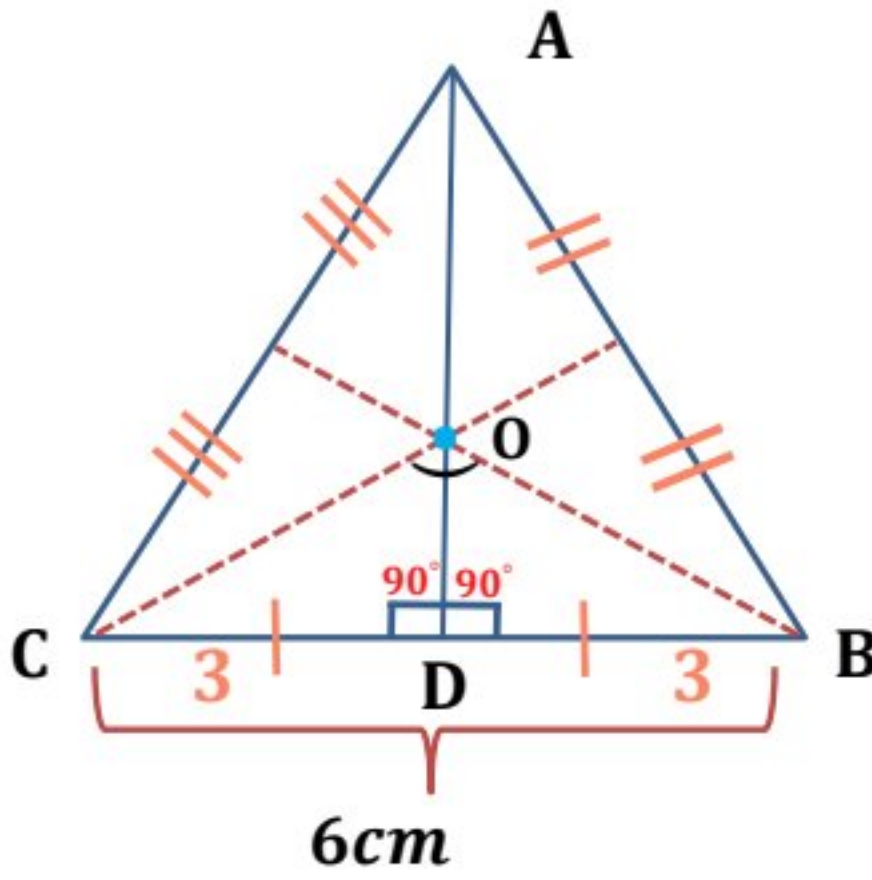
$CD = DB$ لأن $\overline{AD}$ قطعة مستقيم متوسطة .

$$OD = \frac{1}{2} BC \Rightarrow OD = \frac{1}{2} \times 6 = 3cm$$

∴ النقطة O تقسم كل قطعة متوسطة بنسبة $2:1$ من جهة الرأس .

$$OD = \frac{1}{3} AD \Rightarrow 3 = \frac{1}{3} AD$$

$$AD = 9cm$$



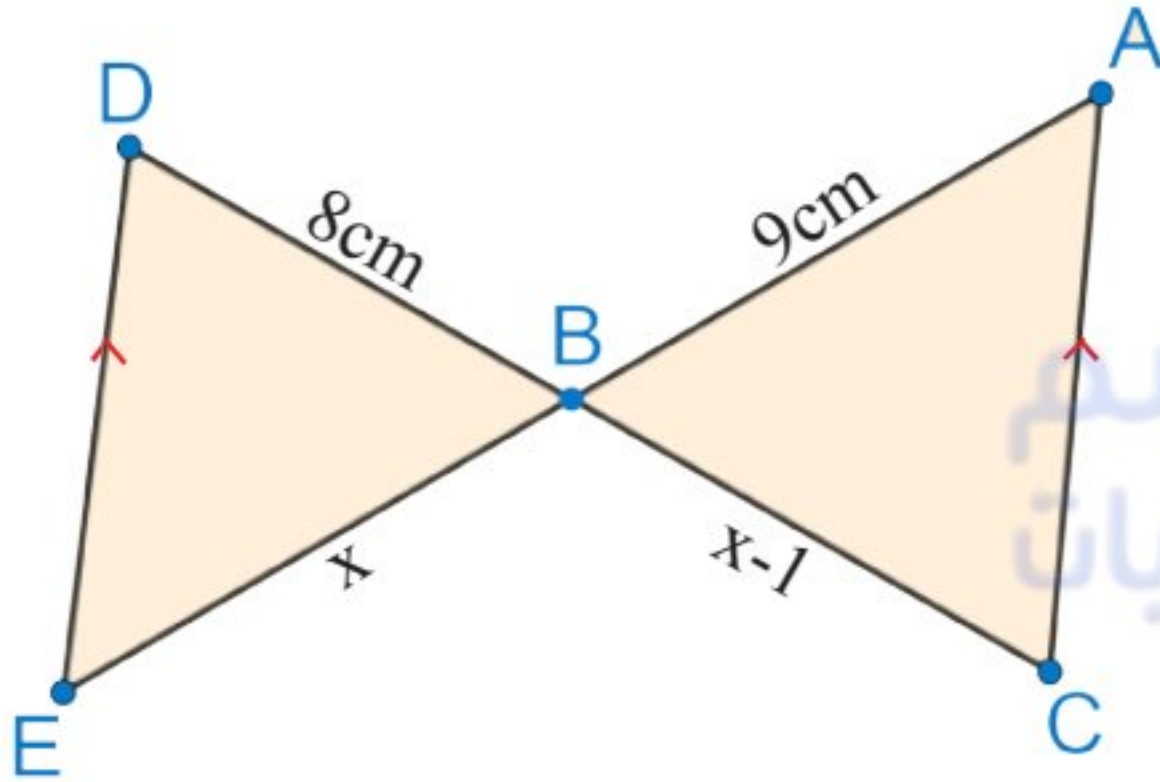
8

في الشكل المجاور:

(i) بين أن المثلثين ABC, BDE متشابهان .

(ii) جد نسبة التناسب .

(iii) جد قيمة x .



$$\begin{aligned} \text{i) } m\angle A &= m\angle D, & m\angle C &= m\angle E \\ & \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle BDE \end{aligned}$$

$$\text{ii) } \frac{DB}{AB} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$\text{iii) } \frac{DB}{AB} = \frac{EB}{BC} \Rightarrow \frac{9}{12} = \frac{x}{x+1}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{x}{x+1} \quad \text{الطرفين في الوسطين}$$

$$4x = 3x + 3 \Rightarrow 4x - 3x = 3$$

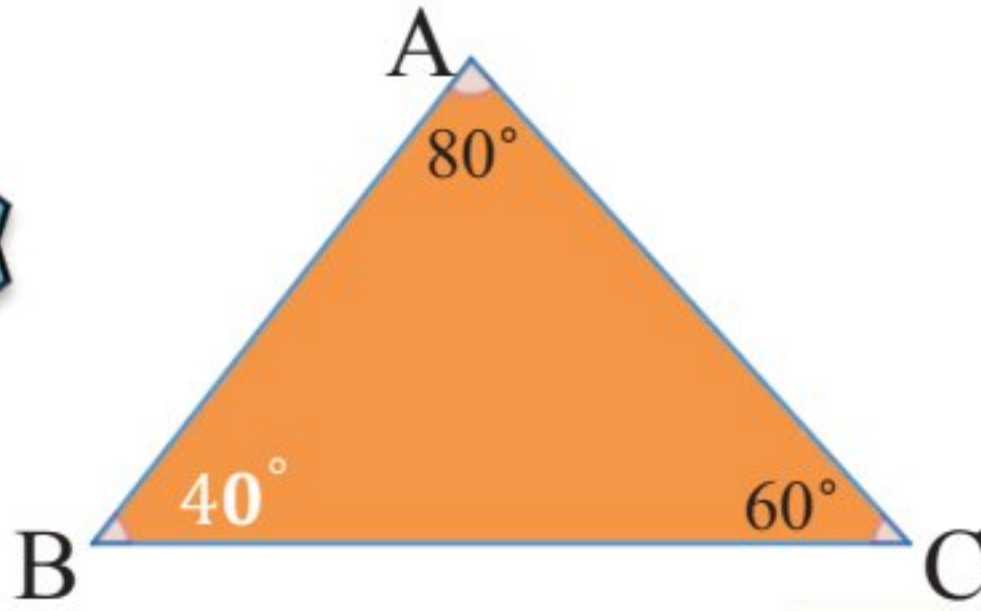
$$x = 3$$

الحل:

تدرب وحل التمرينات

رتب الاضلاع من الاقصر الى الاطول.

9



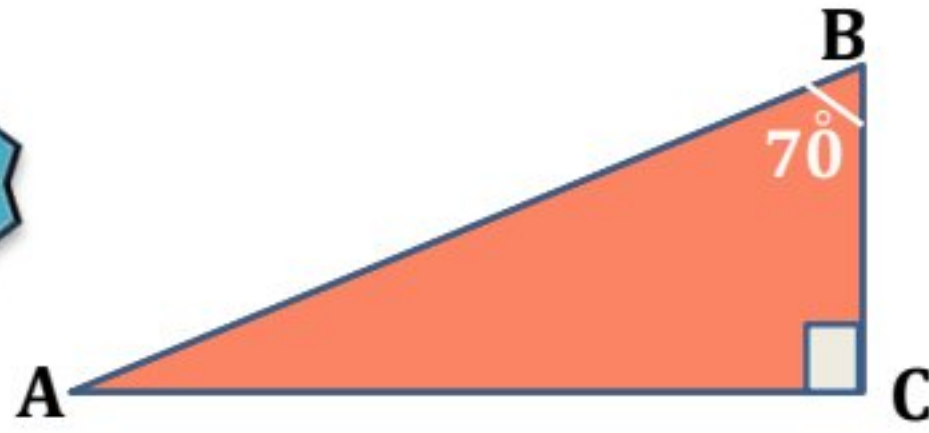
مجموع زوايا المثلث $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$

$80^\circ + m\angle B + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow m\angle B + 140^\circ = 180^\circ$

$m\angle B = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$

الترتيب هو: $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ هو: الترتيب هو:

10



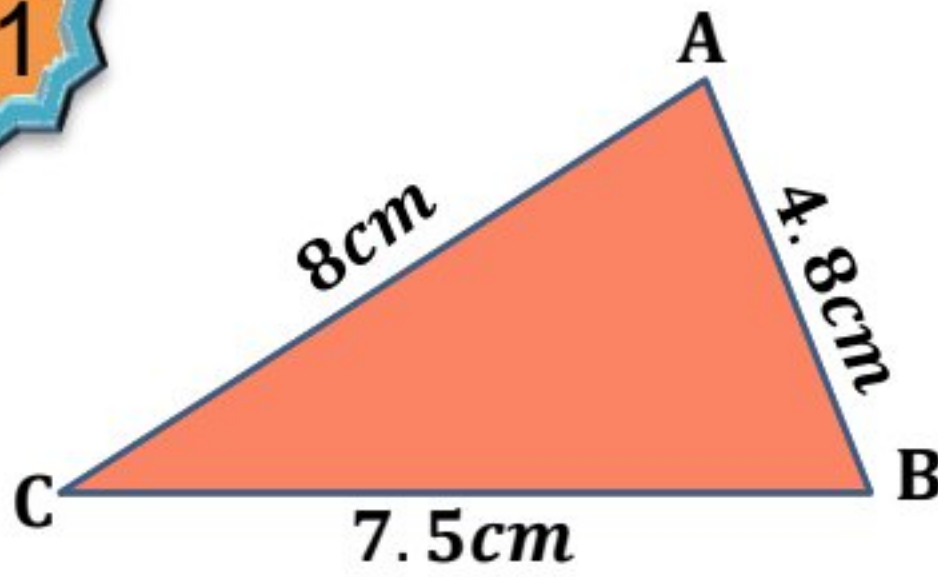
مجموع زوايا المثلث $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$

$m\angle A + 70^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow m\angle A + 160^\circ = 180^\circ$

$m\angle A = 180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$

الترتيب هو: $m\angle A$, $m\angle B$, $m\angle C$ هو: الترتيب هو:

11



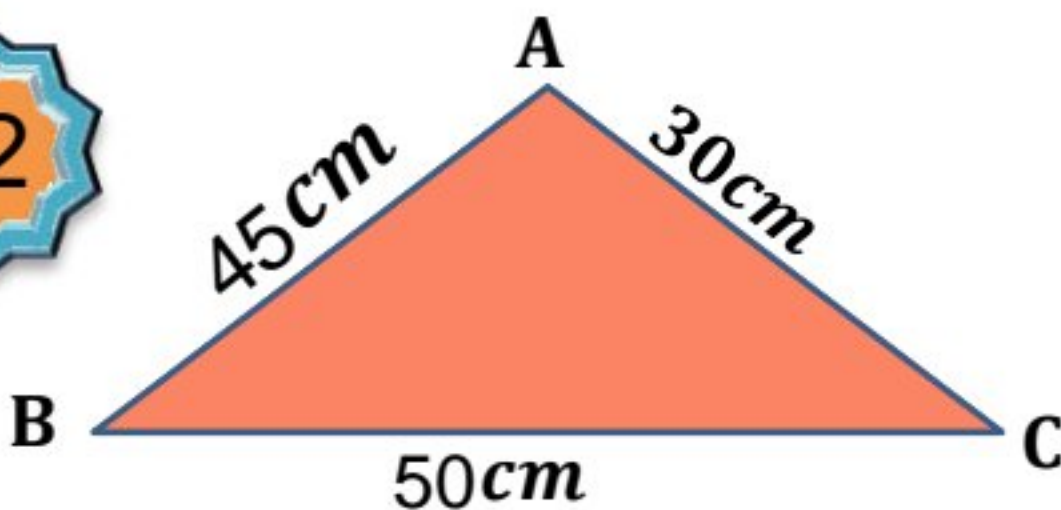
رتب الزوايا من الاصغر الى الاكبر.

الضلع الاقصر $\overline{AB} = 4.8cm$

الضلع الاطول $\overline{AC} = 8cm$

الترتيب هو: $m\angle C$, $m\angle A$, $m\angle B$ هو: الترتيب هو:

12



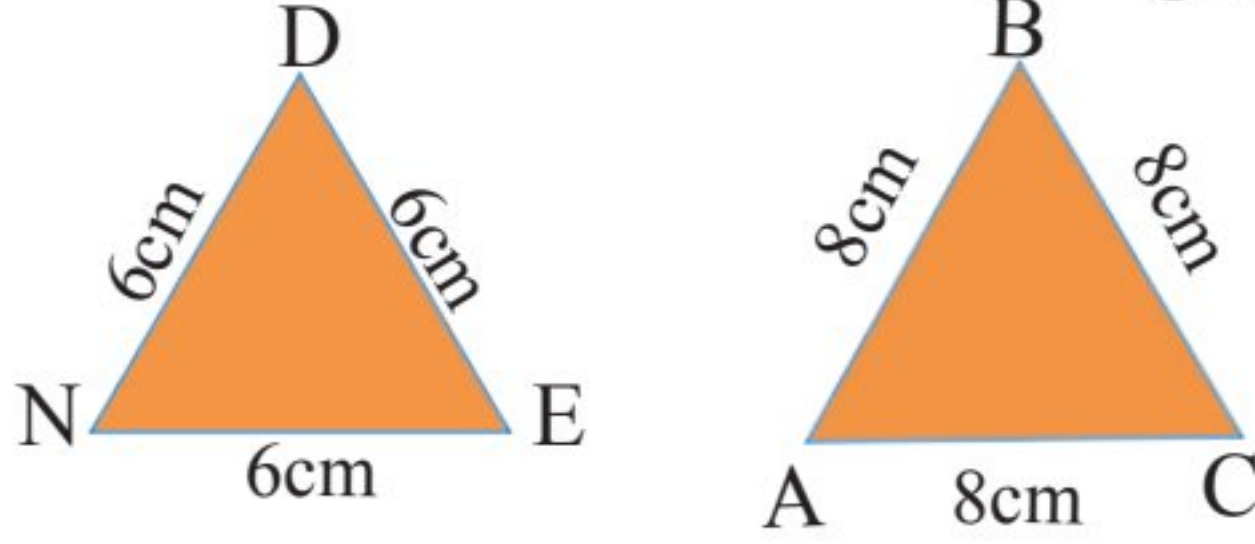
الضلع الاقصر $\overline{AC} = 30cm$

الضلع الاطول $\overline{BC} = 50cm$

الترتيب هو: $m\angle B$, $m\angle C$, $m\angle A$ هو: الترتيب هو:

13

بيّن ان المثلثين ABC, DEN في الشكل المجاور متشابهان واكتب نسبة التشابه ثم سمّ أزواج الزوايا المتطابقة .



الحل:

$$\frac{NE}{AC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \quad \frac{DE}{BC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

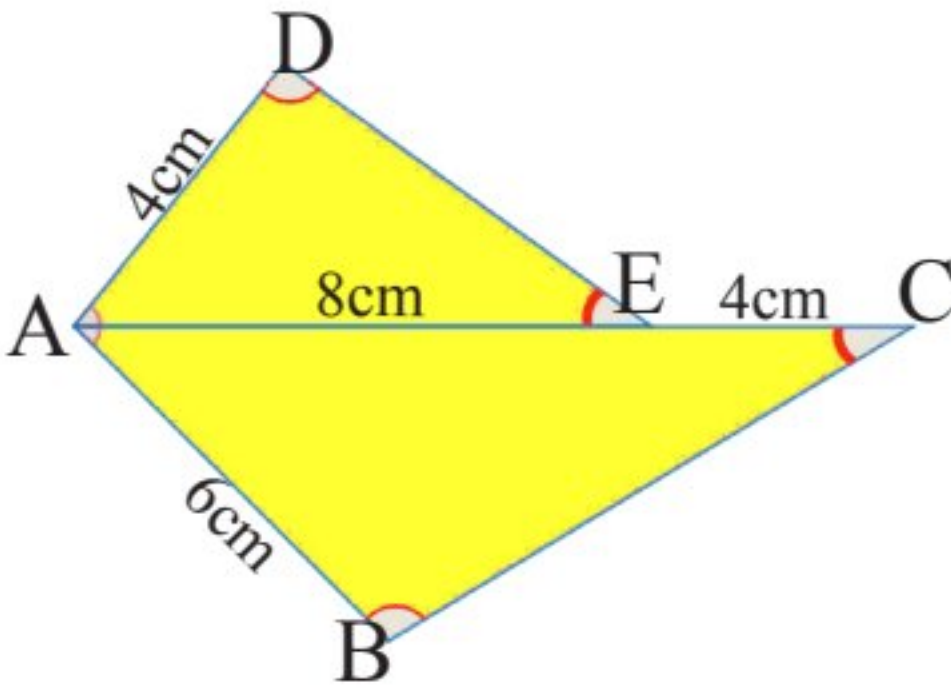
$$\frac{DN}{AB} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{NE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{DN}{AB}$$

∴ المثلثين متشابهان

$$m\angle A = m\angle N, m\angle B = m\angle D, m\angle C = m\angle E$$

14

بيّن ان المثلثين ABC, ADE في الشكل المجاور متشابهان واكتب نسبة التشابه .



الحل:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad \frac{AE}{AC} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

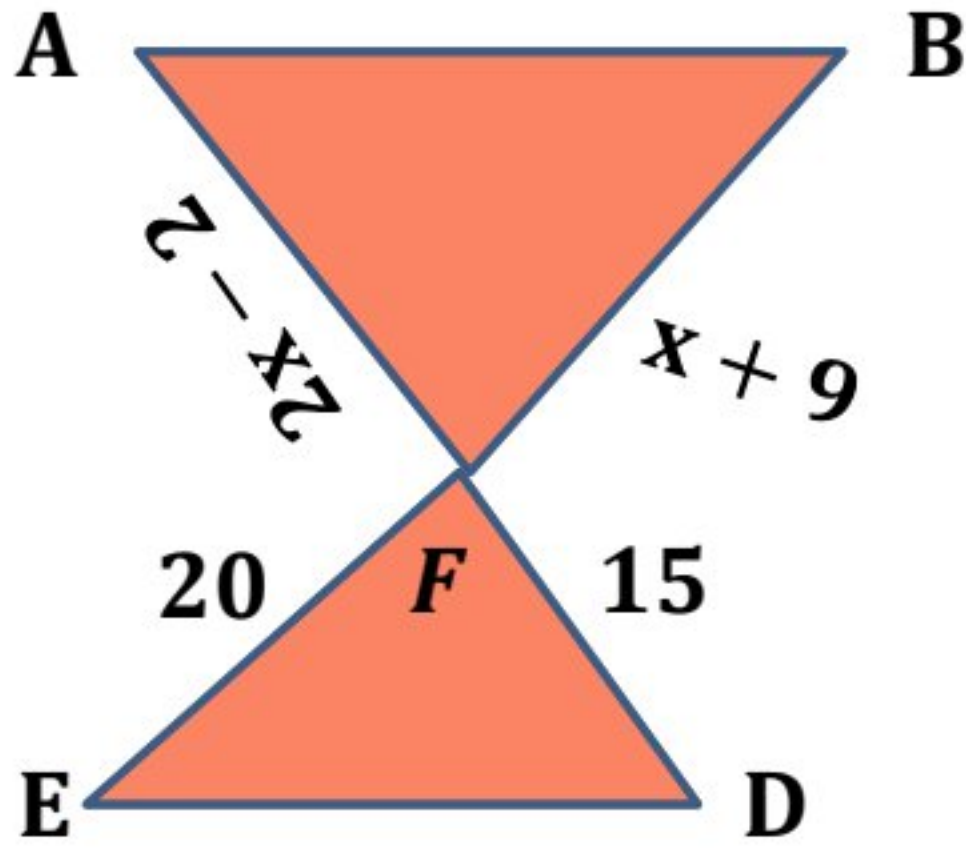
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \text{المثلثين متشابهان} \quad \frac{2}{3} \text{ نسبة التشابه هي}$$

$$\therefore m\angle DAE \cong m\angle CAB \quad \text{المثلثين متشابهين لتساوي زاويتيهم المتناظرتين}$$

تدرب وحل مسائل حياتية

هندسة: إذا علمت ان $\triangle ABF \sim \triangle DEF$ وان $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$ استعمل المعلومات في الشكل المجاور لتجد قيمة x .

15



$$\frac{EF}{FB} = \frac{DF}{FA}$$

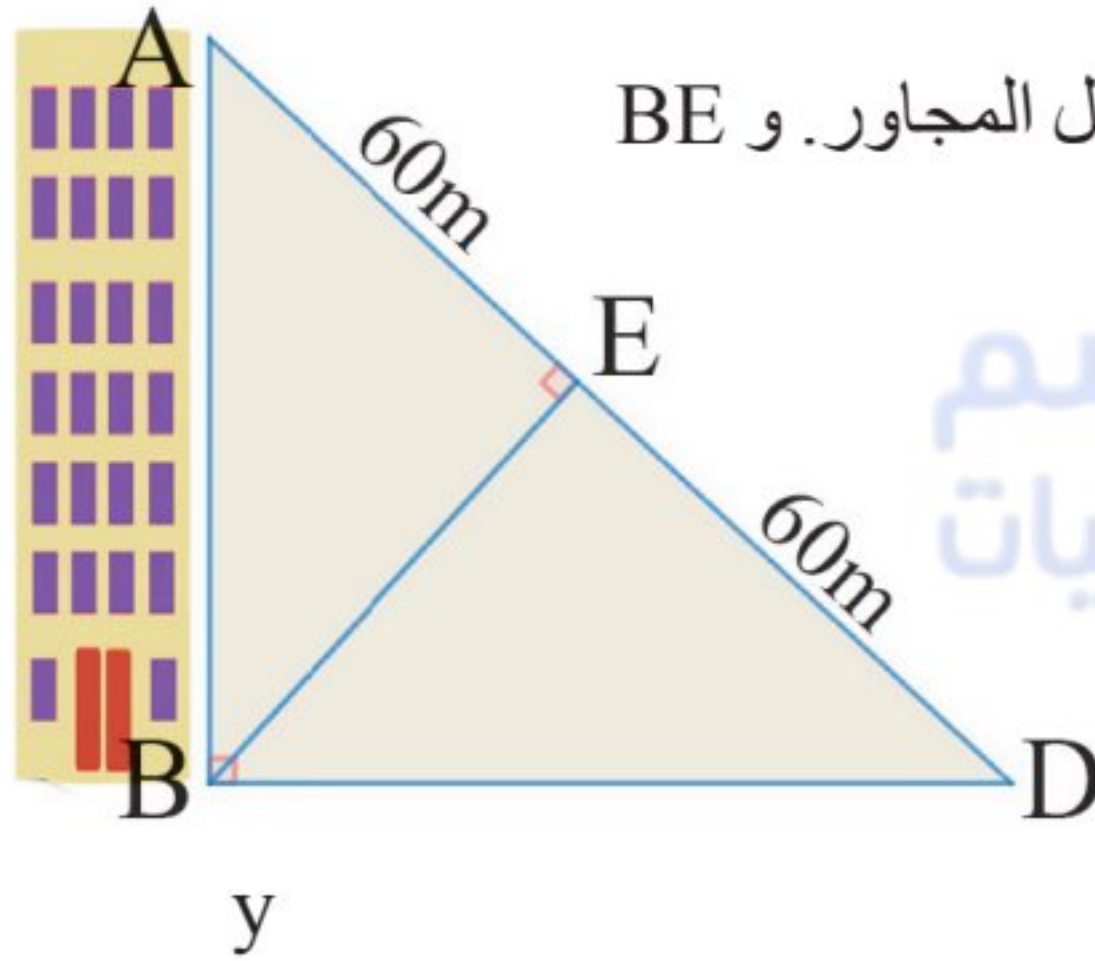
$$\frac{20}{x+9} = \frac{15}{2x-2}$$

الطرفين في الوسطين

$$40x - 40 = 15x + 135 \Rightarrow 40x - 15x = 40 + 135$$

$$25x = 175 \Rightarrow x = \frac{175}{25} = 7$$

الحل:



بنائية: بناءة ارتفاعها يمثل بضلع مثلث قائم الزاوية كما في الشكل المجاور. و BE هو ارتفاع للمثلث ABD برهن ان:

16

i. $\angle EBA \cong \angle D$

ii. $\triangle ABE \sim \triangle DBE$

i) $BE = \frac{1}{2}AD \iff E$ منتصف $\overline{AD}$

$BE = \frac{1}{2} \times 120 = 60\text{cm} \Rightarrow \triangle EBD$ منتظم (متساوي الاضلاع)

قياس كل زاوية من زوايا المثلث $EBD = 60^\circ$

$\angle EBD = 60^\circ, \angle D = 60^\circ \Rightarrow \therefore \angle EBD \cong \angle D$

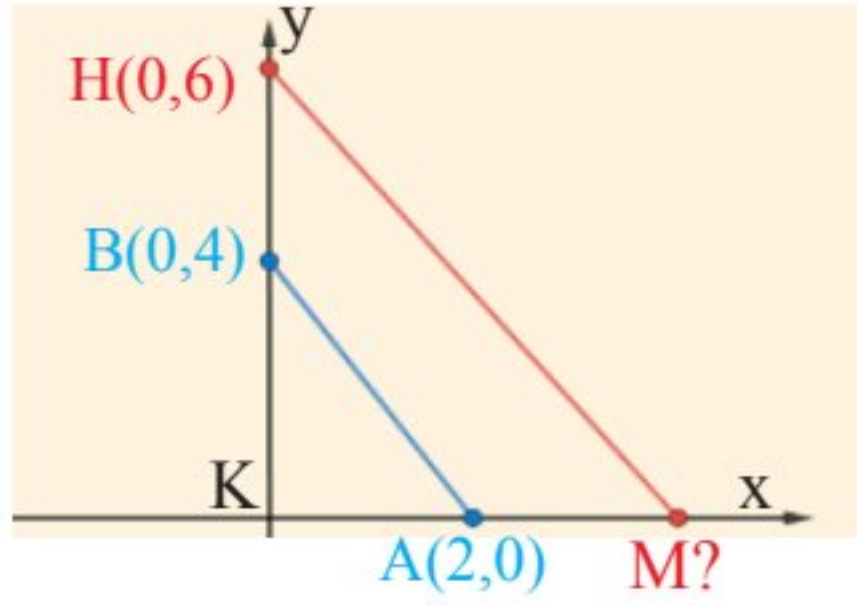
ii) $\triangle ABE : AE = BE = AB = 60\text{cm}$

$\triangle BED : ED = BE = BD = 60\text{cm}$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle BED$

17

في الشكل المجاور المثلثان KAB , KMH متشابهان، جد احداثي M . ونسبة التشابه.



الحل:

$$\frac{KB}{KH} = \frac{KA}{KM} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{2}{M}$$

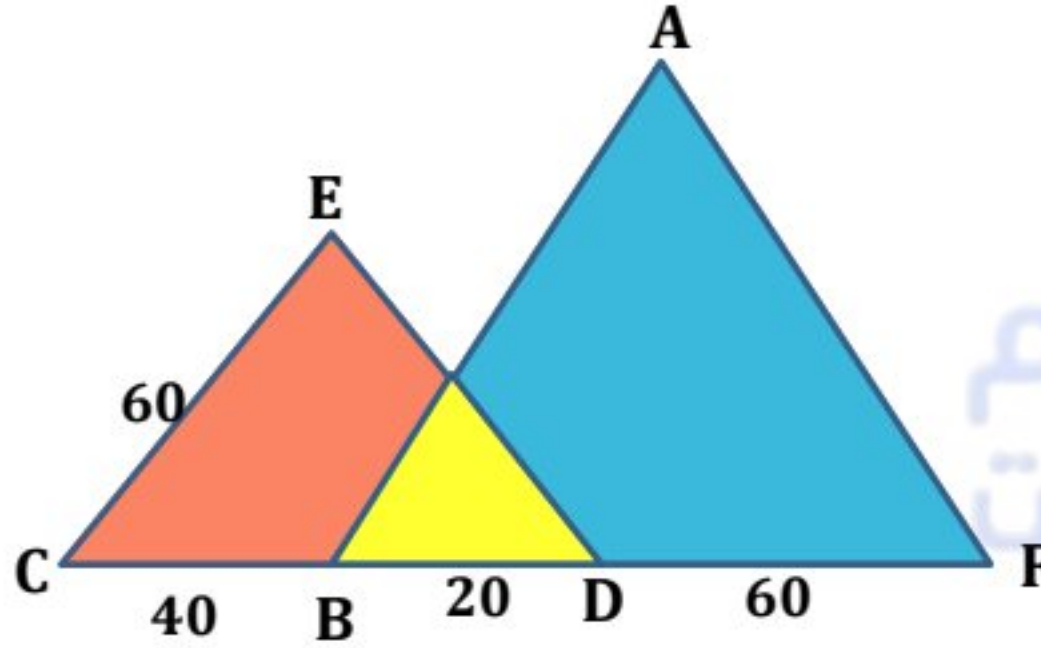
$$4M = 12 \Rightarrow M = \frac{12}{4} = 3 \Rightarrow M(3, 0)$$

نسبة التشابه هي $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

فكر

18

اكتشف: ما طول $\overline{AB}$ في الرسم المجاور؟ علماً أن $\triangle ECD \sim \triangle ABF$.



الحل:

$$\frac{EC}{AB} = \frac{CD}{BF} \Rightarrow \frac{60}{AB} = \frac{60}{80}$$

$$\frac{60}{AB} = \frac{3}{4} \Rightarrow 3 \times AB = 240$$

$$AB = \frac{240}{3} = 80$$

19

تحديد: (2, 5, 10) و (6, 15, x) هي اطوال اضلاع متناظرة في مثلثين متشابهين، ما قيمة x ؟

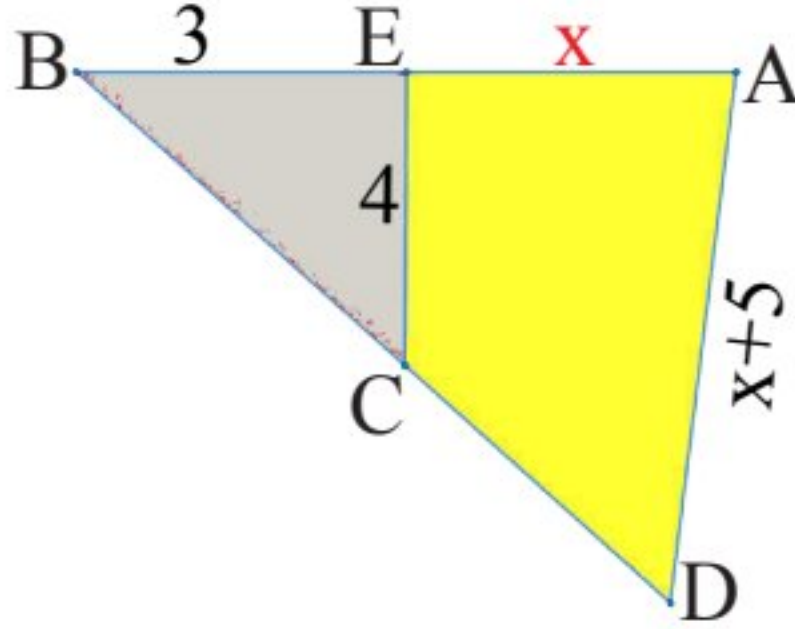
$$\frac{x}{10} = \frac{15}{5} = \frac{6}{2} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{6}{2} \Rightarrow 2x = 60$$

الحل:

$$x = \frac{60}{2} = 30$$

20

حس عددي: جد قيمة x في الشكل المجاور. اذا كان المثلثان ABD, EBC متشابهين. وان: $\overline{EC} \parallel \overline{AD}$



المثلثان ABD, EBC متشابهان .

الحل:

$$\frac{EC}{AD} = \frac{BE}{AB} \Rightarrow \frac{4}{x+5} = \frac{3}{x+3}$$

$$4x + 12 = 3x + 15 \Rightarrow 4x - 3x = 15 - 12 \Rightarrow x = 3$$

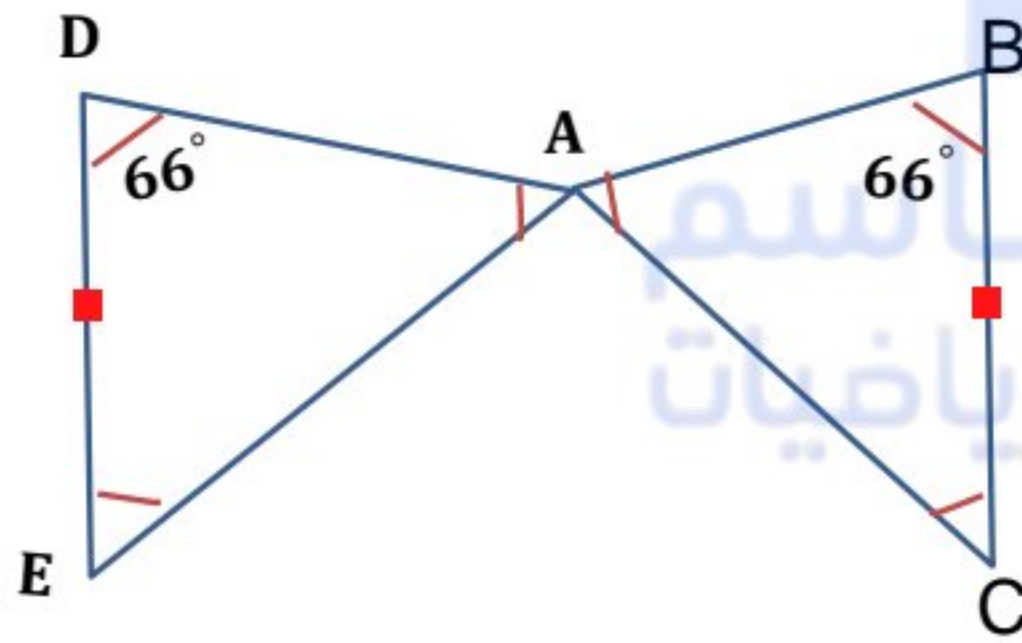
21

مسألة مفتوحة: اشرح لماذا تحتاج قياسات الزوايا للتأكد من تشابه المثلثات، اعط مثلاً على ذلك.

عند تطابق زاويتين في مثلث مع زاويتين في مثلث آخر فان المثلثين يتشابهان وكذلك عند تناسب ضلعين في مثلث مع نظائريهما في مثلث آخر وتطابقت الزاوية المحصورة بينهما مع نظيرتها فان المثلثين متشابهين
مثال : هل المثلثان المجاور متشابهان ؟ وبين السبب

الحل: $\overline{BC} \parallel \overline{ED}$

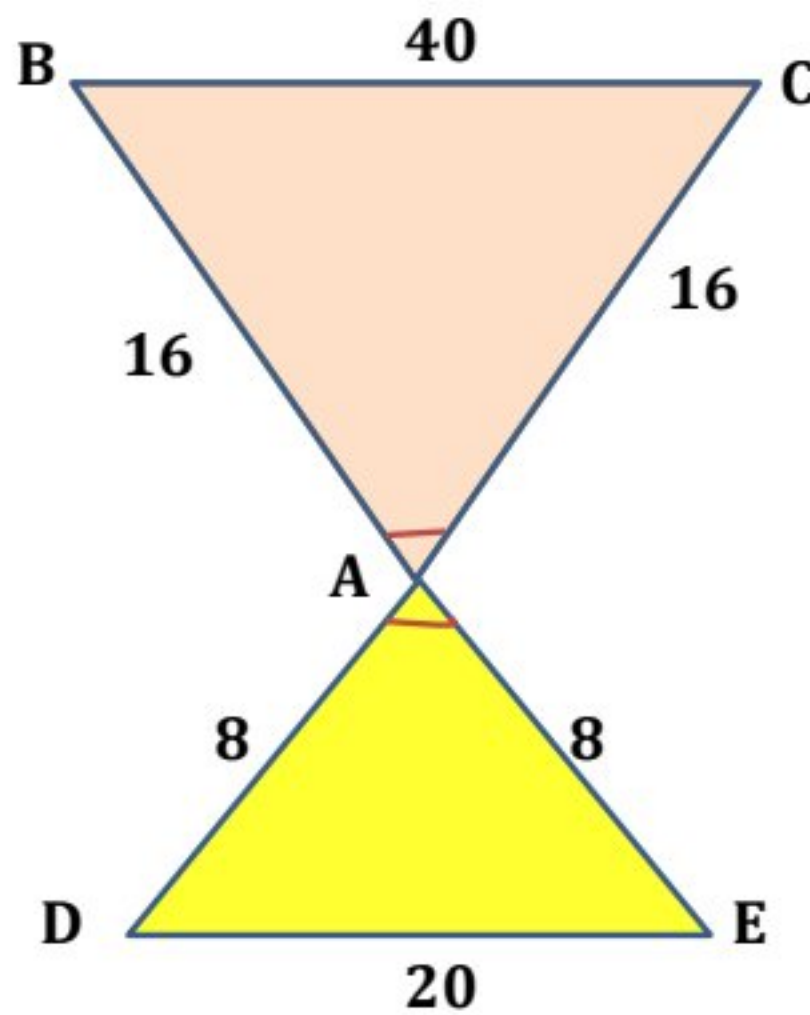
ومن التوازي نجد ان هناك زاويتين من المثلث ABC تتطابقان مع زاويتين من المثلث ADE (زوايا متبادلة)



أذاً المثلثان متشابهان

مسألة عن مثلثين متساويي الساقين تتطابق فيهما زاويتا الرأس وجد نسبة التشابه.

أكتب



الحل:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}, \quad \frac{AE}{AC} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{DE}{BC} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

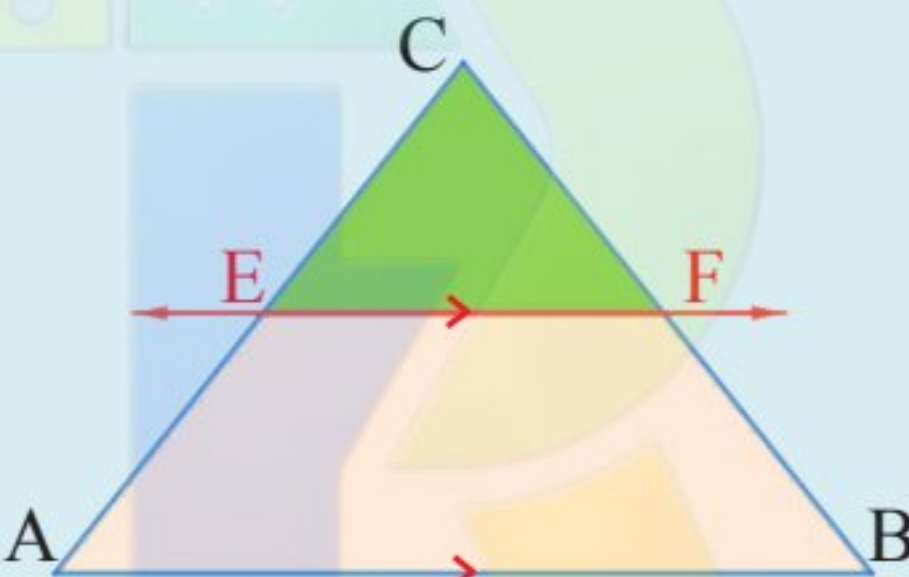


شاهد هذا الدرس
على يوتيوب

الدرس (3-5) التناسب والقياس في المثلثات

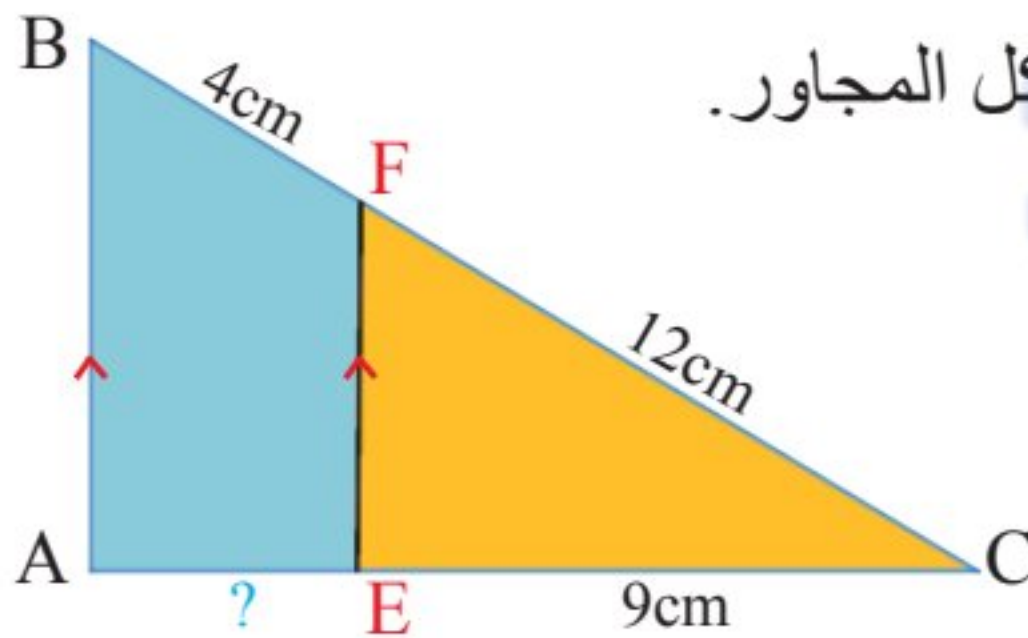
[5-3-1] التناسب في المثلثات

تعلمت سابقاً المثلثات المتشابهة وبعض مبرهنات التشابه للمثلثات، وسوف تتعلم في هذا البند التناسب في المثلثات مستعيناً بالمبرهنات السابقة.

مبرهنة التناسب المثلثي		
النتيجة	المعطى	المبرهنة
$\frac{CE}{EA} = \frac{CF}{FB}$	$\overline{AB} \parallel \overline{EF}$ 	إذا وازى مستقيم ضلعاً من اضلاع مثلث وقطع الضلعين الآخرين في نقطتين مختلفتين فإنه يقسم الضلعين الى قطع متناسبة الاطوال (من دون برهان)

مثال (1)

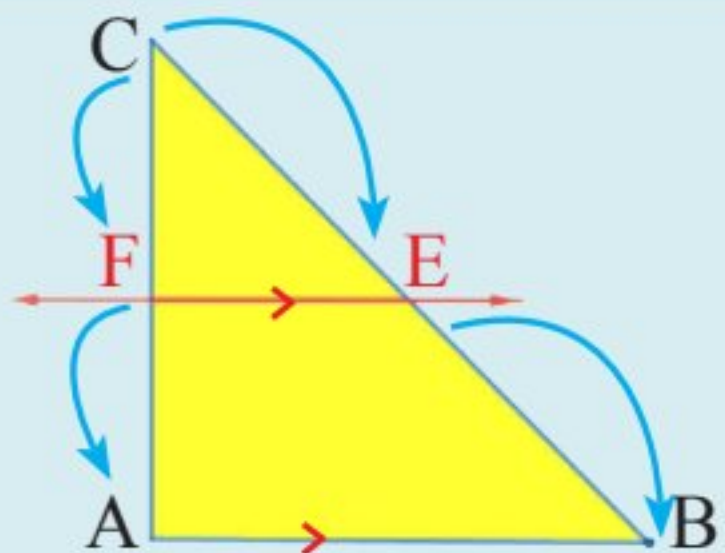
جد طول قطعة المستقيم AE علماً ان: $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$ في الشكل المجاور.



$$\frac{CE}{EA} = \frac{CF}{FB}$$

$$\frac{9}{EA} = \frac{12}{4} \Rightarrow EA = \frac{4 \times 9}{12} = \frac{36}{12} = 3\text{cm}$$

مبرهنة التناسب المثلثي
التعويض
والتبسيط

عكس مبرهنة التناسب المثلثي		
النتيجة	المعطى	المبرهنة
$\overline{EF} \parallel \overline{AB}$	$\frac{CE}{EB} = \frac{CF}{FA}$ 	إذا قسم مستقيم ضلعين في مثلث الى قطع متناسبة فإنه يكون موازياً للضلع الثالث (من دون برهان)

مثال (2)

في الشكل المجاور برهن ان $\overline{MK} \parallel \overline{NJ}$.

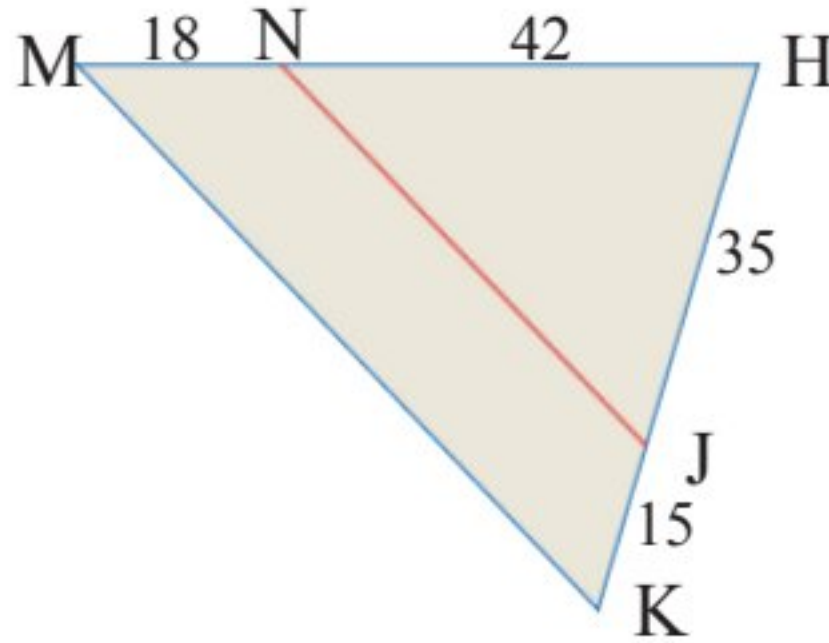
نجد نسبة الاجزاء المتناسبة

$$\frac{HJ}{JK} = \frac{35}{15} = \frac{7}{3}, \frac{HN}{NM} = \frac{42}{18} = \frac{7}{3}$$

$$\therefore \frac{HJ}{JK} = \frac{HN}{NM} = \frac{7}{3}$$

$$\therefore \overline{MK} \parallel \overline{NJ}$$

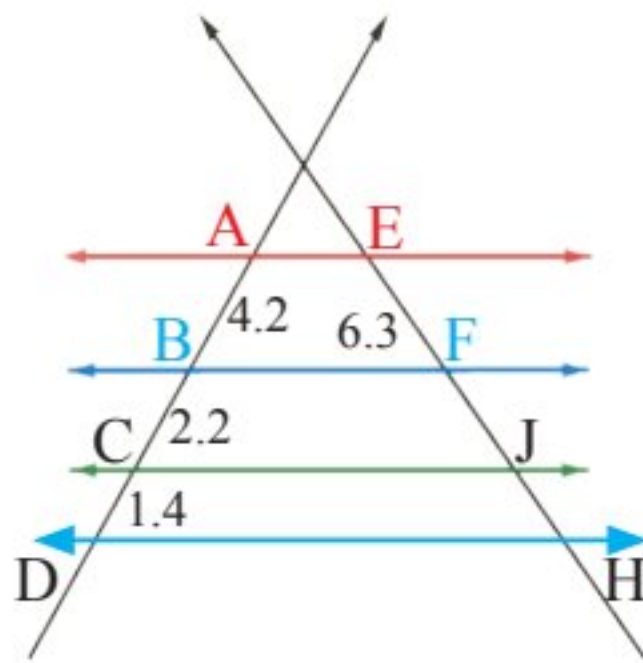
عكس مبرهنة التناسب المثلثي



مبرهنة طالس		
النتيجة	المعطى	المبرهنة
$\frac{AB}{BC} = \frac{DF}{FE}$		اذا قطعت ثلاثة مستقيمات متوازية او اكثر بمستقيمين فإن القطع المحددة بالمستقيميات المتوازية تكون متناسبة.

مثال (3)

استعمل مهندس الرسم المنظوري (هو رسم الاجسام البعيدة بحيث تبدو اصغر والاجسام القريبة حيث تبدو اكبر، مع الحفاظ على هيئتها وتناسب مقاييسها لتبدو ثلاثية الابعاد) ليرسم خطوطاً اولية تساعد على رسم اعمدة اتصالات متوازية، تحقق من رسمه بقياس المسافات بين الاعمدة، كم طول $\overline{FH}$ ؟



$$\overline{AE} \parallel \overline{BF} \parallel \overline{CJ} \parallel \overline{DH}$$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{EF}{FH}$$

$$BD = BC + CD = 2.2 + 1.4 = 3.6m$$

$$\frac{4.2}{3.6} = \frac{6.3}{FH} \Rightarrow FH = \frac{6.3 \times 3.6}{4.2} = 5.4m$$

مبرهنة طالس

بالتعويض والتبسيط



شاهد هذا الدرس
على يوتيوب

6

[5-3-2] التناسب والقياس

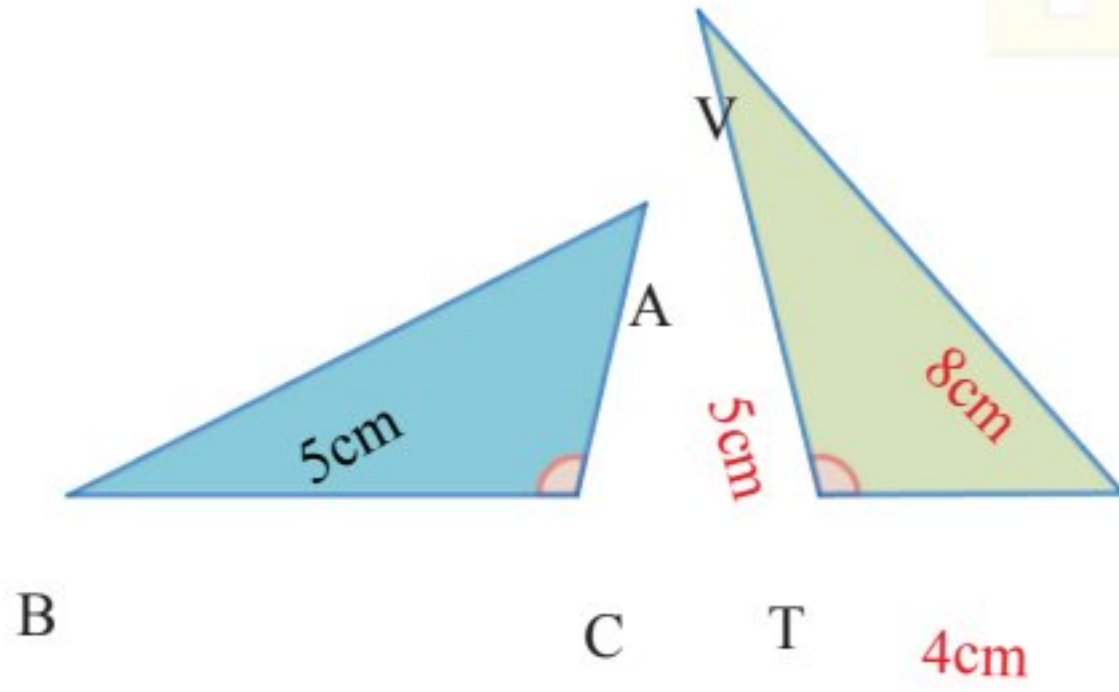
لايجاد نسبة المحيطين ونسبة المساحتين لمثلثان متشابهان،
يمكنني استعمال المبرهنة التالية (من دون برهان).

مبرهنة: اذا تشابه مثلثان بنسبة تشابه $\frac{a}{b}$ فإن نسبة المحيطين للمثلثين تساوي $\frac{a}{b}$ ونسبة المساحتين للمثلثين $\frac{a^2}{b^2}$

اذا كان المثلثان متشابهين، فإن النسبة بين محيطيهما تساوي النسبة بين اطوال الاضلاع المتناظرة.

مثال (4)

ليكن $\Delta WVT \sim \Delta ABC$ جد محيط ΔABC .



$$P_1 = 8 + 5 + 4 = 17\text{cm}$$

نفرض P_1 محيط المثلث WVT

P_2

استعمل التناسب لاجد محيط المثلث ABC

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{AB}{WV} \Rightarrow \frac{P_2}{17} = \frac{5}{8}$$

نفرض P_2 محيط المثلث ABC

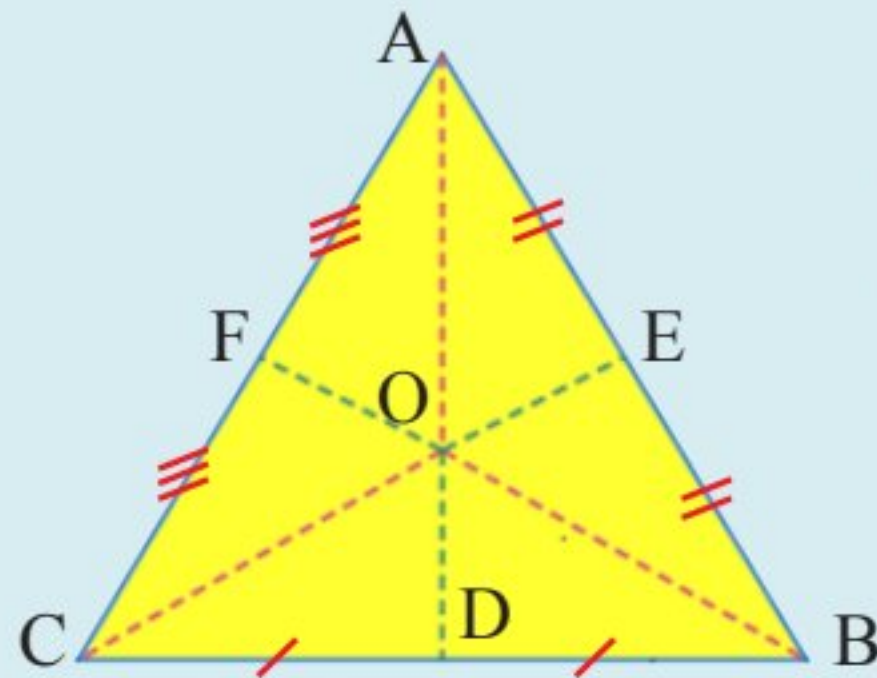
$$\therefore P_2 = 10.625\text{cm}$$

اذن محيط المثلث ABC يساوي

تعلمت سابقاً ثلاثة تحويلات هندسية: الانسحاب، الانعكاس، والدوران، وهذه التحويلات تحافظ على الهيئة والقياسات.
سوف نتعلم في هذا الدرس تحويلاً جديداً يحافظ على الهيئة من دون حفظ القياسات، انه التناسب الهندسي Dilation.

(مبرهنات من دون برهان) في كلّ مثلث:

مبرهنة: القطع المستقيمة المتوسطة للمثلث تتلاقى في نقطة واحدة تسمى مركز ثقل المثلث، تقسم كل منها بنسبة $\frac{2}{3}$ من جهة الرأس الى منتصف الضلع المقابل.



$$AO = \frac{2}{3} AD, BO = \frac{2}{3} BF, CO = \frac{2}{3} CE$$

$$OD = \frac{1}{3} AD, OF = \frac{1}{3} BF, OE = \frac{1}{3} CE$$

[5-3-3] التناسب الهندسي احداثياً

التناسب الهندسي: هو تحويل يغير مقاييس الاشكال الهندسية من دون تغيير هيئتها فالشكل وصورته بالتناسب الهندسي يكونان دائماً متشابهين، مركز التناسب هو نقطة الاصل. سنقتصر دراسة التناسب الهندسي في هذا الدرس على المستوي الاحداثي، اذا تعاملت مع تناسب هندسي معاملته الهندسي M فسوف يكون بإمكانك ان تجد صورة النقطة بضرب احداثياتها في M. $(x, y) \rightarrow (Mx, My)$

مثال (5)

يبين الرسم المجاور موقع صورة على شبكة الانترنت، ارسم حدود الصورة بعد تحويلها بتناسب هندسي نسبته $\frac{5}{3}$.

الخطوة (1): اضرب معامل التناسب الهندسي في احداثيات الرؤوس.

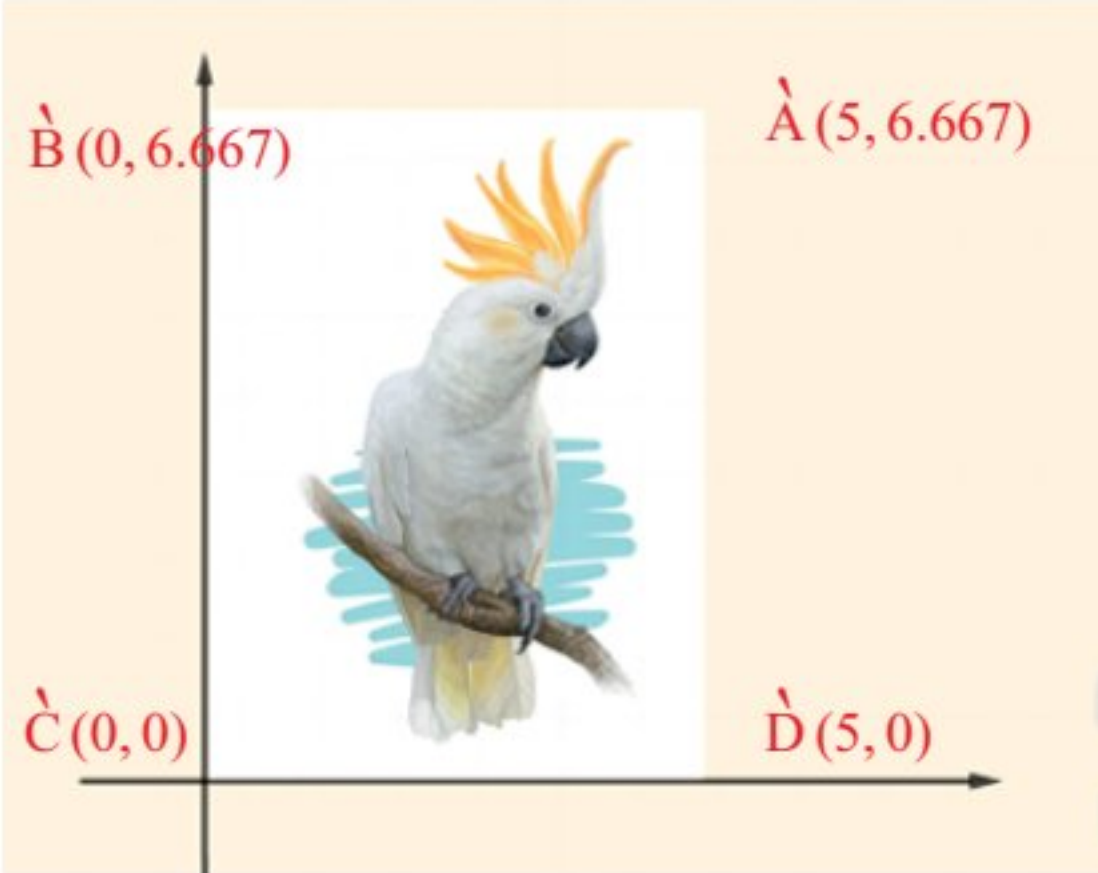
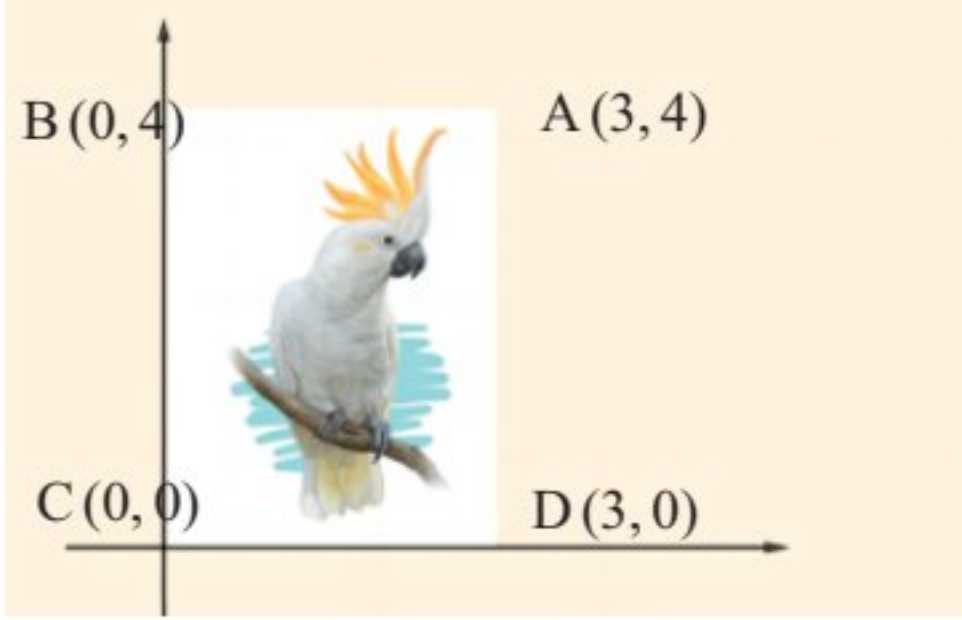
$$A(3, 4) \rightarrow \left(\frac{5}{3} \times 3, \frac{5}{3} \times 4\right) \rightarrow \hat{A}(5, 6.667)$$

$$B(0, 4) \rightarrow \left(\frac{5}{3} \times 0, \frac{5}{3} \times 4\right) \rightarrow \hat{B}(0, 6.667)$$

$$C(0, 0) \rightarrow \left(\frac{5}{3} \times 0, \frac{5}{3} \times 0\right) \rightarrow \hat{C}(0, 0)$$

$$D(3, 0) \rightarrow \left(\frac{5}{3} \times 3, \frac{5}{3} \times 0\right) \rightarrow \hat{D}(5, 0)$$

الخطوة (2): اضع النقاط $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ على المستوي الاحداثي ثم اصل بينهم لاحصل على المستطيل $\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}$.

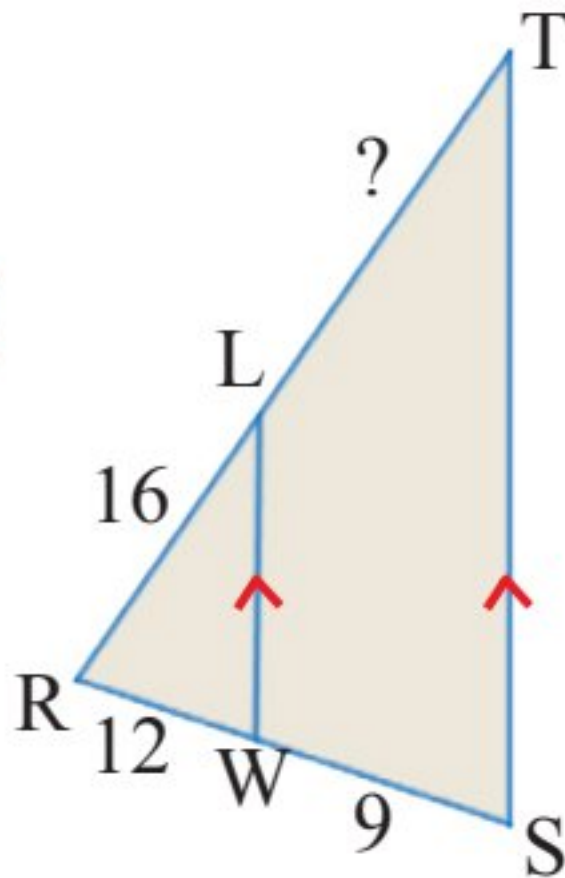


تأكّد من فهمك

جد طول القطعة المستقيمة المجهولة في الاشكال الاتية:

الحل: الضلع المجهول هو LT

1

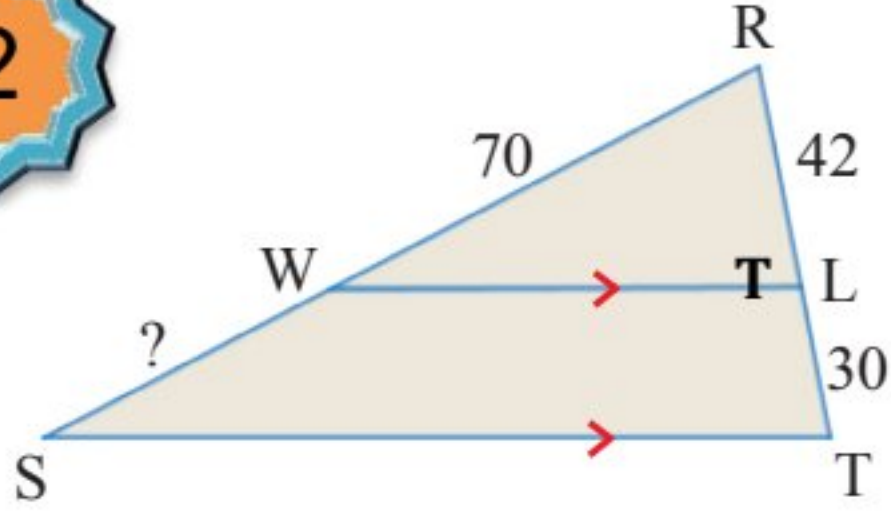


$$\frac{RL}{LT} = \frac{RW}{WS} \quad \text{مبرهنة التناسب المثلثي}$$

$$\frac{16}{LT} = \frac{12}{9} \quad \text{الطرفين في الوسطين}$$

$$12 \times LT = 144 \Rightarrow LT = \frac{144}{12} = 12$$

2



$$\frac{RW}{WS} = \frac{RL}{LT} \quad \text{مبرهنة التناسب المثلثي}$$

$$\frac{70}{WS} = \frac{42}{30} \Rightarrow \frac{70}{WS} = \frac{7}{5} \quad \text{الطرفين في الوسطين}$$

$$7 \times WS = 350 \Rightarrow WS = \frac{350}{7} = 50$$

الحل: الضلع المجهول هو WS

3

في المثلث MQP، $MQ = 12.5, MR = 4.5, MP = 25, MN = 9$ حيث $N \in \overline{MP}, R \in \overline{MQ}$ هل $\overline{RN} \parallel \overline{QP}$ ؟ برر اجابتك.

الحل:

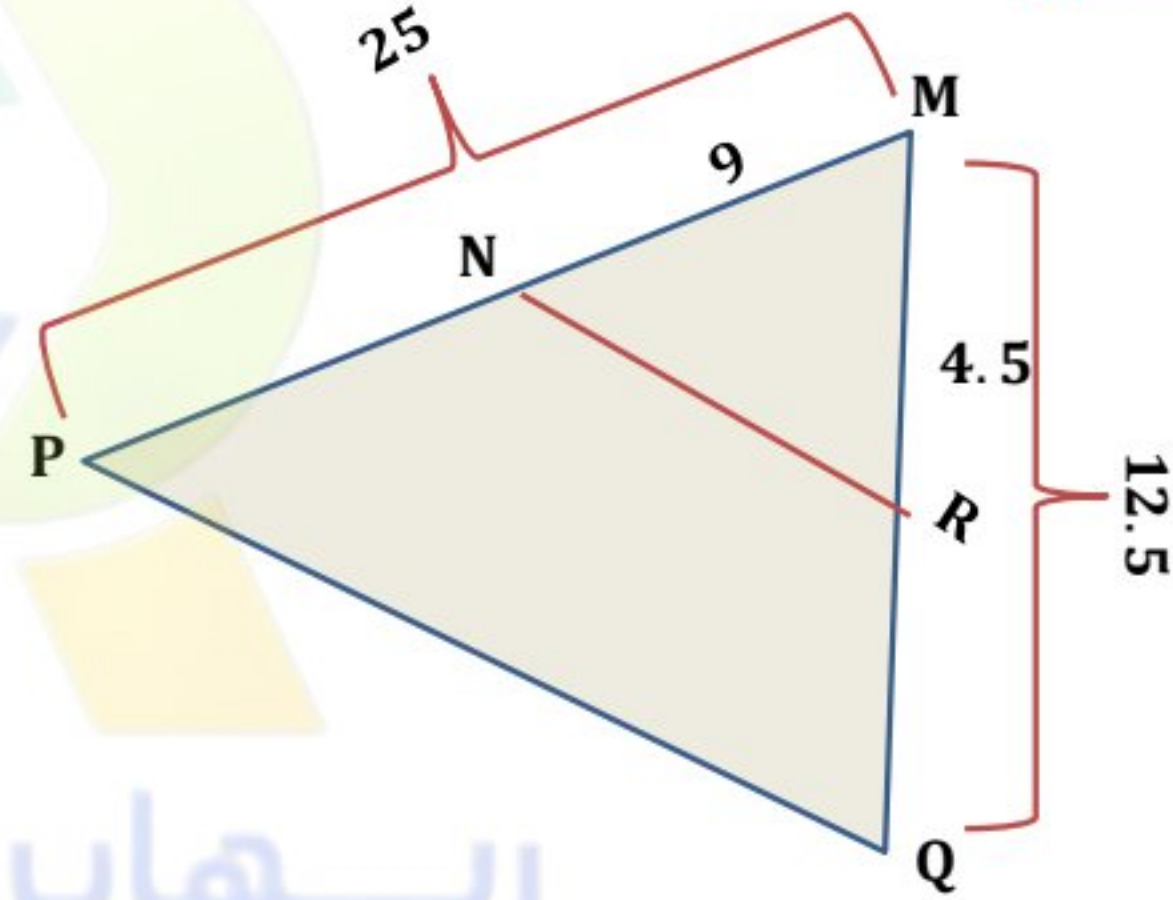
$$NP = MP - MN = 25 - 9 = 16$$

$$RQ = MQ - MR = 12.5 - 4.5 = 8$$

$$\frac{9}{16} = \frac{4.5}{8} \Rightarrow$$

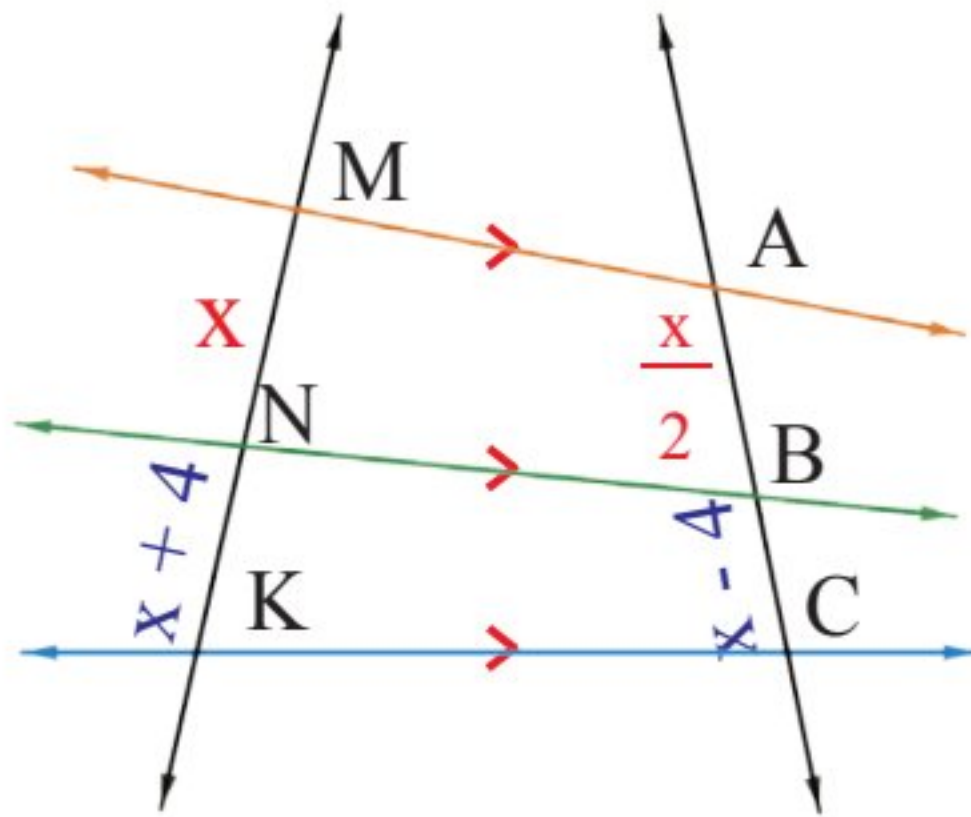
$$\therefore \frac{MN}{NP} = \frac{MR}{RQ}$$

$\overline{RN} \parallel \overline{QP}$ عكس مبرهنة التناسب المثلثي



4

في الرسم المجاور جد طول $\overline{MN}, \overline{KN}$



$$\frac{MN}{NK} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{x}{x+4} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$$

$$x(x-4) = \frac{x}{2}(x+4) \} \times 2$$

$$2x(x-4) = x(x+4) \Rightarrow 2x^2 - 8x = x^2 + 4x$$

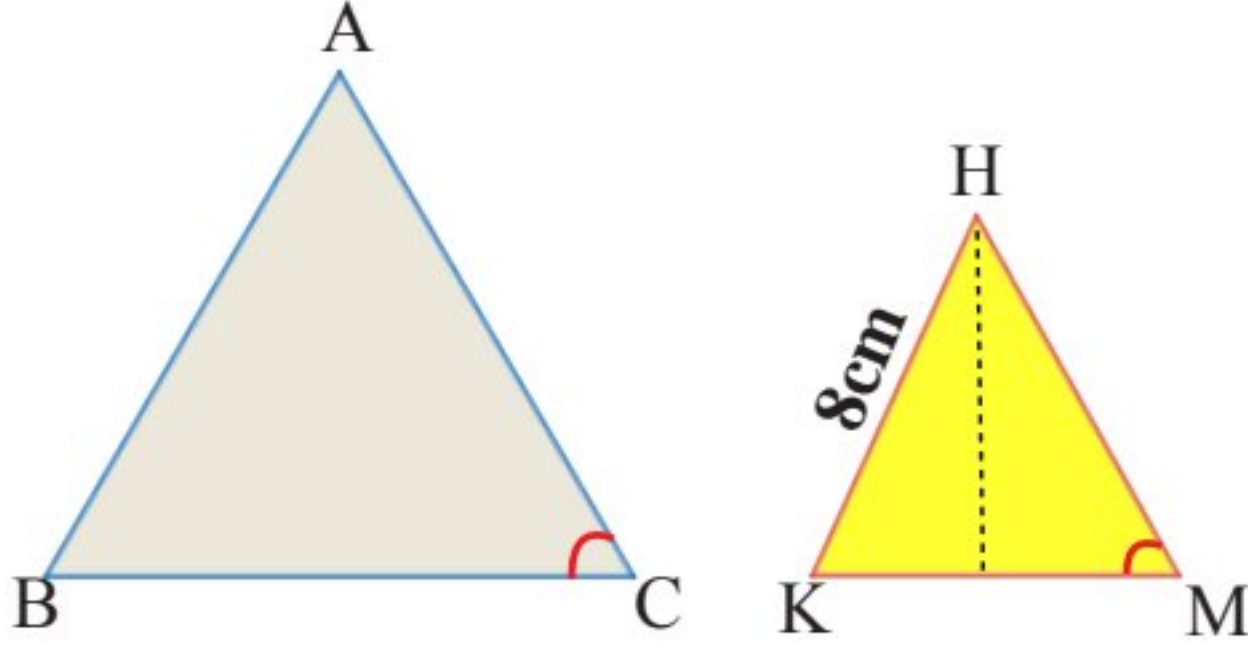
$$2x^2 - 8x - x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x^2 - 12x = 0$$

$$x(x-12) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ يهمل} \text{ أو } x-12 = 0 \Rightarrow x = 12$$

$$\overline{MN} = x = 12, \quad \overline{KN} = x + 4 = 12 + 4 = 16$$

5

المثلثان ABC, HKM متشابهان، مساحة $\triangle ABC$ ضعف مساحة $\triangle HKM$ ، ما طول $\overline{AB}$ ؟



نفرض ان مساحة المثلث ABC تساوي $2P$

نفرض ان مساحة المثلث HKM تساوي P

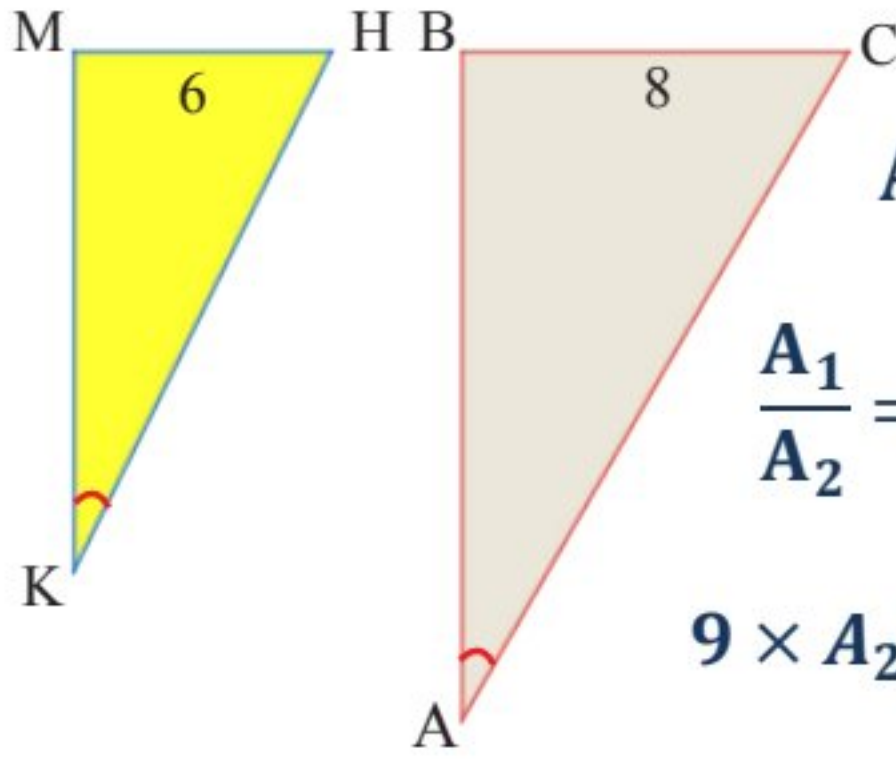
$$2P = ABC$$

$$P = HKM$$

$$\frac{2P}{P} = \frac{(AB)^2}{(8)^2} \Rightarrow AB = 8\sqrt{2} \text{ cm}$$

6

المثلثان ABC, KMH متشابهان، جد مساحة ومحيط المثلث ABC علماً ان محيط المثلث KMH يساوي 18cm ومساحته 15cm^2 .



الحل: نفرض A_1 مساحة المثلث KMH . نفرض A_2 مساحة المثلث ABC

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{(MH)^2}{(BC)^2} \Rightarrow \frac{15}{A_2} = \frac{(6)^2}{(8)^2} \Rightarrow \frac{15}{A_2} = \frac{36}{64} \Rightarrow \frac{15}{A_2} = \frac{9}{16}$$

الطرفين في الوسطين

$$9 \times A_2 = 240 \Rightarrow A_2 = \frac{240}{9} = 26.6\text{cm}^2$$

مساحة المثلث ABC

نفرض P_1 محيط المثلث KMH . نفرض P_2 محيط المثلث ABC

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{MH}{BC} \Rightarrow \frac{8}{P_2} = \frac{6}{8} \Rightarrow \frac{8}{P_2} = \frac{3}{4}$$

الطرفين في الوسطين

$$3 \times P_2 = 32 \Rightarrow P_2 = \frac{32}{3} = 10.6 \text{ cm}$$

محيط المثلث ABC

7 ABC مثلث حيث $A(6,0), B(-3, \frac{3}{2}), C(3, -6)$ ، جد صورته بعد تصغيره بمعامل $\frac{1}{3}$ ، علماً ان مركز التناسب هو نقطة الاصل.



الحل:

$$(x, y) \rightarrow (Mx, My)$$

$$A(6, 0) \rightarrow A' \left(\frac{1}{3} \times 6, \frac{1}{3} \times 0 \right) \rightarrow A'(2, 0)$$

$$B \left(-3, \frac{3}{2} \right) \rightarrow B' \left(\frac{1}{3} \times (-3), \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \right) \rightarrow B' \left(-1, \frac{1}{2} \right)$$

$$C(3, -6) \rightarrow C' \left(\frac{1}{3} \times 3, \frac{1}{3} \times (-6) \right) \rightarrow C'(1, -2)$$

تدرب وحل التمرينات

8 في المثلث ACD ، $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$ ، جد قيمة x و $\overline{ED}$ اذا كان: $ED = 3x - 3, BC = 8, AE = 3, AB = 2$.



الحل:

$$\frac{2}{8} = \frac{3}{3x-3}$$

$$24 = 6x - 6$$

$$\Rightarrow 6x = 24 + 6$$

$$6x = 30 \quad \text{بقسمة الطرفين على 6}$$

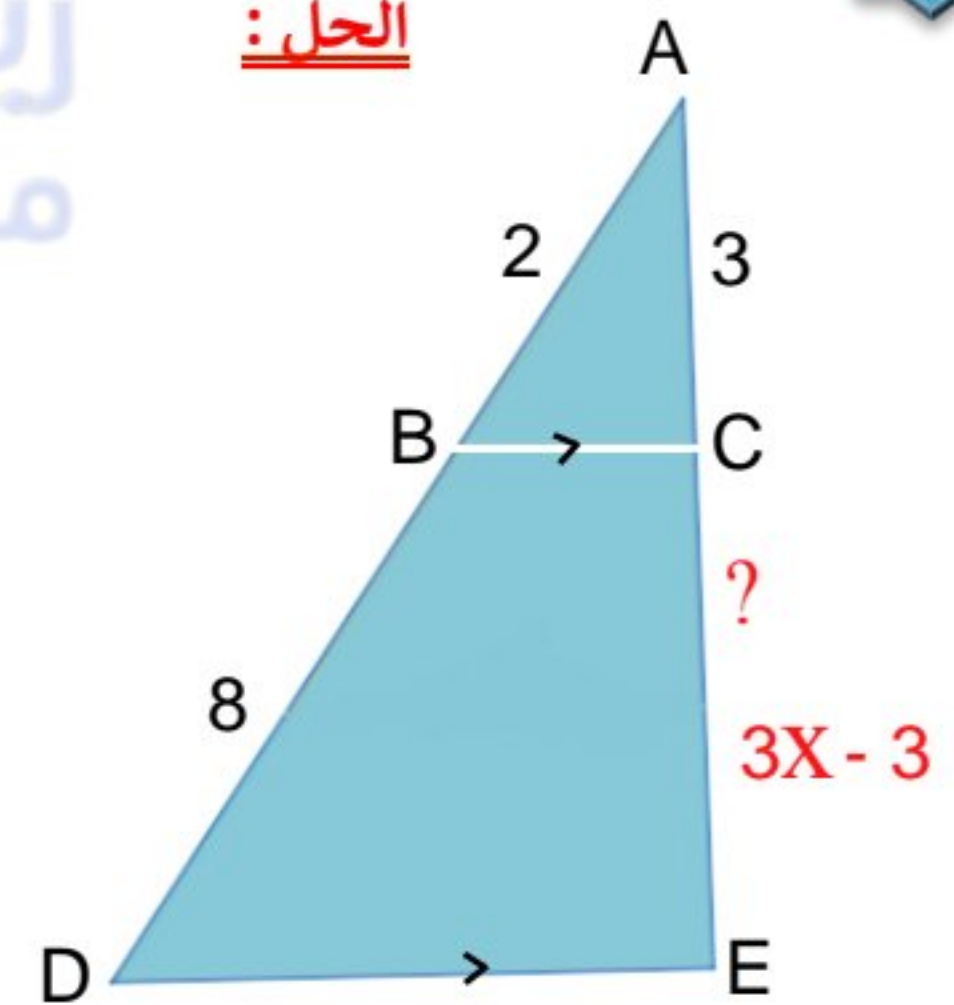
$$x = 5$$

$$\Rightarrow ED = 3x - 3$$

$$ED = 3(5) - 3$$

$$ED = 15 - 3$$

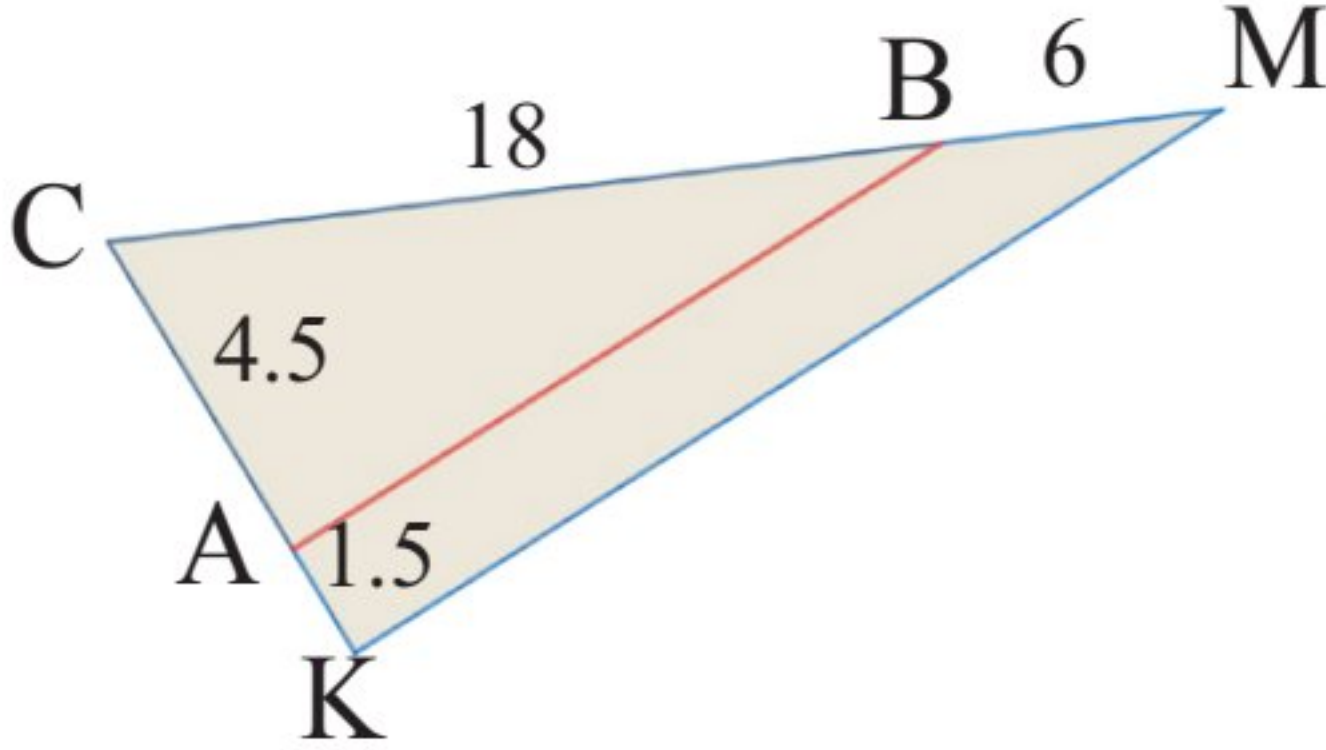
$$ED = 12$$



9

حدّد ما اذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{MK}$ في الشكل المجاور.

الحل:



$$\frac{CA}{AM} = \frac{4.5}{1.5} = 3, \quad \frac{CB}{BK} = \frac{18}{6} = 3$$

$$\therefore \frac{CA}{AM} = \frac{CB}{BK} = 3 \Rightarrow \therefore \overline{AB} \parallel \overline{MK}$$

10

نسبة مساحة المثلث ABC الى نسبة مساحة المثلث KMH تساوي $\frac{16}{25}$ ما نسبة تشابه المثلثين وما النسبة التشابه بين محيطيهما ؟

الحل:

$$\frac{a^2}{b^2} = \text{نسبة تشابه المساحتين}$$

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{16}{25} \Rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{16}{25}} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{4}{5}$$

نسبة تشابه المثلثين

$$\frac{a}{b} = \frac{4}{5} \Leftarrow \frac{a}{b} = \text{نسبة التشابه بين محيطيهما}$$

11

جد صورة المثلث ABC حيث: $A(-1, -1), B(1, -2), C(1, 2)$ تحت تأثير تناسب معاملته 2.

الحل:

$$(x, y) \rightarrow (Mx, My)$$

$$A(-1, -1) \rightarrow A'(2 \times (-1), 2 \times (-1)) \rightarrow A'(-2, -2)$$

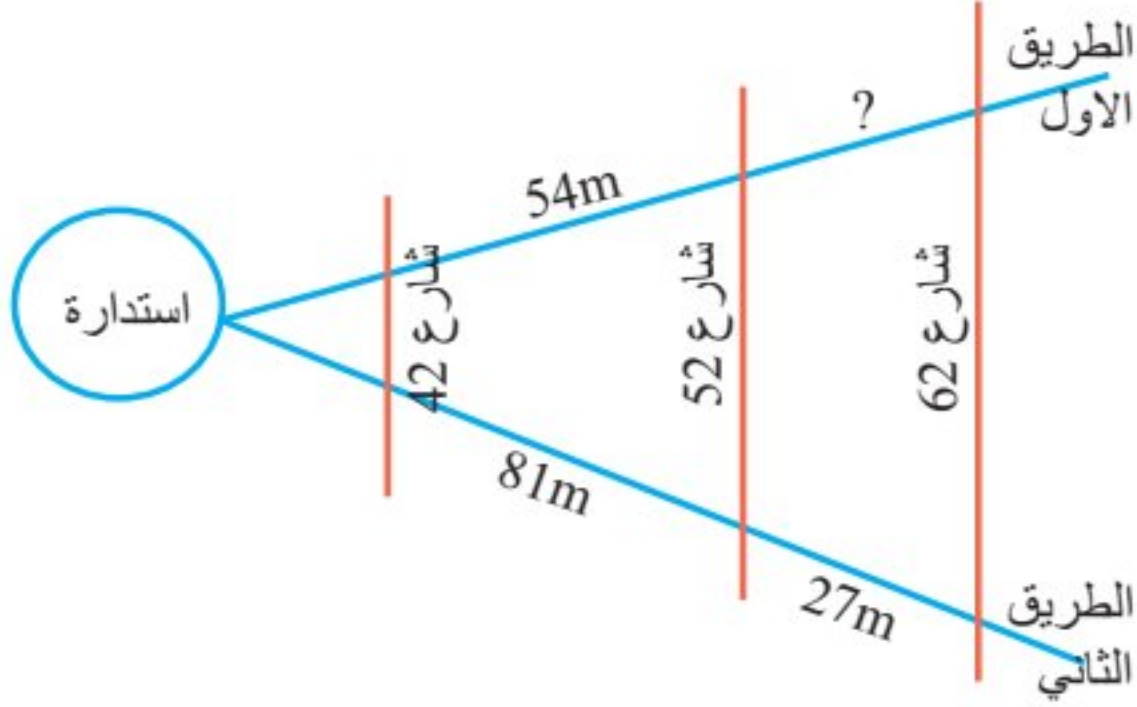
$$B(1, -2) \rightarrow B'(2 \times 1, 2 \times (-2)) \rightarrow B'(2, -4)$$

$$C(1, 2) \rightarrow C'(2 \times 1, 2 \times 2) \rightarrow C'(2, 4)$$

تدرب وحل مسائل حياتية

12

طرق: تمثل الخريطة المجاورة بعض الشوارع المتوازية وطريقين عبرها، ما طول الطريق الاول بين الشارع 62 والشارع 52؟



الحل:

$$\frac{54}{x} = \frac{81}{27} \Rightarrow \frac{54}{x} = \frac{3}{1} \quad \text{الطرفين في الوسطين}$$

$$3x = 54 \Rightarrow x = \frac{54}{3} = 18 \text{ m}$$

13

هندسة: جد صورة الشكل الرباعي حيث: $A(2, 6), B(-4, 0), C(-4, -8), D(-2, -12)$ تحت تأثير تناسب معاملته $\frac{1}{4}$

$$(x, y) \rightarrow (Mx, My)$$

الحل:

$$A(2, 6) \rightarrow A' \left(\frac{1}{4} \times 2, \frac{1}{4} \times 6 \right) \rightarrow A' \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

$$B(-4, 0) \rightarrow B' \left(\frac{1}{4} \times (-4), \frac{1}{4} \times 0 \right) \rightarrow B'(-1, 0)$$

$$C(-4, -8) \rightarrow C' \left(\frac{1}{4} \times (-4), \frac{1}{4} \times (-8) \right) \rightarrow C'(-1, -2)$$

$$D(-2, -12) \rightarrow D' \left(\frac{1}{4} \times (-2), \frac{1}{4} \times (-12) \right) \rightarrow D' \left(-\frac{1}{2}, -3 \right)$$

فكر

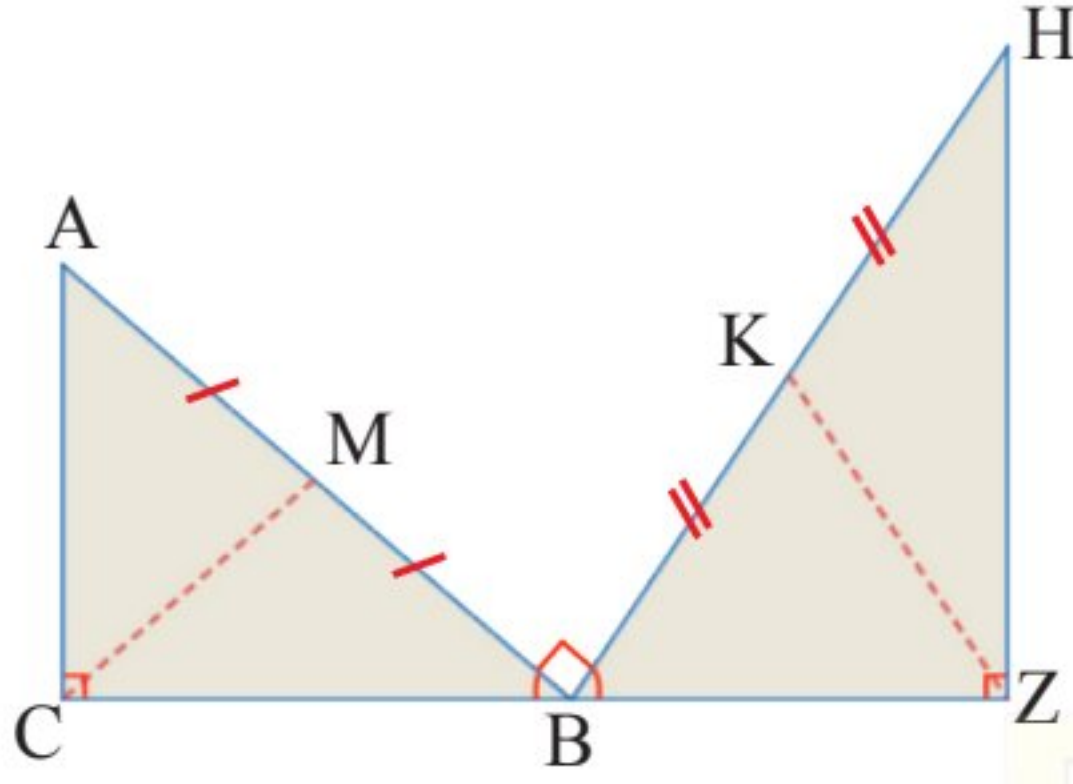
إذا علمت ان طول القطعة المستقيمة الواصلة من رأس القائمة الى منتصف الوتر تساوي نصف طول الوتر اجب عن السؤال 14.

14

تحذ: في الرسم المجاور M منتصف $\overline{AB}$ و K منتصف $\overline{HB}$ ، الزوايا:

$$\left(\frac{KZ}{CM}\right)^2 = \frac{(BZ)^2 + (ZH)^2}{(BC)^2 + (CA)^2} \text{ برهن ان } \angle Z, \angle ABH, \angle C$$

الحل:



نفرض مساحة $\Delta BZH = A_1$ و مساحة $\Delta ABC = A_2$

مساحة المثلث = $\frac{1}{2} \times \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$

$\Leftarrow$ المثلثان KHZ, KZB متساوي الساقين فيه $KZ = BZ, KZ = HZ$

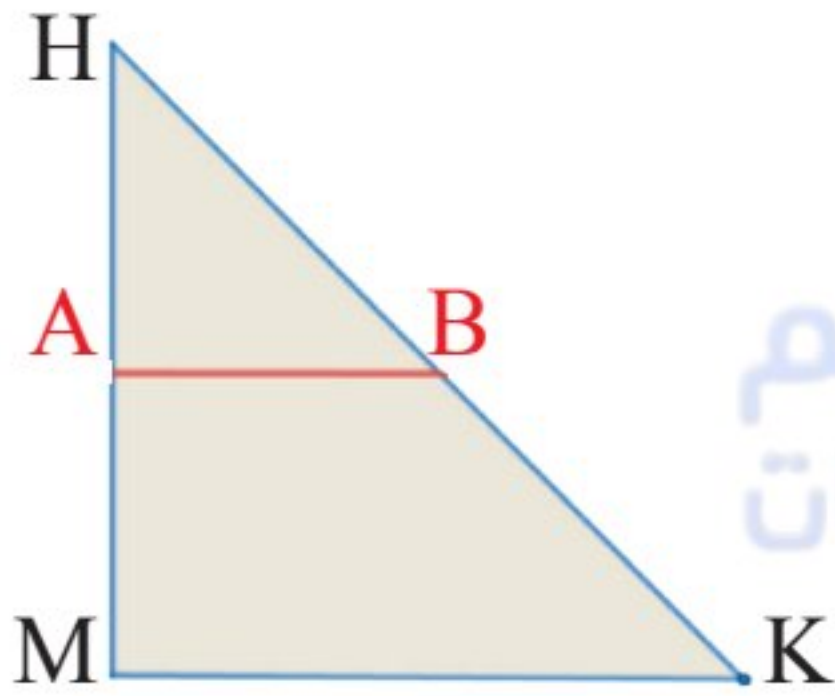
المثلثان ACM, MCB فيه $CM = BC, CM = AC$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{1}{2} BZ \times HZ}{\frac{1}{2} BC \times AC} = \frac{KZ \times KZ}{CM \times CM} = \frac{(KZ)^2}{(CM)^2} = \left(\frac{KZ}{CM}\right)^2$$

أكتب

ما تستطيع من تناسبات اذا علمت ان $\overline{MK} \parallel \overline{AB}$ في الشكل المجاور.

الحل:



$$\frac{HA}{HM} = \frac{HB}{HK}$$

$$\frac{HM}{AM} = \frac{HK}{BK}$$

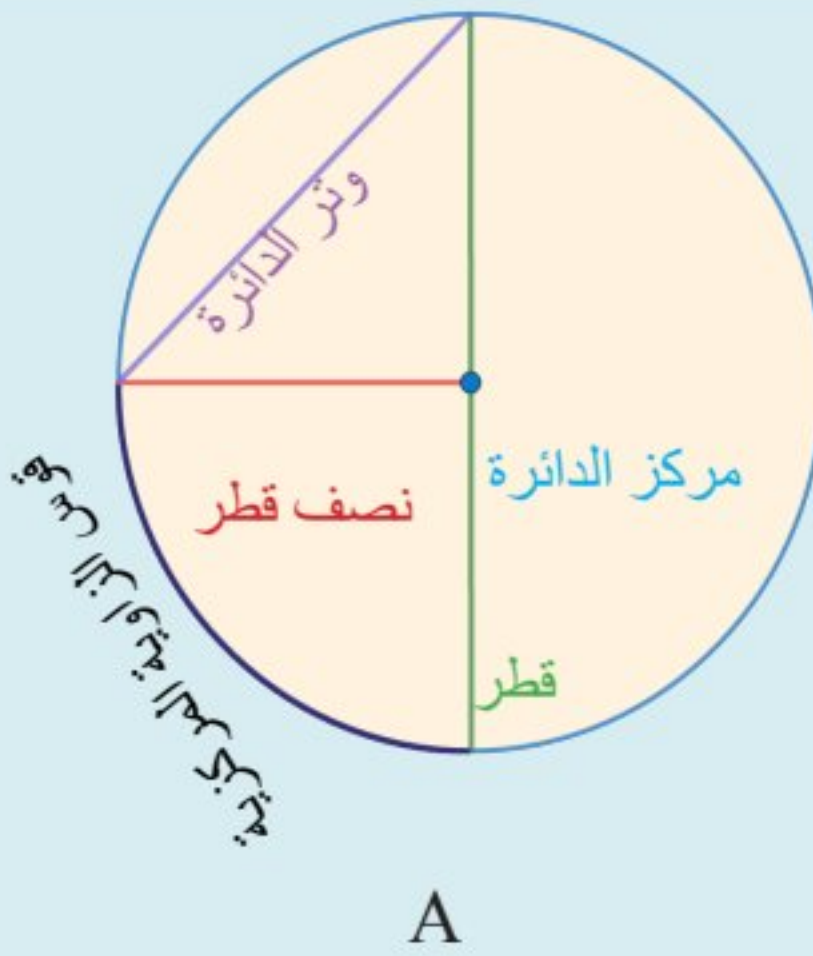
$$\frac{HA}{AM} = \frac{HB}{BK}$$



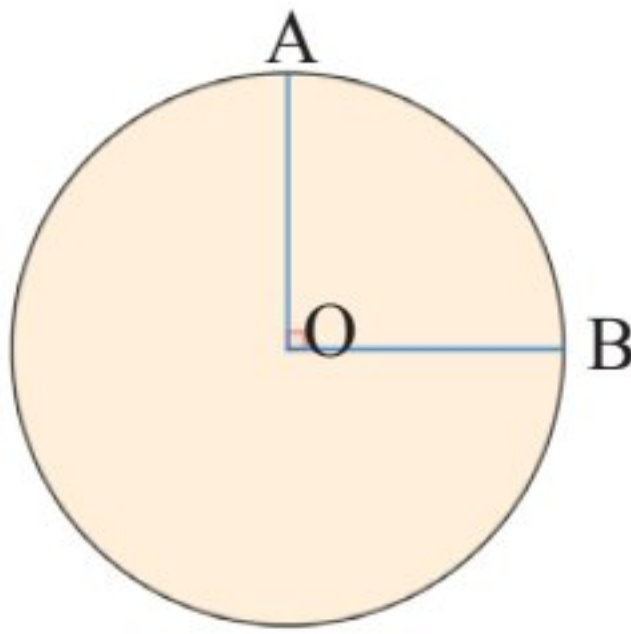
شاهد هذا الدرس
على يوتيوب

7

[5-4-1] القوس والوتر



تعرفت سابقاً الى مفهوم **الدائرة**: وهي مجموعة من النقاط المتصلة في المستوي التي لها البعد نفسه عن نقطة ثابتة تسمى **مركز الدائرة**، ونصف قطر الدائرة r : هو قطعة مستقيمة تصل بين مركز الدائرة ونقطة على الدائرة، و**وتر الدائرة**: هو قطعة مستقيمة طرفها على الدائرة، **قطر الدائرة**: هو وتر يمر بمركز الدائرة. وسوف تزيد معلوماتك عن الدائرة في هذا الدرس لتتعرف الى القوس وقياسه بدلالة الزاوية المركزية المقابلة له.



كيف اجد قياس القوس $\widehat{AB}$ بدلالة الزاوية المركزية المقابلة له؟

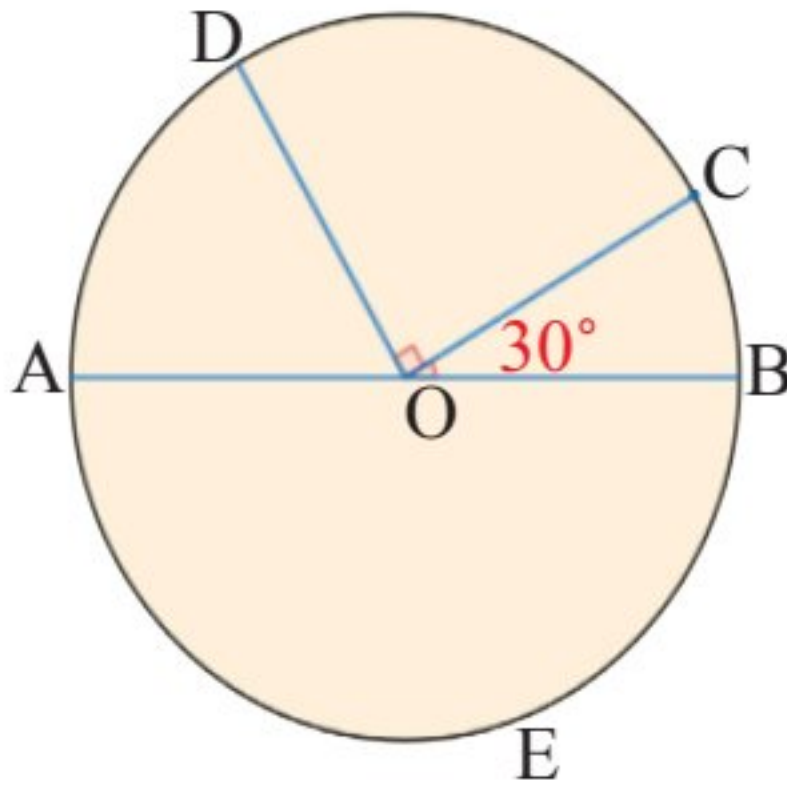
مثال (1)

قياس الزاوية المركزية يكافئ قياس القوس المقابل لها ويرمز للقوس $\widehat{AB}$ الزاوية AOB قائمة
اذن قياس القوس المقابل للزاوية AOB يساوي $\widehat{AB} = 90$
هناك ثلاثة انواع من الاقواس في الدائرة وهي:

القوس الاصغر (اصغر من 180)	القوس الاكبر (اكبر من 180)	قياس نصف الدائرة (يساوي 180)
$m\widehat{ACB} = m\angle AOB < 180$	$m\widehat{ACB} = 360 - m\widehat{AB} > 180$	$m\widehat{AB} = 180$

مثال (2)

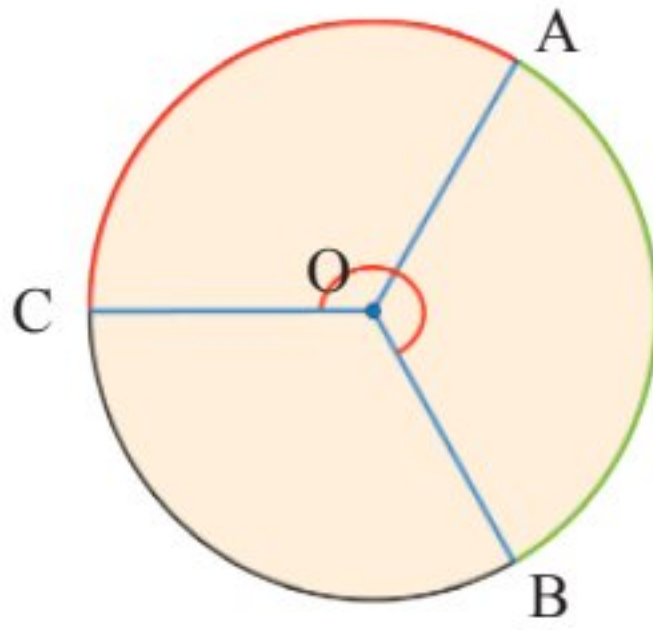
جد قياس الزوايا والاقواس المجهولة في الشكل المجاور:



- i) $\widehat{BC}: m\angle BOC = 30^\circ \Rightarrow m\widehat{BC} = 30$
 ii) $\widehat{DC}: m\angle COD = 90^\circ \Rightarrow m\widehat{DC} = 90$
 iii) $\widehat{BCD}: m\angle BOC + m\angle COD = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$
 $m\widehat{BCD} = 120$
 iv) $\widehat{BEA}: m\angle BOA = 180^\circ \Rightarrow m\widehat{BEA} = 180$
 iv) $\widehat{AD}: m\angle AOD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \Rightarrow m\widehat{AD} = 60$

مثال (3)

الدائرة المقابلة مقسمة على ثلاثة اجزاء متطابقة، جد قياس الاقواس الآتية: $\widehat{ABC}$ ، $\widehat{AB}$.
 هناك ثلاث زوايا مركزية متطابقة مجموعها 360°

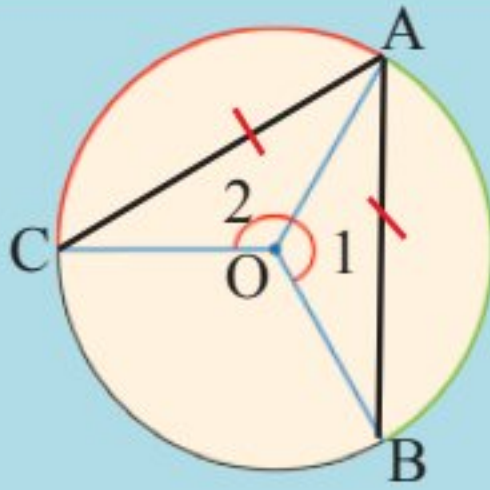


i) $\widehat{AB}: m\angle AOB = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 120$

ii) $\widehat{ABC}: m\angle ABC = 120^\circ + 120^\circ = 240^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 240$

او بطريقة اخرى:

$\widehat{ABC} = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 240$



لاحظ المثلثين والزائتين المركزيتين 1, 2 والقوسين $\widehat{AB}$, $\widehat{CA}$ والوترين $\overline{AB}$, $\overline{CA}$ اذا تطابقت الزائتان تطابق القوسان وتطابق المثلثان فيتطابق الوتران $\overline{AB}$, $\overline{CA}$ ويمكنك ان تستعمل مثل هذه الطريقة للتوصل الى المبرهنة التالية (من دون برهان):

مبرهنة الاقواس والوترات والزائية المركزية، في كل دائرة او في دائرتين متطابقتين

$\angle 1 \cong \angle 2 \Leftrightarrow \overline{AB} \cong \overline{AC}$

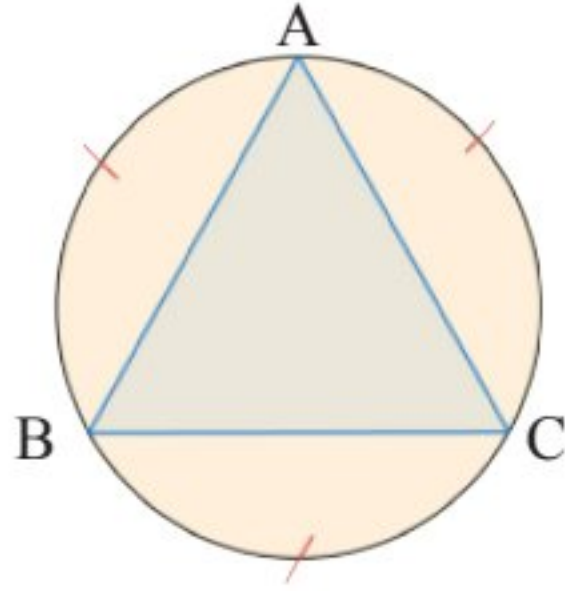
$\angle 1 \cong \angle 2 \Leftrightarrow \widehat{AB} \cong \widehat{AC}$

$\overline{AB} \cong \overline{AC} \Leftrightarrow \widehat{AB} \cong \widehat{AC}$

• اذا تطابقت زائتان مركزيتان تطابق وترهما وبالعكس.

• اذا تطابقت زائتان مركزيتان تطابق قوساهما وبالعكس.

• اذا تطابق قوسان تطابق وترهما وبالعكس.



مثال (4)

استعمل مبرهنة الاقواس والوتر لتبرهن ان المثلث ABC متساوي

الاضلاع في الدائرة المقابلة علماً ان $\widehat{AB} \cong \widehat{AC} \cong \widehat{CB}$

$$\therefore \widehat{AB} \cong \widehat{AC} \cong \widehat{CB}$$

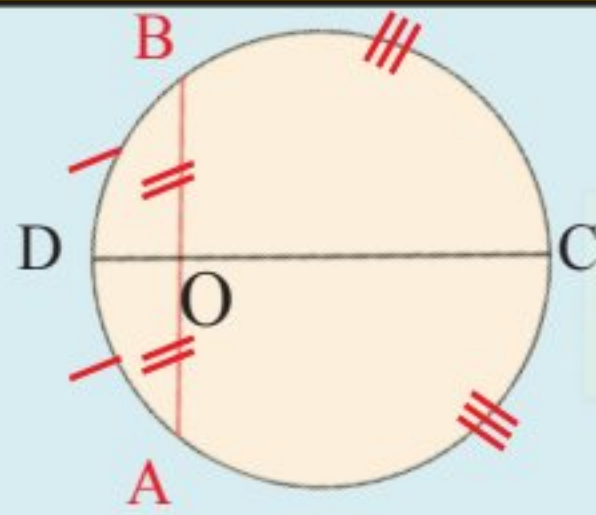
$$\therefore \overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{CB}$$

معطى في السؤال

مبرهنة الاقواس والوتر

لذا فان المثلث ABC متساوي الاضلاع.

مبرهنة القطر العمودي، في كل دائرة



مبرهنة: القطر العمودي على وتر في دائرة ينصف الوتر وينصف كلا قوسيه.

$$\overline{CD} \perp \overline{AB} \Rightarrow AO = BO, \widehat{AD} \cong \widehat{DB}, \widehat{BC} \cong \widehat{AC}$$

مثال (5)

استعمل مبرهنة القطر العمودي، وجد طول الوتر AB اذا علمت ان نصف القطر OD يساوي 5cm.

وان $DE = 2cm$

الخطوة (1): ارسم نصف القطر $\overline{OC}$

معطى

$$OC = OD = 5cm, DE = 2cm$$

$$OE = 5 - 2 = 3cm$$

$$(EB)^2 + (EO)^2 = (OB)^2$$

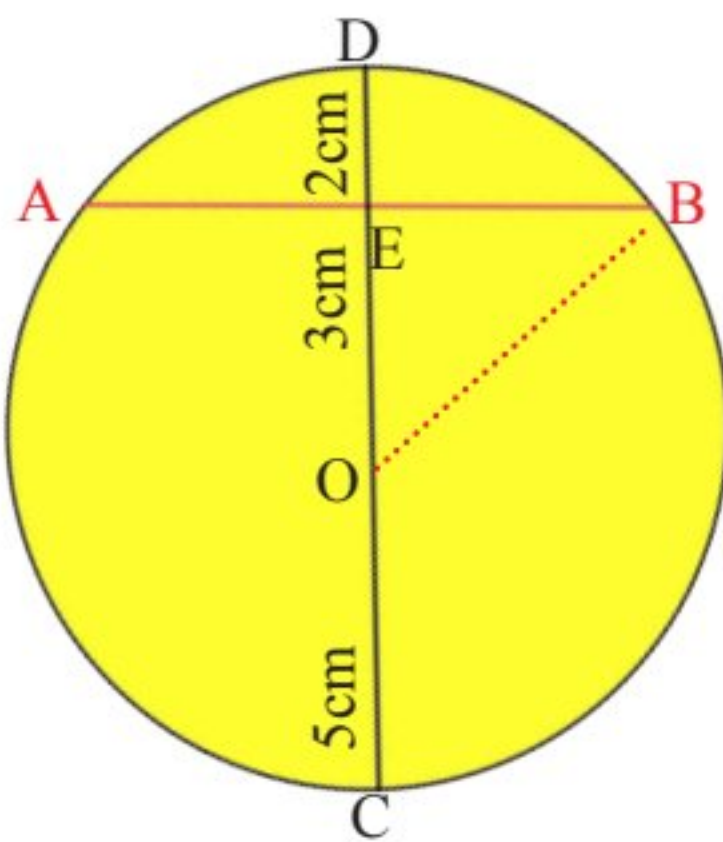
$$25 - 9 = (EB)^2$$

$$(EB)^2 = 16 \Rightarrow EB = 4cm$$

$$\therefore AB = 2 \times EB = 2 \times 4 = 8cm$$

E منتصف $\overline{AB}$ مبرهنة القطر العمودي

القطر $\overline{DC}$ عمودي على الوتر $\overline{AB}$ وينصفه



الخطوة (2): مبرهنة فيثاغورس

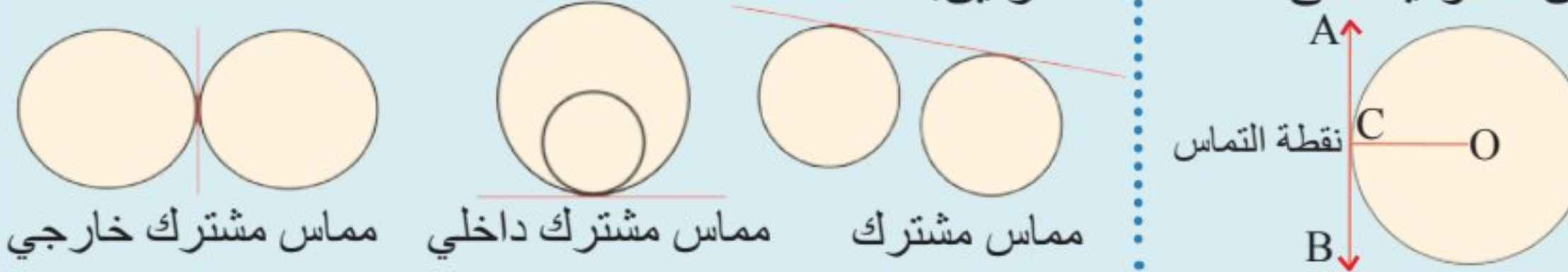
بالتعويض

بالتبسيط

[5-4-2] المماس

مماس الدائرة: هو المستقيم الذي يلاقي الدائرة في نقطة واحدة تعرف بنقطة التماس ويكون عمودياً على نصف القطر في نقطة التماس.

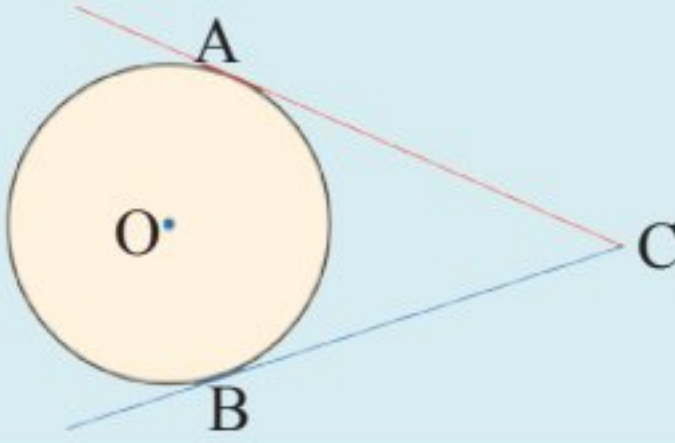
مبرهنة المماس



مبرهنة المماسين

مبرهنة: القطعتان المماستان المرسومتان لدائرة من نقطة خارجة عنها متطابقتان. $\overline{CB}$, $\overline{CA}$ مماسان للدائرة من نقطة C.

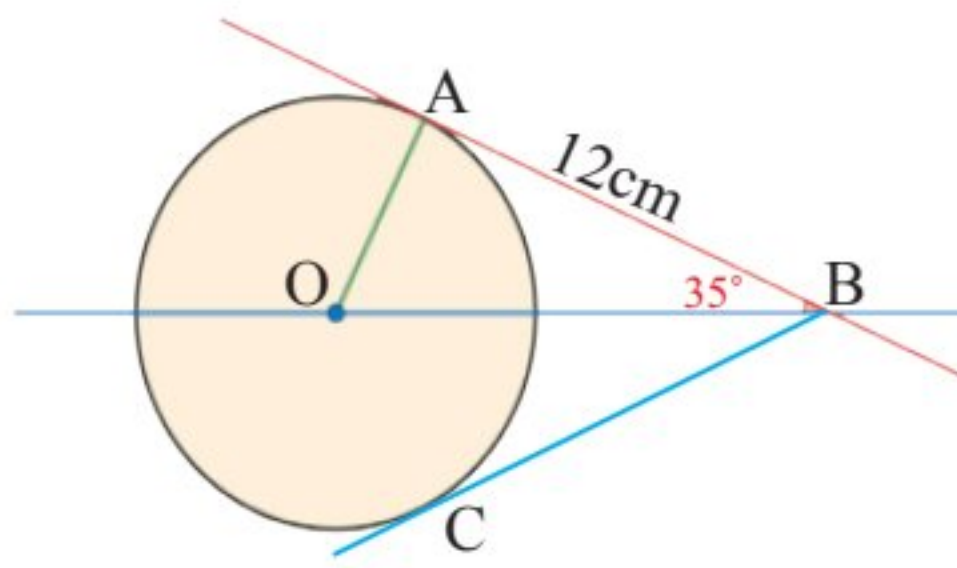
$$\therefore \overline{CB} \cong \overline{CA}$$



مثال (6) دائرة مركزها O في الشكل المجاور، $\overline{AB}$ هو مماس للدائرة في A وقياس الزاوية ABO يساوي 35° جد قياس الزاوية AOB، ثم جد طول القطعة المستقيمة BC.

$\overline{BA}$ مماس الدائرة في النقطة A
مبرهنة المماس

معطى



$$\overline{AB} \perp \overline{AO}, m\angle OAB = 90^\circ$$

$$\therefore m\angle OBA = 35^\circ$$

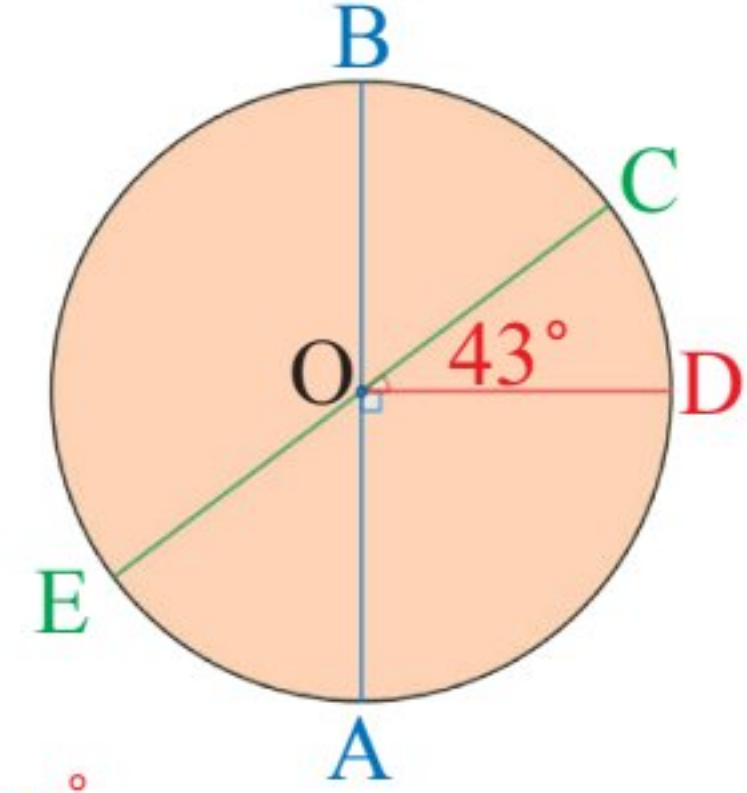
$$\therefore m\angle AOB = 180^\circ - (90^\circ + 35^\circ) = 55^\circ$$

$$BC = 12\text{cm}$$

مجموع زوايا المثلث 180°
مبرهنة المماسين

تأكّد من فهمك

في الدائرة ادناه، جد قياس الزوايا والاقواس فيما يأتي:



1 $\angle AOD = 90^\circ$ لأنها قائمة

2 $\angle COB = m\angle BOD - m\angle COD = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

3 $\widehat{DBE} = \angle COD + m\angle COB + m\angle BOE = 45^\circ + 45^\circ + 135^\circ = 225^\circ$

4 $\widehat{DAB} = m\angle DOA + m\angle AOE + m\angle EOB = 90^\circ + 45^\circ + 135^\circ = 270^\circ$

دائرة مقسمة على 6 اجزاء متطابقة جد قياس كل قوس مما يأتي:

5 $\widehat{AB}$ الحل:

$$m\widehat{AB} = m\angle AOB, \quad m\angle AOB = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

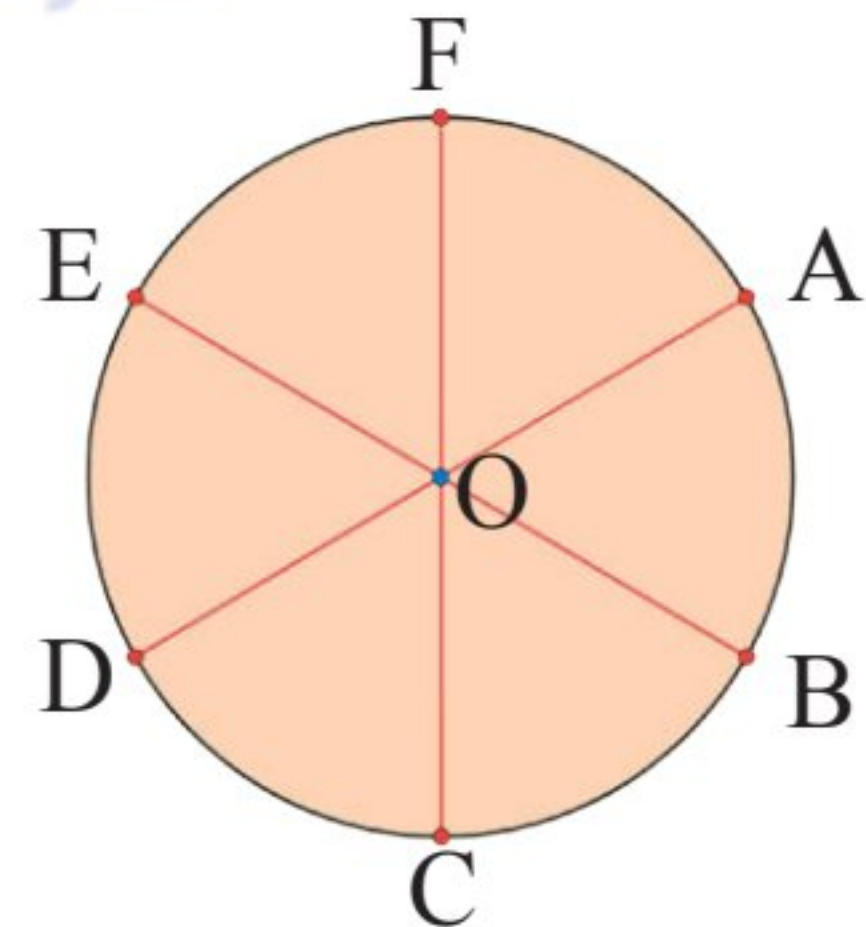
$$\Rightarrow \therefore m\widehat{AB} = 60^\circ$$

6 $\widehat{ABC}$ الحل:

$$m\widehat{ABC} = m\angle AOB + m\angle BOC = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$$

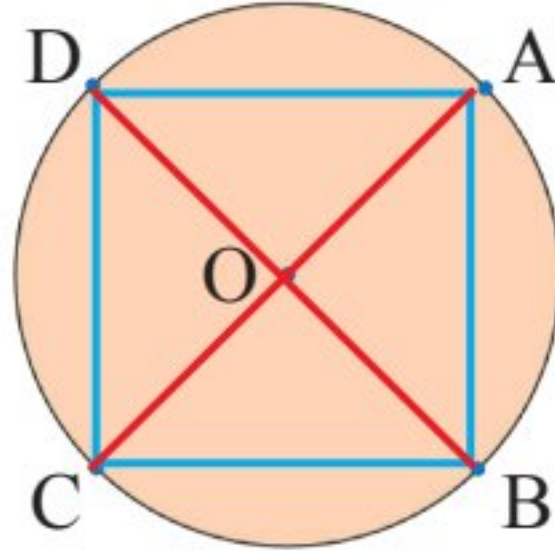
7 $\widehat{ABD}$

$$m\widehat{ABD} = m\angle AOB + m\angle BOC + m\angle COD = 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$



8

الدائرة المجاورة مقسمة على 4 اجزاء متطابقة، برهن ان الشكل ABCD مربع.



الحل:

$$\widehat{AB} = m\angle AOB = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ \leftarrow \text{نصل بين ABCD}$$

$$\therefore \widehat{AB} \cong \widehat{BC} \cong \widehat{CD} \cong \widehat{DA}$$

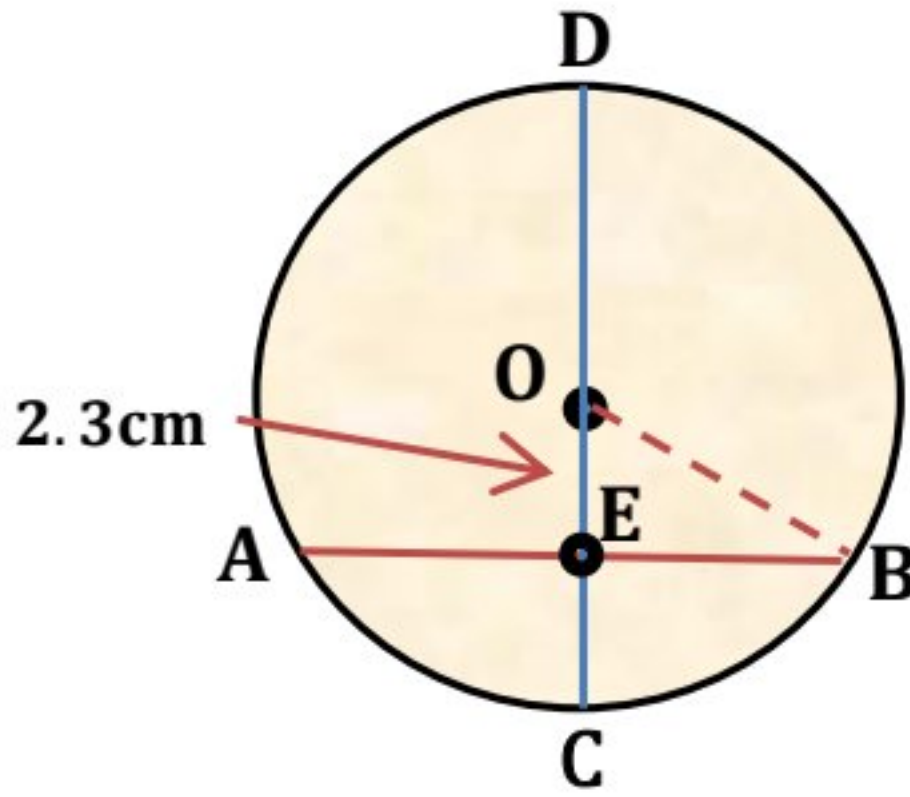
$$\Rightarrow \therefore \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$$

$\therefore$ الشكل ABCD مربع

9

في الشكل المجاور استعمل مبرهنة القطر العمودي وجد طول القطعة المستقيمة AB في الدائرة المجاورة مقرباً الناتج الى اقرب عُشر.

الحل:



ارسم نصف قطر OD

$$OB = OC = 2.3 + 1.7 = 4\text{cm}$$

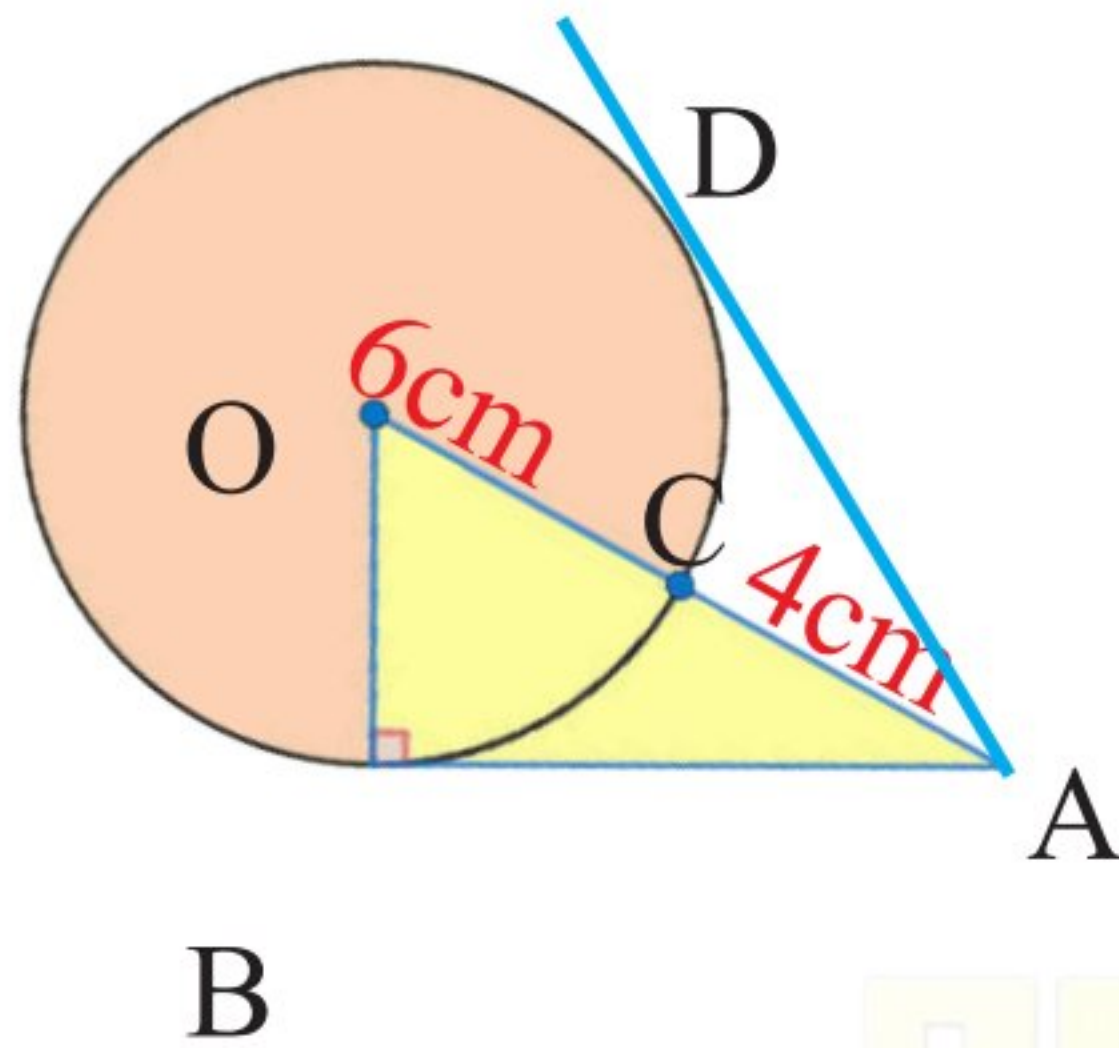
$$(OB)^2 = (OE)^2 + (EB)^2 \quad \text{مبرهنة فيثاغورس} \Rightarrow (4)^2 = (2.3)^2 + (EB)^2$$

$$16 = 5.29 + (EB)^2 \Rightarrow (EB)^2 = 16 - 5.29 = 10.71 \Rightarrow EB = \sqrt{10.71} = 3.3\text{cm}$$

$$AB = 2 \times EB = 2 \times 3.3 = 6.6\text{cm} \quad \text{E منتصف } \overline{AB} \text{ مبرهنة القطر العمودي}$$

استعمل مبرهنة المماس لتجد طول القطع المستقيمة AB, AD في الشكل المجاور.

10



الحل : $\overline{AB}$ مماس للدائرة في النقطة B

$\overline{OB} \perp \overline{AB}$, $m\angle ABO = 90^\circ$ قائمة (مبرهنة المماس)

$$OB = OC = 6\text{cm}, OA = 6 + 4 = 10\text{cm}$$

$$(OA)^2 = (OB)^2 + (AB)^2 \quad \text{مبرهنة فيثاغورس} \Rightarrow (10)^2 = (6)^2 + (AB)^2$$

$$100 = 36 + (AB)^2 \Rightarrow (AB)^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow AB = 8\text{cm}$$

$$\overline{AB} \cong \overline{AD} \Rightarrow \overline{AD} = 8\text{cm}$$

مبرهنة المماسين

تدرب وحل التمرينات

جد قياس الزوايا والاقواس فيما يأتي:

11 $\angle COA = 180^\circ - (74^\circ + 40^\circ) = 180^\circ - 114^\circ = 66^\circ$

12 $\widehat{DBE} = m\angle DOB + m\angle BOE = 180^\circ + 90^\circ = 270^\circ$

13 $\widehat{BAC} = m\angle BOA + m\angle COA = 40^\circ + 66^\circ = 106^\circ$

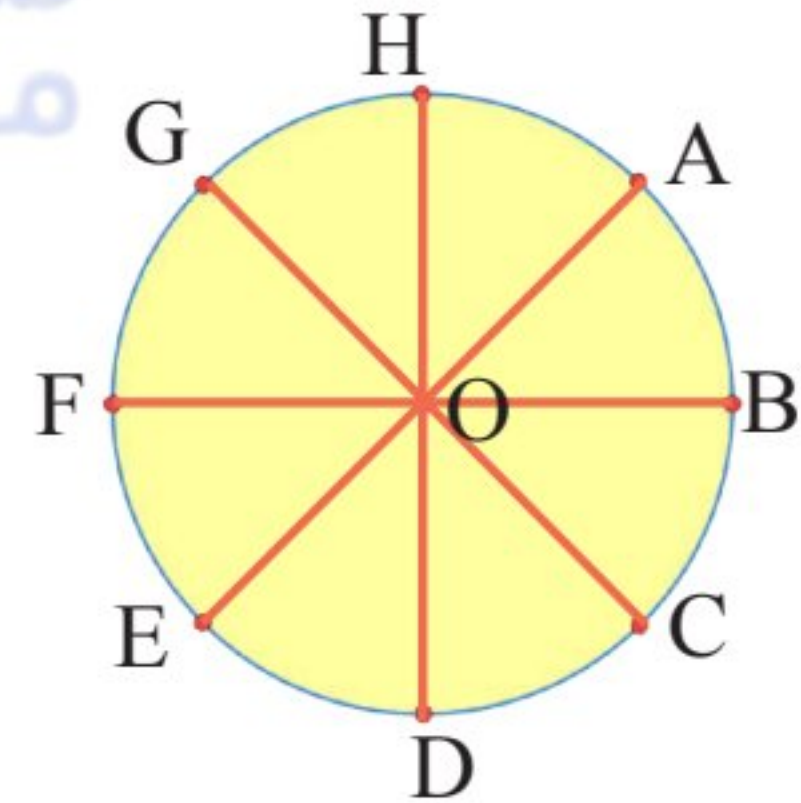
14 $\widehat{DCA} = m\angle DOC + m\angle COA = 74^\circ + 66^\circ = 140^\circ$

الدائرة مقسمة على 8 اجزاء متطابقة جد قياس كل قوس مما يأتي:

15 $\widehat{AB} = m\angle AOB = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$

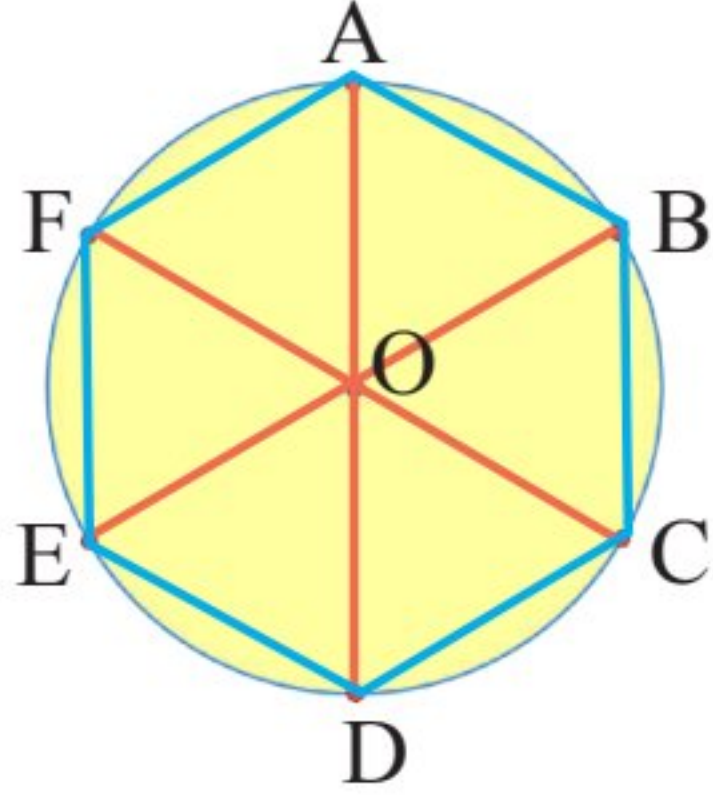
16 $\widehat{ABC} = m\angle AOB + m\angle BOC = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$

17 $\widehat{GDB} = m\angle GOB = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$



18

الدائرة المجاورة مقسمة على 6 اجزاء متطابقة، برهن ان الشكل ABCDEF سداسي منتظم.



الحل : نصل بين ABCDEF

$$m\widehat{AB} = m\angle AOB = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

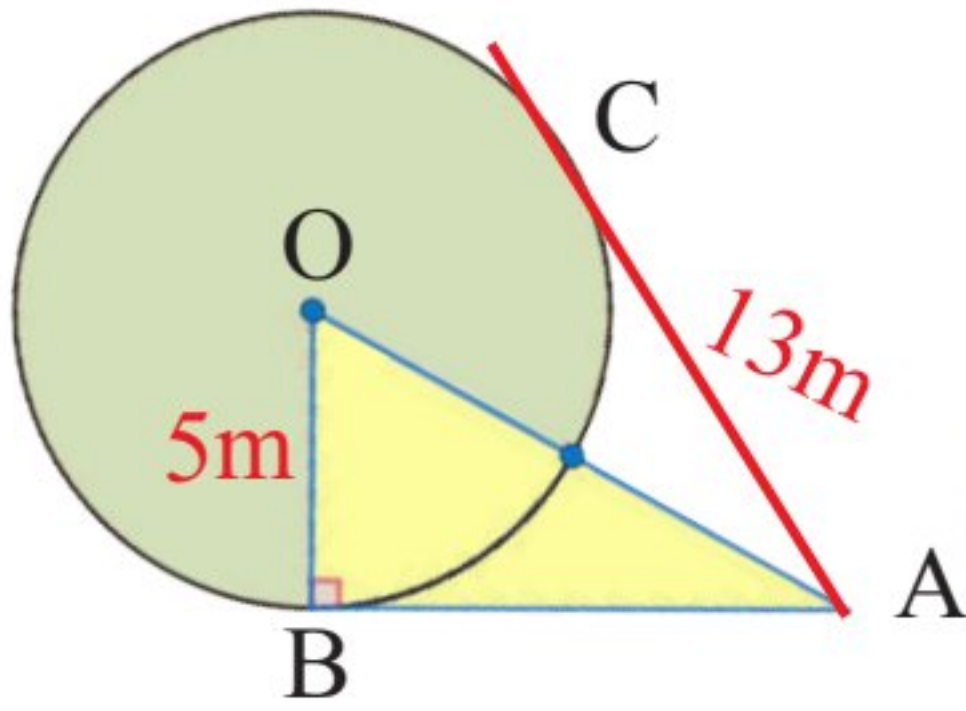
$$\therefore \widehat{AB} \cong \widehat{BC} \cong \widehat{CD} \cong \widehat{DE} \cong \widehat{EF} \cong \widehat{FA}$$

$$\therefore AB = BC = CD = DE = EF = FA$$

∴ الشكل ABCDEF سداسي منتظم

19

استعمل مبرهنة المماس لتجد طول القطع المستقيمة AB, AC في الدائرة المجاورة.



الحل :

$$(AO)^2 = (OB)^2 + (AB)^2 \quad \text{مبرهنة فيثاغورس}$$

$$(13)^2 = (5)^2 + (AB)^2 \Rightarrow 169 = 25 + (AB)^2$$

$$\Rightarrow (AB)^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow AB = 12m$$

$$\therefore \overline{OB} \perp \overline{AB} \Rightarrow \overline{AB} \cong \overline{AC} \Rightarrow AC = 12m$$

تدرب وحل مسائل حياتية

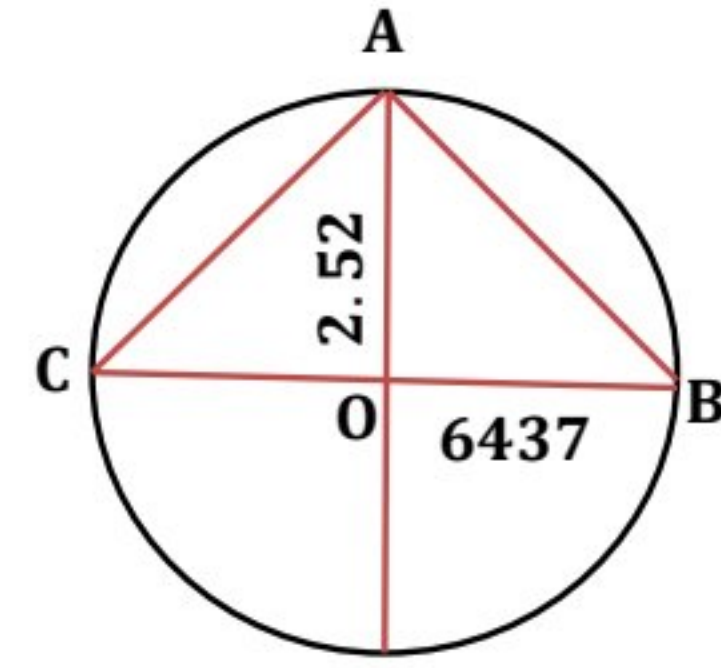
20

جغرافية (براكين): ترتفع فوهة بركان (هوالالاي) عن مستوى سطح البحر



2.52km ، احسب المسافة بين قمة البركان ومستوى الافق اذا علمت ان نصف قطر الارض 6437km تقريباً مقرباً الناتج لاقرب كيلومتر.

الحل:



$$(AB)^2 = (AO)^2 + (BO)^2$$

مبرهنة فيثاغورس

$$(AB)^2 = (2.52)^2 + (6437)^2 = 6.4 + 41434969 = 41434975.4$$

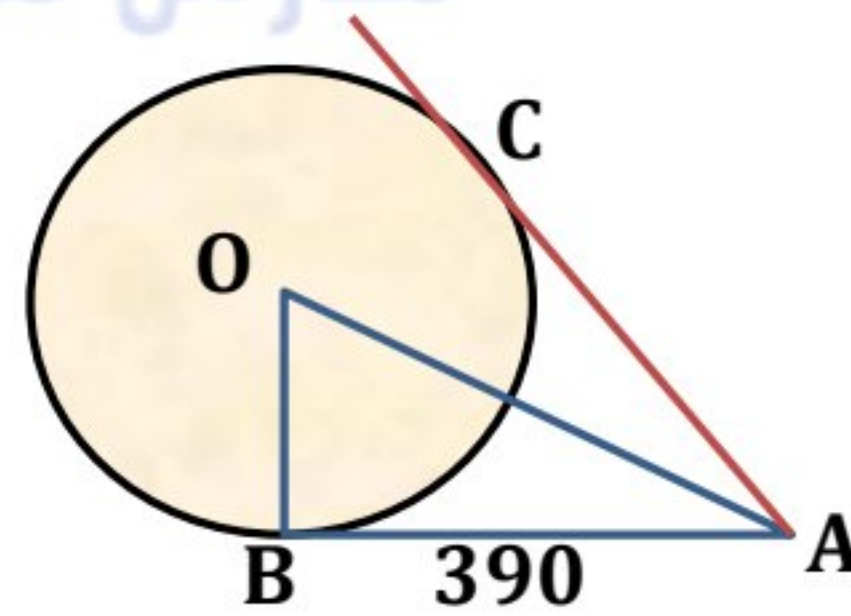
$$AB = \sqrt{41434975.4} = 6437\text{km}$$

21

محطة فضائية: تبعد محطة مير الروسية عن مستوى سطح البحر مسافة 390km تقريباً، ما المسافة بين هذه المحطة والافق، مقرباً الناتج الى اقرب كيلومتر. علماً ان نصف قطر الارض 6437km تقريباً.



الحل:



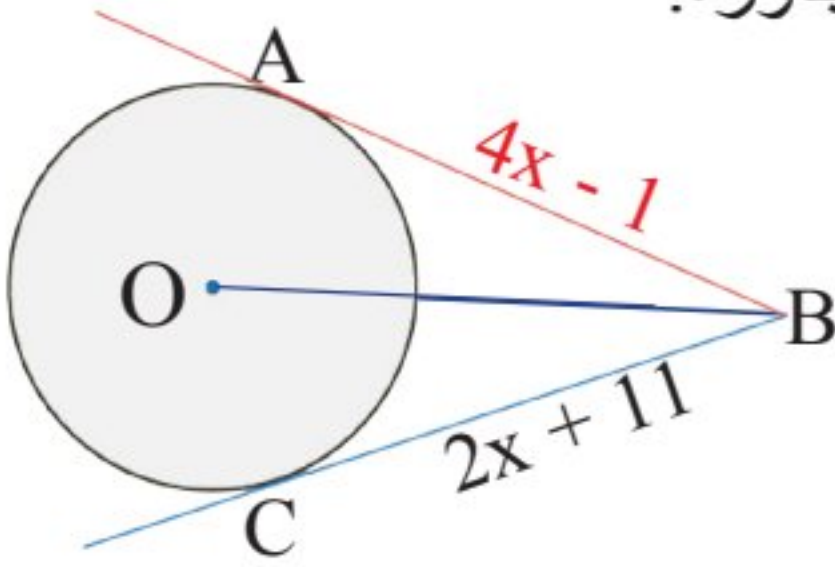
$$AB = 390\text{km}$$

$$\overline{OB} \perp \overline{AB} \Rightarrow \overline{AB} \cong \overline{AC} \Rightarrow AC = 390\text{Km}$$

فَكَّرْ

22

تحدي: استعمل مبرهنة المماسين وجد طول $\overline{AB}$ في الدائرة المجاورة.



الحل:

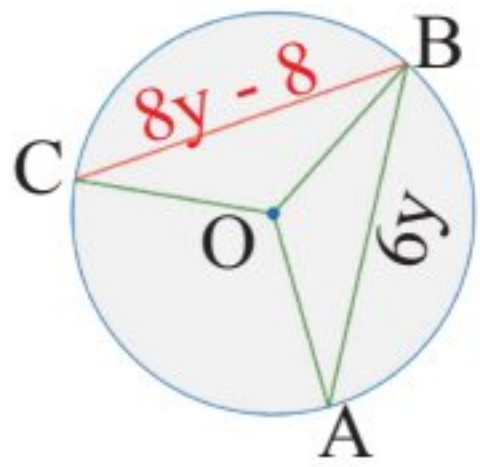
$$\because \overline{AB} \cong \overline{BC} \Rightarrow \therefore \overline{AB} = \overline{BC} \quad \text{مبرهنة المماسين}$$

$$4x - 1 = 2x + 11 \Rightarrow 4x - 2x = 1 + 11 \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{2} = 6$$

$$\overline{AB} = 4x - 1 = 4(6) - 1 = 24 - 1 = 23$$

23

حس عددي: اذا كانت الزاويتان $\angle COB, \angle AOB$ متطابقتين، جد طول $\overline{CB}$ في الدائرة المجاورة.



الحل:

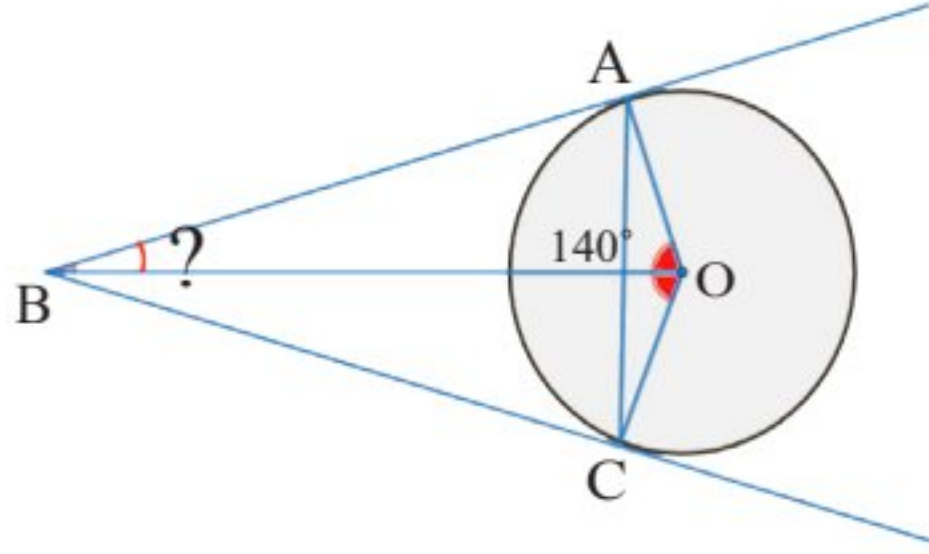
$$\because \angle COB \cong \angle AOB \Rightarrow \widehat{CB} \cong \widehat{AB} \Rightarrow \therefore \overline{CB} = \overline{AB}$$

$$8y - 8 = 6y \Rightarrow 8y - 6y = 8 \Rightarrow 2y = 8 \Rightarrow y = \frac{8}{2} = 4$$

$$\overline{CB} = 8y - 8 = 8(4) - 8 = 32 - 8 = 24$$

أكتب

الخطوات اللازمة لتجد قياس زاوية ABC في الرسم
المجاور اذا علمت ان $\overline{BO}$ ينصف الزاوية AOC والتي
قياسها يساوي 140° .



الحل: $\overline{BO}$ ينصف الزاوية AOC

$$m\angle BAO = 70^\circ, \quad m\angle BCO = 70^\circ$$

$\because$ BA , BC مماسات للدائرة

$\therefore \overline{BA} \perp \overline{AO}$
 $\therefore \overline{BC} \perp \overline{CO}$ } نصف القطر $\perp$ المماس من نقطة التماس

$$\Rightarrow m\angle OCB = 90^\circ, \quad m\angle OAB = 90^\circ$$

$$\Rightarrow m\angle ABO = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$$

$$\Rightarrow m\angle CBO = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$$

$$m\angle ABC = 40^\circ$$

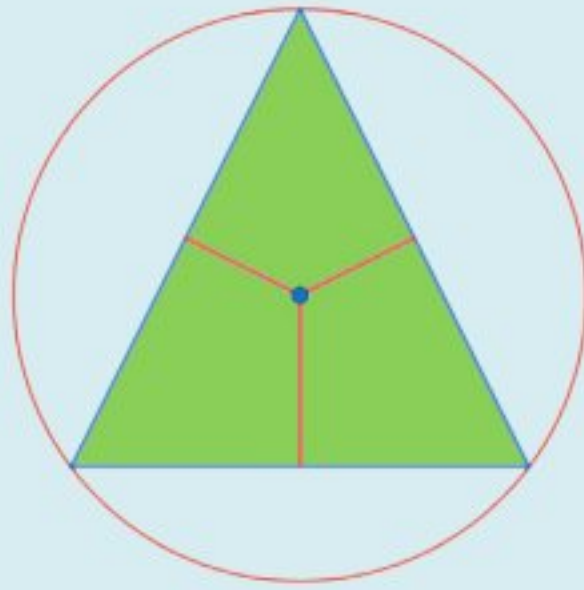


شاهد هذا الدرس
على يوتيوب

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

[5-5-1] المثلث والدائرة

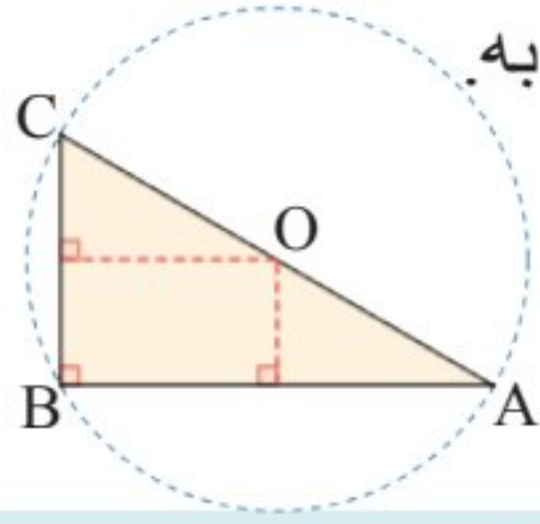
8



تعرفنا سابقاً في الدرس (2) الى مبرهنة (القطعة المستقيمة المتوسطة للمثلث):
[تتقاطع محاور الاضلاع الثلاثة للمثلث في نقطة واحدة]. ومنها نستطيع ان نرسم الدائرة
المحيطة بالمثلث. الدائرة المحيطة (الدائرة الخارجية للمثلث): لكل مثلث دائرة واحدة تحيط
به مركزها نقطة تقاطع المحاور الثلاثة.

المحاور: هي الاعمدة المقامة على اضلاع مثلث من منتصفاتها لتلقي بنقطة واحدة (O)
تكون متساوية البعد عن رؤوسه وهذه النقطة هي مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث.

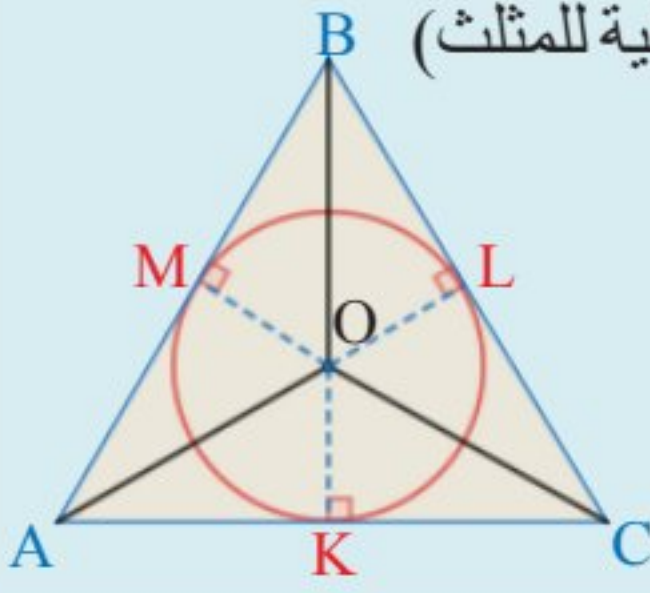
مثال (1)



جد نقطة تقاطع محاور المثلث ABC كما في الشكل المجاور وارسم الدائرة المحيطة به.

محور $\overline{AB}$ يمر في منتصف $\overline{AB}$ ويوازي $\overline{BC}$
محور $\overline{BC}$ يمر في منتصف $\overline{BC}$ ويوازي $\overline{AB}$

∴ المحاور الثلاثة تلتقي في منتصف $\overline{AC}$ والتي تمثل مركز الدائرة المحيطة بالمثلث.



بالامكان الاستفادة من مبرهنة منصفات زوايا المثلث لرسم الدائرة المحاطة بمثلث (الدائرة الداخلية للمثلث)

- تتقاطع منصفات زوايا المثلث في نقطة واحدة.

- نقطة تقاطع منصفات الزوايا تقع على المسافة نفسها من الاضلاع الثلاثة.

في كل مثلث توجد دائرة داخل المثلث مماسة لاضلاعه الثلاثة وتسمى الدائرة المحاطة.

$$OL = OK = OM$$

مثال (2)

الدائرة التي مركزها O محاطة بالمثلث ABC برهن ان $\overline{BO}$ منتصف

$\angle LOK$ والمحور $\overline{KL}$.

$$BK = BL$$

$$OK = OL$$

مبرهنة المماسين

نصفا قطري الدائرة

∴ المثلثان BOK, BOL متطابقان (مبرهنة التطابق ض.ض.ض.)

$$m\angle 1 = m\angle 2$$

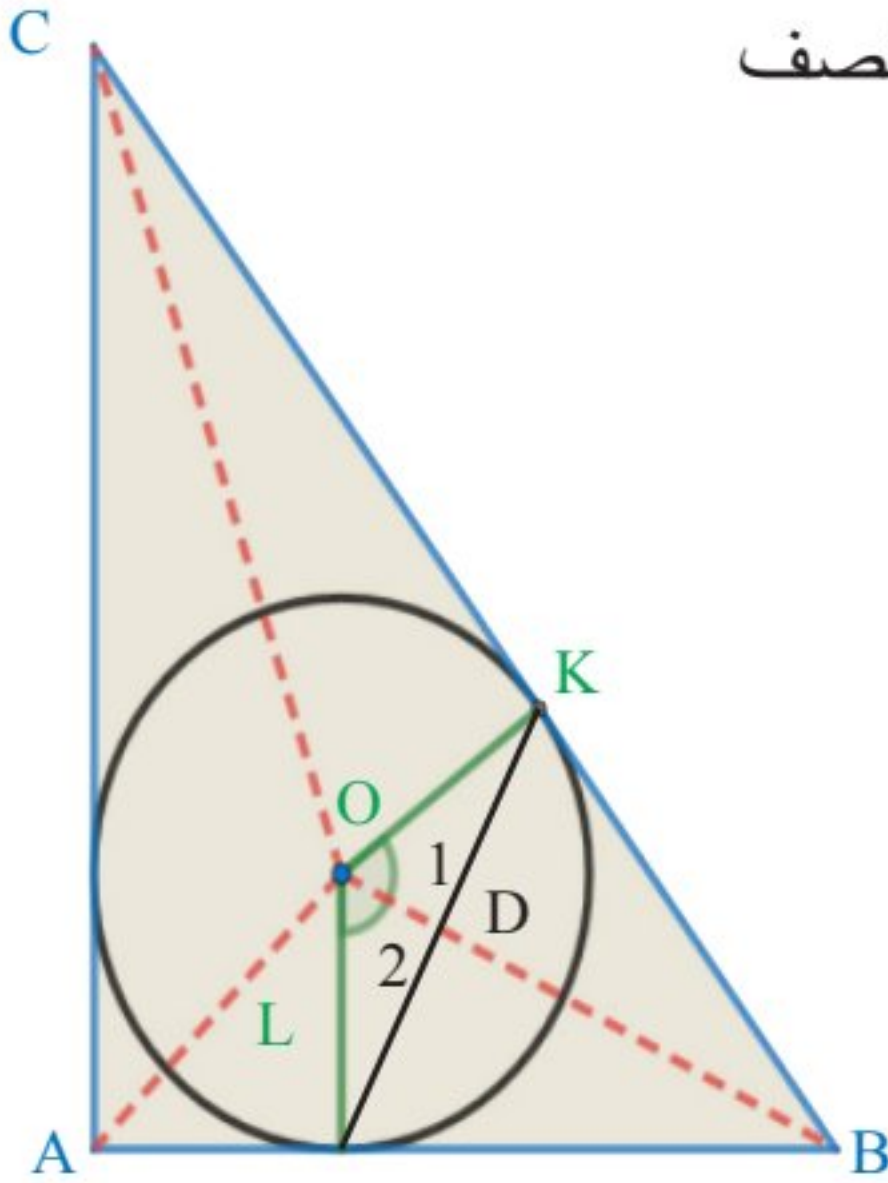
$\overline{BO}$ ينصف الزاوية $\angle LOK$

من التطابق

المثلثان KDB, LDB متطابقان (ض.ز.ض.).

$$\overline{KL} \perp \overline{BO}$$

∴ $\overline{BO}$ محور $\overline{KL}$



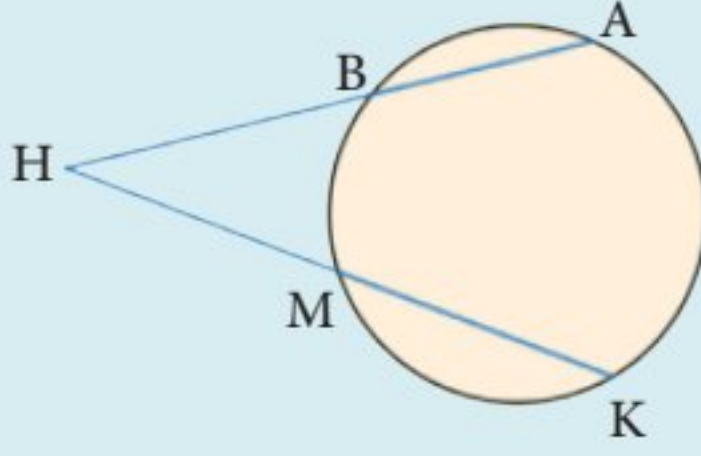
[5-5-2] القطع المستقيمة والدائرة

تعلمت في الدرس (5-4) كيف اجد اطوال اجزاء وتر يتقاطع مع قطر عمودي عليه، ولكن كيف اجد اطوال اوتار متقاطعة اخرى؟

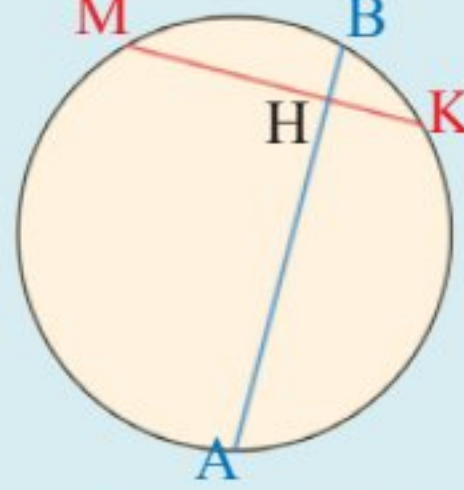
مبرهنة القاطعين للدائرة

المبرهنة

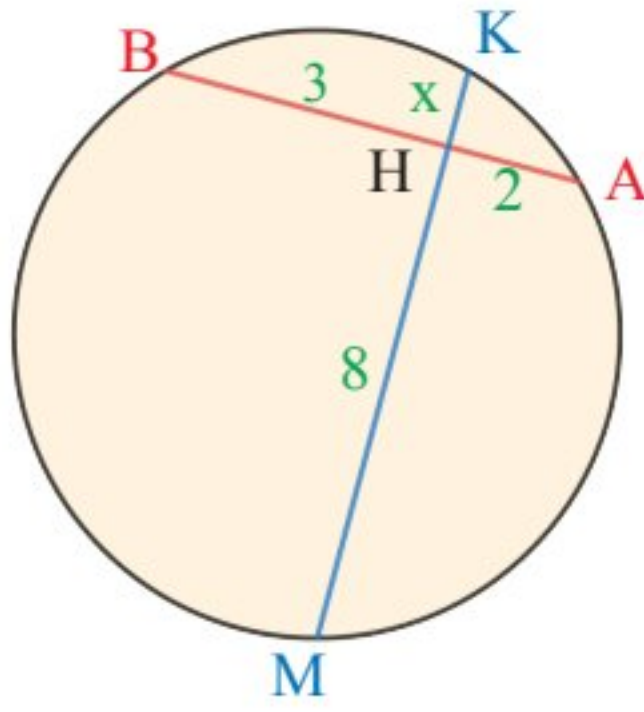
إذا قطع مستقيمان متقاطعان دائرة تشكل على كل منهما قطعتان مستقيمتان، ناتجا ضرب طوليهما متساويان.



$$HB \times HA = HM \times HK$$



$$HM \times HK = HB \times HA$$



$$HM \times HK = HB \times HA$$

$$8 \times x = 3 \times 2$$

$$x = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$AB = AH + HB = 2 + 3 = 5$$

$$MK = MH + HK = 8 + \frac{3}{4} = 8\frac{3}{4}$$

جد قيمة x وطول كل وتر.

مثال (3)

مبرهنة القاطعين في الدائرة

بالتعويض

طول الوتر AB

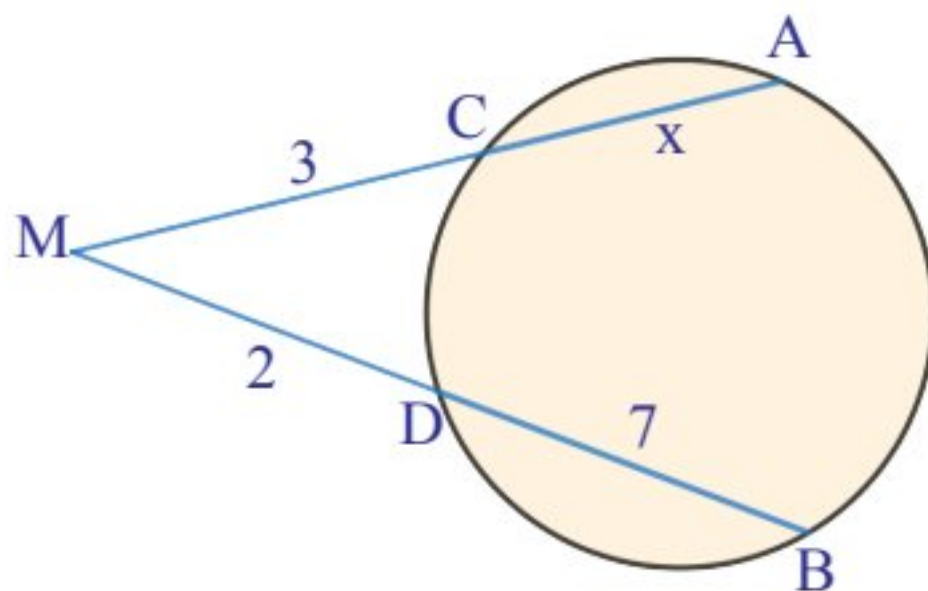
طول الوتر MK

جد قيمة x وطول كل من $\overline{AM}$, $\overline{BM}$.

مثال (4)

مبرهنة القاطعين في الدائرة

بالتعويض



$$MD \times MB = MC \times MA$$

$$2 \times 9 = 3 \times (3 + x)$$

$$18 = 9 + 3x$$

$$3x = 18 - 9 = 9$$

$$x = \frac{9}{3} = 3$$

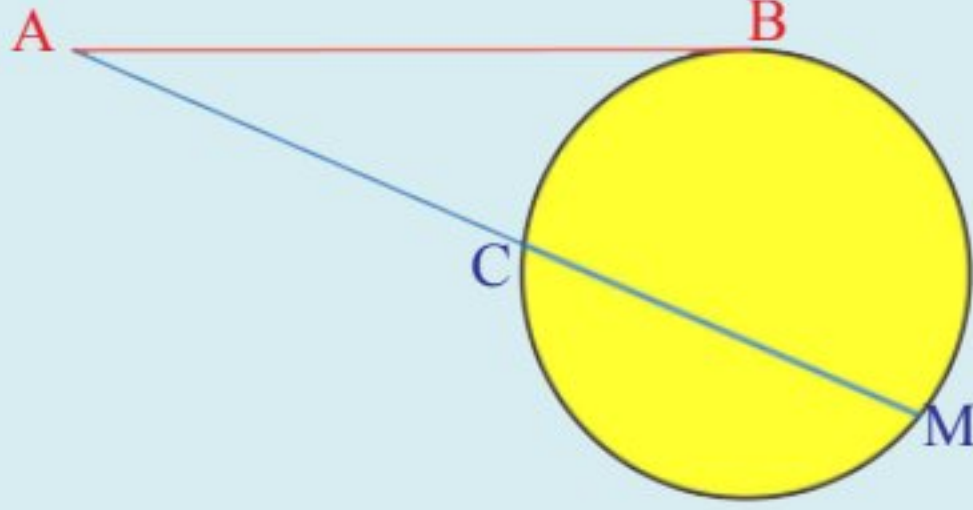
طول $\overline{AM} = 6$

طول $\overline{BM} = 9$

يمكن استعمال حاصل ضرب جزئي القاطع مع مبرهنة القاطع والمماس وفي هذه الحالة يكون المماس هو الجزء الخارجي والكلي للقطعة نفسها.

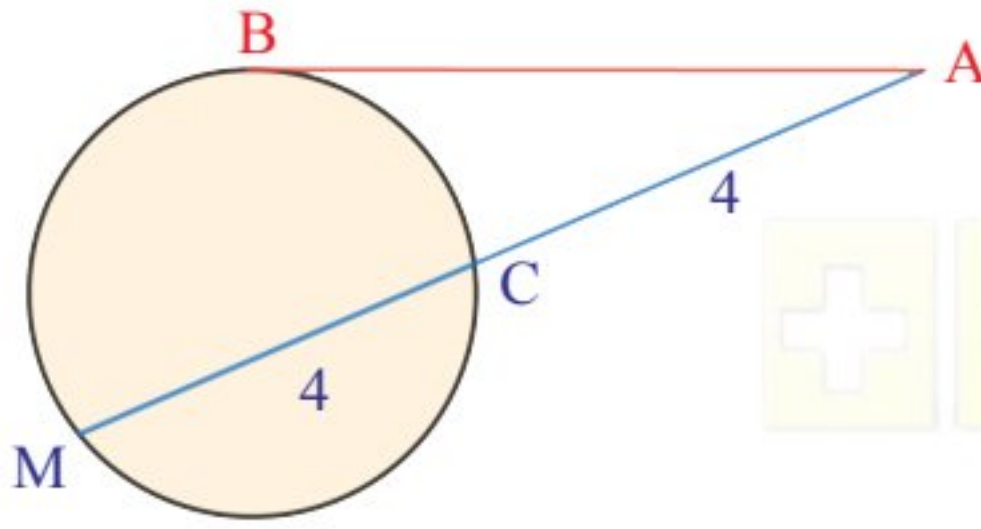
مبرهنة المماس والقاطع في الدائرة

المبرهنة
من نقطة خارج الدائرة اذا رسم مماساً ومستقيماً قاطعاً لها. فإن ناتج ضرب طولي قطعتي القاطع، يساوي مربع طول قطعة المماس. $AC \times AM = (AB)^2$



مثال (5)

جد طول قطعة المماس AB .



$$AC \times AM = (AB)^2$$

$$4 \times 8 = 32$$

$$\therefore AB = 4\sqrt{2}$$

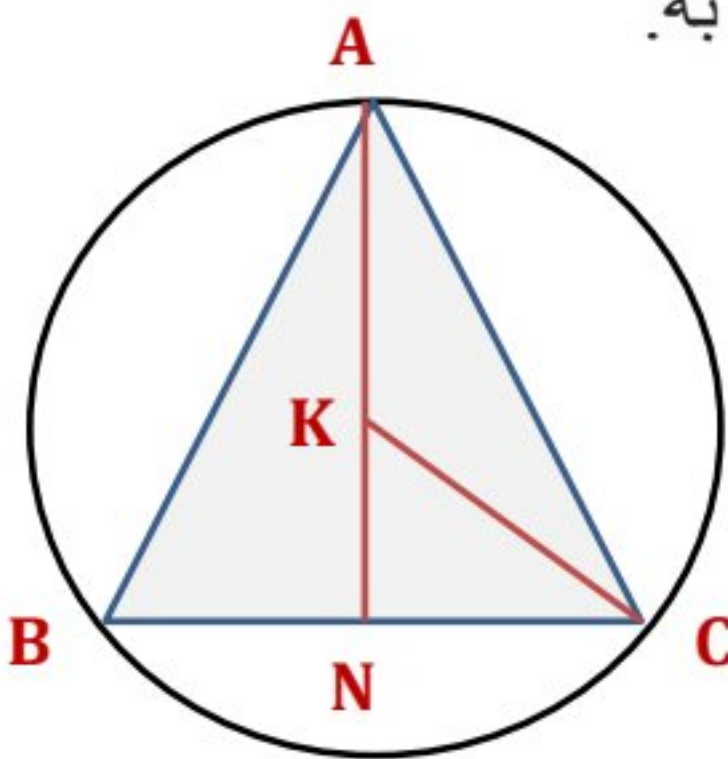
مبرهنة المماس والقاطع في الدائرة

بالتعويض

طول قطعة المماس AB

تأكد من فهمك

المثلث ABC متساوي الساقين $AB = AC$ ، N منتصف $\overline{BC}$ ، $\overline{KA} \cong \overline{KC}$ برهن ان K هي نقطة تقاطع محاور المثلث ABC . ثم ارسم الدائرة المحيطة به.



الحل: في المثلث ABC $BN = NC$

$$\therefore \overline{AN} \perp \overline{BC}$$

أي أن $\overline{AN}$ أحد محاور المثلث

K نقطة تقع على $\overline{AN}$

أذن K نقطة تقاطع محاور المثلث

و حسب مبرهنة المحاور فإن نقطة تقاطع المحاور هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث

2

ABC مثلث منتظم، طول ضلعه 12cm حدّد نقطة تقاطع محاوره ثم ارسم الدائرة المحيطة به وجد طول قطرها.

الحل:

بما أن المثلث متساوي الأضلاع إذن الأعمدة المقامة على أضلاعه تنصفها وتلتقي في نقطة واحدة هي نقطة تقاطع محاوره .
نقطة تقاطع المحاور هي مركز الدائرة المحيطة به

$$(AC)^2 = (AE)^2 + (EC)^2$$

$$144 = (AE)^2 + 36$$

$$AE = \sqrt{108} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$DE = \frac{1}{3}AE$$

$$= \frac{1}{3}(6\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$(DC)^2 = (DE)^2 + (EC)^2$$

$$(DC)^2 = (2\sqrt{3})^2 + (6)^2 = 12 + 36 = 48$$

$$DC = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

نصف قطر الدائرة

$\overline{AE}$ مستقيم متوسط ، أي إن :

جد قيمة x وطول كل قطعة مجهولة لكل مما يأتي:

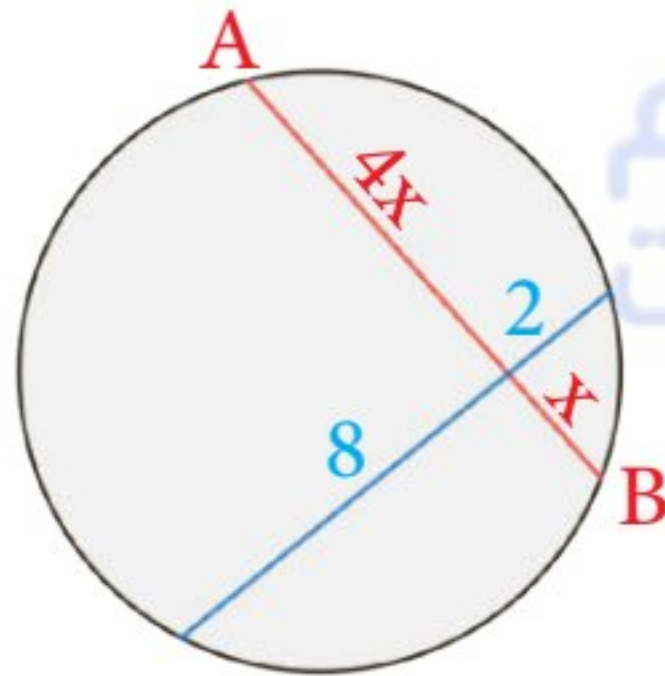
الحل:

مبرهنة القاطعين في الدائرة $AH \times HB = MH \times HK$

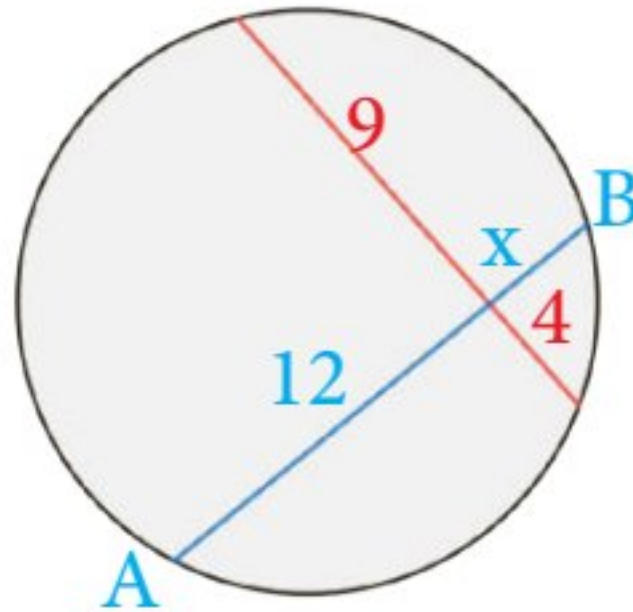
$$(x) \times (x) = 8 \times 2$$

$$x^2 = 16 \Rightarrow x = \sqrt{16} \Rightarrow x = 4$$

3



4



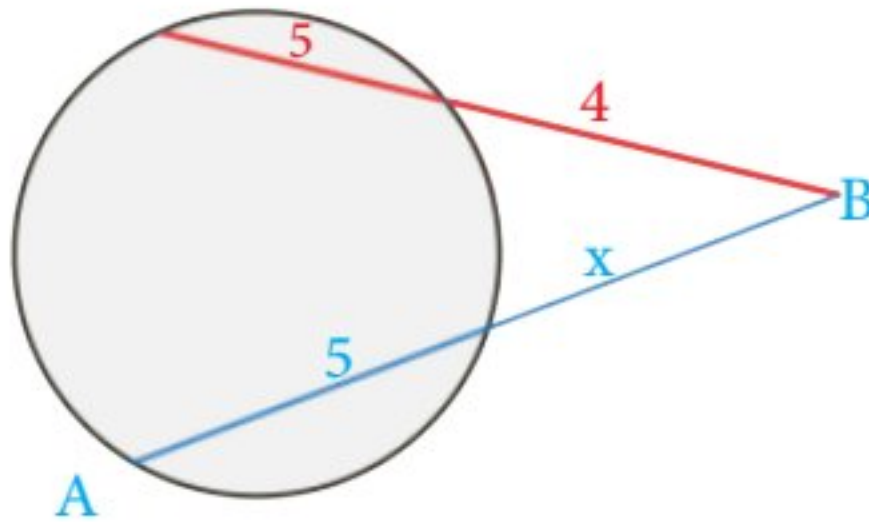
مبرهنة القاطعين في الدائرة $AH \times HB = MH \times HK$

$$9 \times 4 = 12 \times x$$

$$12x = 36 \Rightarrow x = \frac{36}{12} = 3$$

$$AB = 12 + 3 = 15$$

5



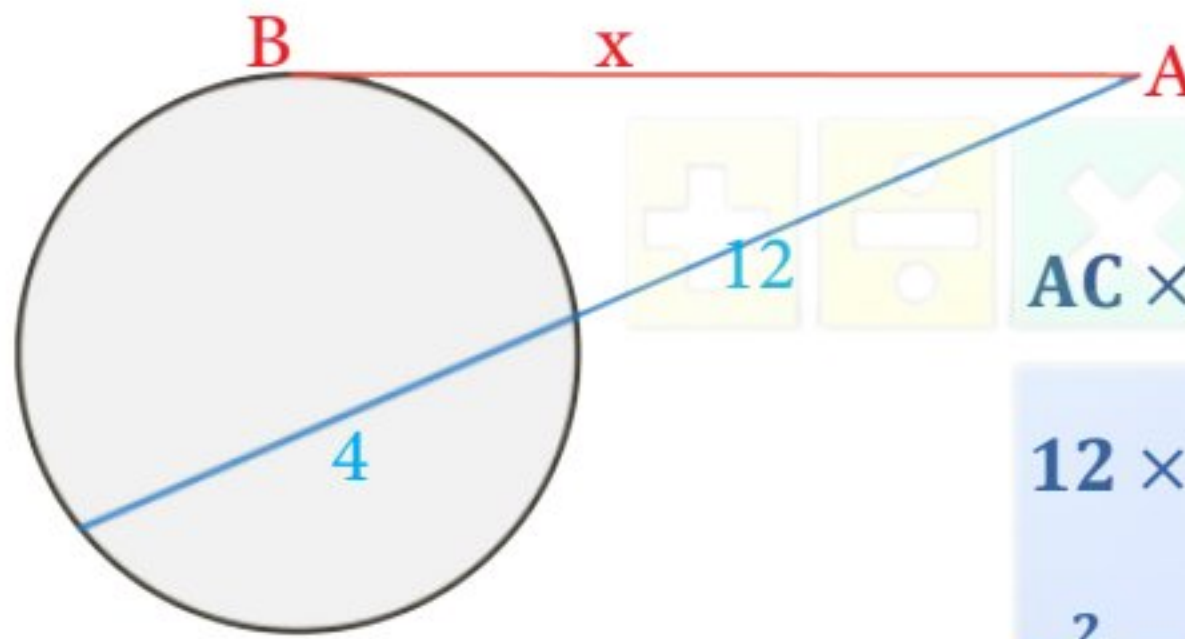
مبرهنة القاطعين في الدائرة $MC \times CA = MD \times DB$

$$4 \times 5 = x \times 5$$

$$5x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{5} = 4$$

$$AB = 5 + 4 = 9$$

6

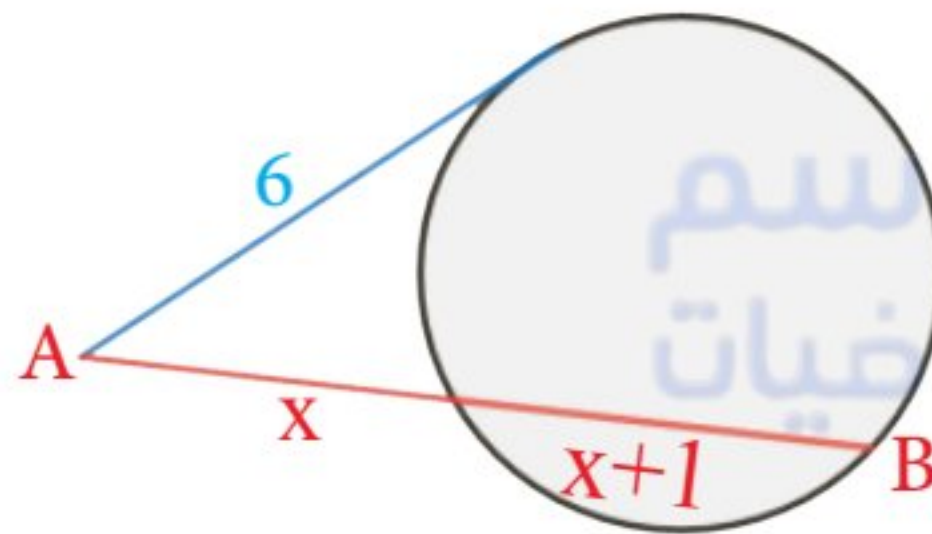


مبرهنة المماس والقاطع في الدائرة $AC \times CM = (AB)^2$

$$12 \times 4 = x^2$$

$$x^2 = 48 \Rightarrow x = \sqrt{48} \Rightarrow x = 4\sqrt{3}$$

7



مبرهنة المماس والقاطع في الدائرة $AC \times CM = (AB)^2$

$$x(x + x + 1) = (6)^2 \Rightarrow x(2x + 1) = 36$$

$$2x^2 + x - 36 = 0 \Rightarrow (2x + 9)(x - 4) = 0$$

يهمل $(2x + 9) = 0$ أما

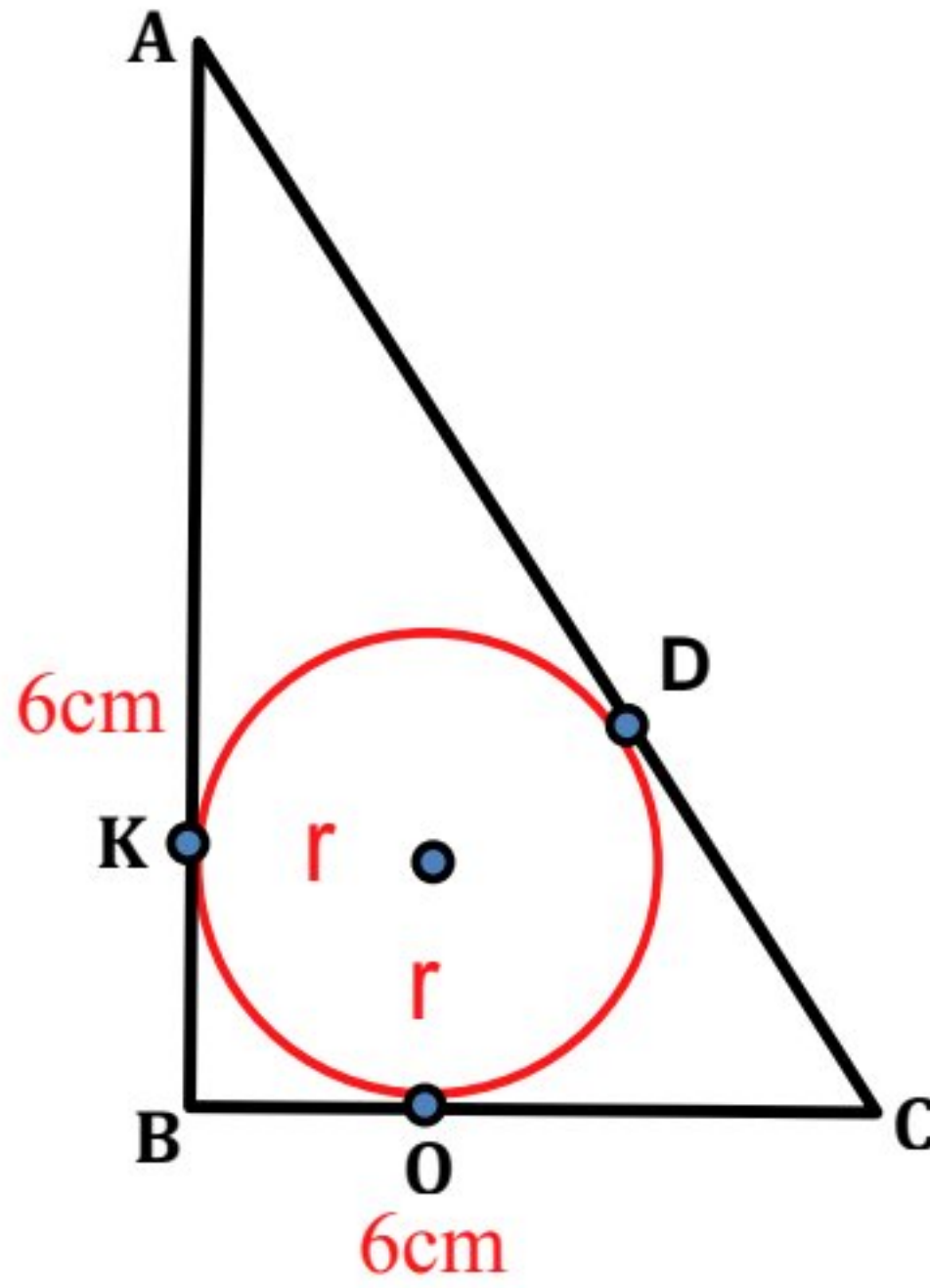
$$أو \quad x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$AB = x + x + 1 = 4 + 4 + 1 = 9$$

تدرب وحل التمرينات

8

ABC مثلث قائم متساوي الساقين وطول كل من ساقيه 6cm ، ارسم الدائرة التي يحيط بها المثلث ABC وجد مساحة الدائرة.



$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

$$= 36 + 36 = 72 \Rightarrow AC = 6\sqrt{2}$$

العمود النازل من رأس زاوية قائمة في مثلث متساوي الساقين

مماسان لدائرة من نقطة خارجة عنها

$$AD = AK = 3\sqrt{2}$$

$$r = 6 - 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

نصف القطر الداخلية للمثلث

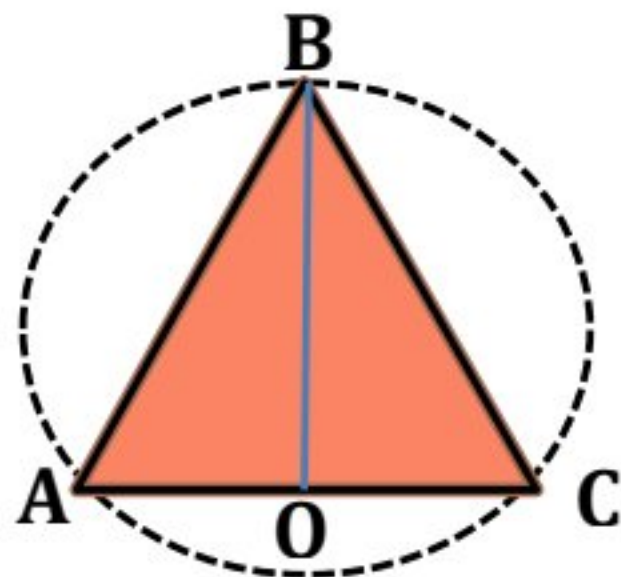
$$A = r\pi^2$$

مساحة الدائرة الداخلية للمثلث

$$= (6 - 3\sqrt{2})^2 \pi \approx 3.13 \pi \text{ cm}^2$$

9

ABC مثلث قائم متساوي الساقين وتره BC حدد نقطة تقاطع محاور هذا المثلث وارسم الدائرة المحيطة به.



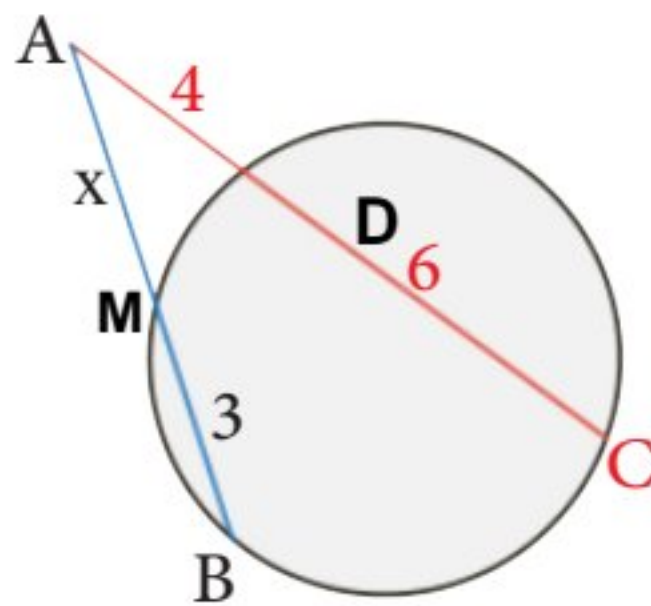
الحل:

محور AC يمر في منتصف AC ويوازي AB

محور AB يمر في منتصف AB ويوازي AC $\Leftarrow$ المحاور الثلاث تلتقي في منتصف BC

جد قيمة x وطول القطع المستقيمة المجهولة لكل مما يأتي:

10



$$AM \times MB = AD \times DC \quad \text{مبرهنة القاطعين في الدائرة}$$

الحل:

$$(4)(10) = x(x + 3)$$

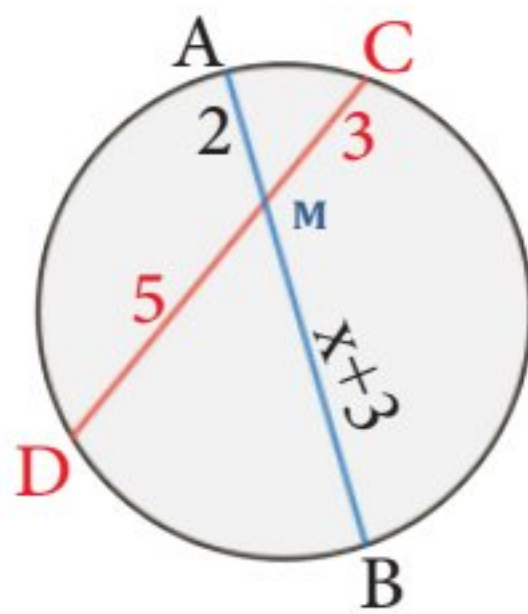
$$x^2 + 3x - 40 = 0$$

$$(x - 5)(x + 8) = 0$$

$$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow \overline{AB} = 5 + 3 = 8$$

$$x + 8 = 0 \quad \text{يهمل}$$

11



مبرهنة القاطعين في الدائرة $AM \times MB = DM \times MC$

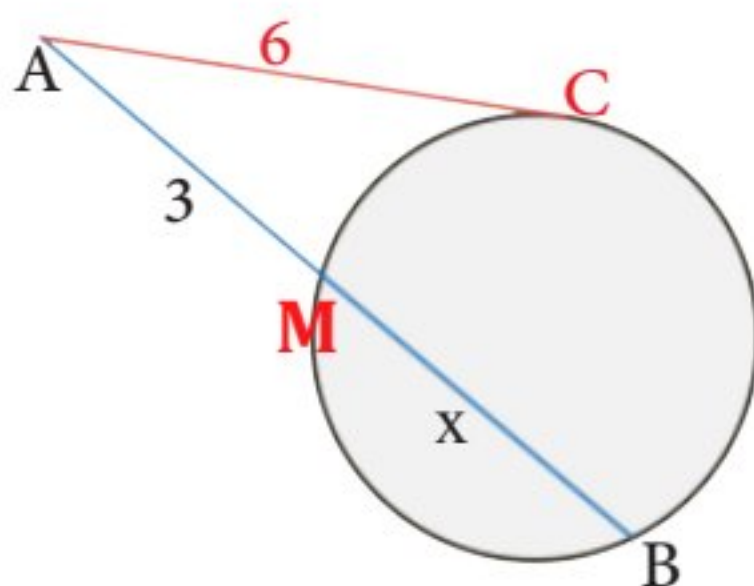
الحل:

$$2(x+3) = 5 \times 3 \Rightarrow 2x + 6 = 15$$

$$2x = 15 - 6 \Rightarrow 2x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{2} \Rightarrow x = 4.5$$

$$\overline{AB} = 2 + x + 3 = 5 + 4.5 = 9.5$$

12



مبرهنة القاطعين في الدائرة $AM \times MB = (AC)^2$

الحل:

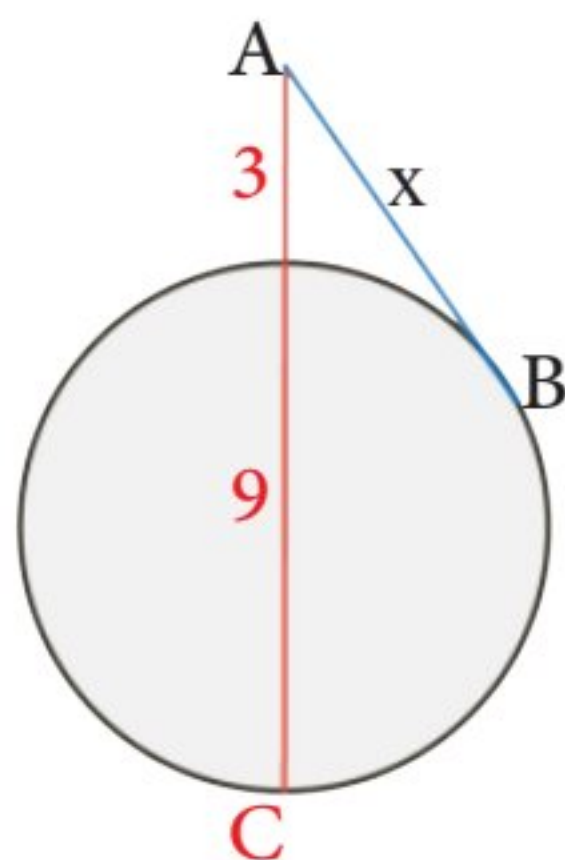
$$(6)^2 = 3(3+x) \Rightarrow 36 = 9 + 3x$$

$$3x = 36 - 9 \Rightarrow 3x = 27$$

$$x = \frac{27}{3} \Rightarrow x = 9$$

$$\overline{AB} = 3 + x = 3 + 9 = 12$$

13



مبرهنة القاطعين في الدائرة $AM \times MC = (AB)^2$

الحل:

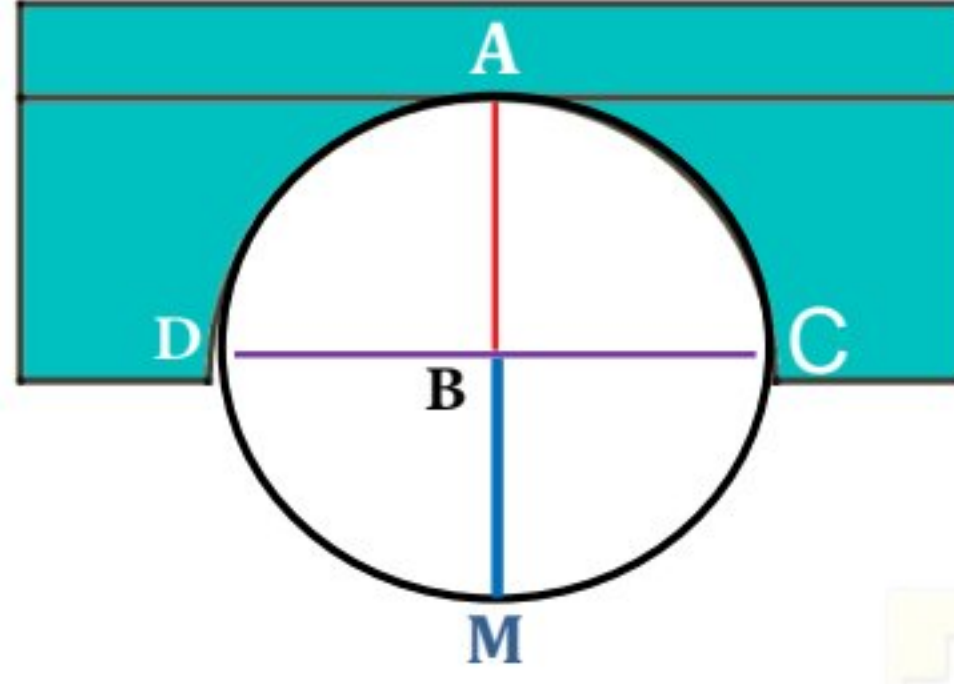
$$3 \times 12 = (x)^2 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = \sqrt{36} = 6$$

$$\overline{AB} = x = 6$$

تدرب وحل مسائل حياتية

14

بناء: يرتكز جسر على قوس دائرة كما مبين في الشكل المقابل،
محور $\overline{AB}$ $DC=150m$, $AB=60m$ ما قطر الدائرة؟



الحل: $DB = BC = 75m$

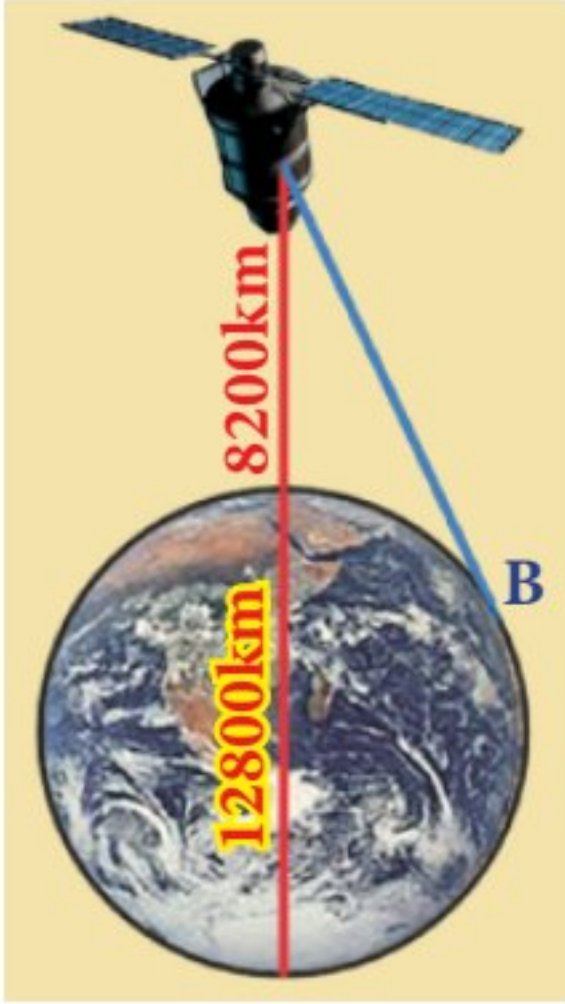
مبرهنة القاطعين في الدائرة $AB \times BM = DB \times BC$

$$60 \times BM = 75 \times 75 \Rightarrow 60 \times BM = 5625 \Rightarrow BM = \frac{5625}{60} = 93.75$$

قطر الدائرة $AM = AB + BM = 60 + 93.75 = 153.75m$

15

فضاء: قمر صناعي يدور حول الارض على ارتفاع 8200km اذا كان قطر الارض 12800km تقريباً ،
ما المسافة التي تفصل القمر الصناعي عن النقطة B في الشكل المجاور.



الحل: مبرهنة القاطعين في الدائرة $AC \times AM = (AB)^2$

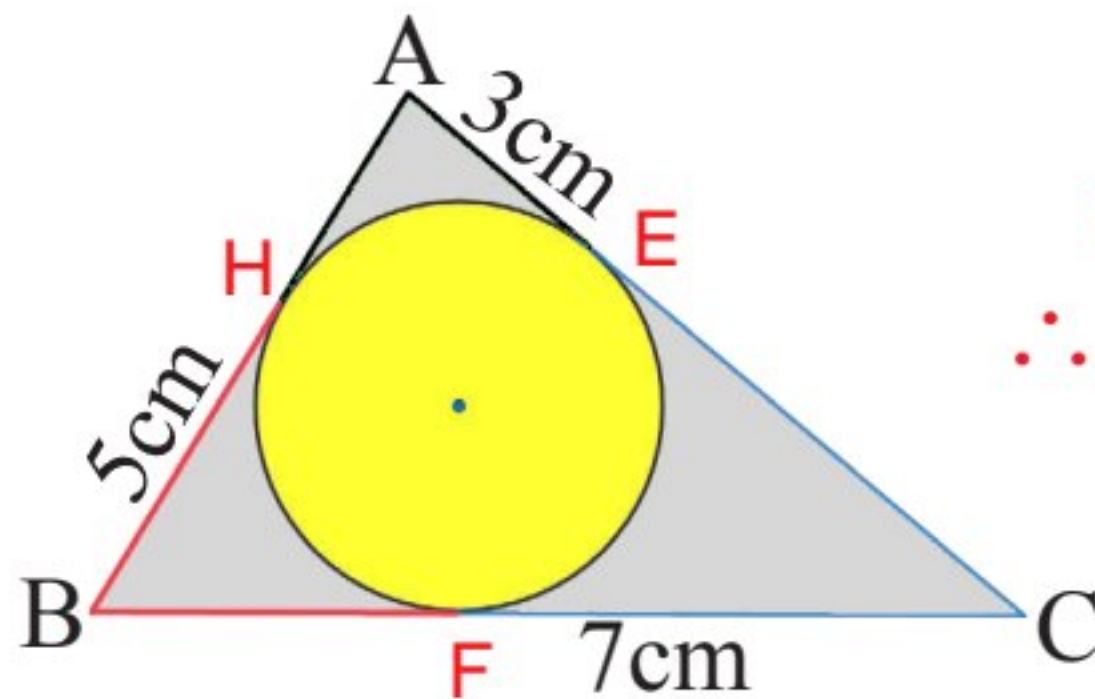
$$8200 \times (12800 + 8200) = (AB)^2$$

$$\Rightarrow (AB)^2 = 8200 (21000) \Rightarrow (AB)^2 = 172200000$$

$$AB = \sqrt{172200000} \approx 13,122.5 \text{ km}$$

16

هندسة: في الشكل المجاور، جد محيط المثلث ABC.



$$CE = 7 \text{ cm}, AH = 3 \text{ cm}, BF = 5 \text{ cm}$$

$$\therefore AC = 10 \text{ cm}, AB = 8 \text{ cm}, BC = 12 \text{ cm}$$

محيط المثلث = مجموع اضلاعه الثلاثة

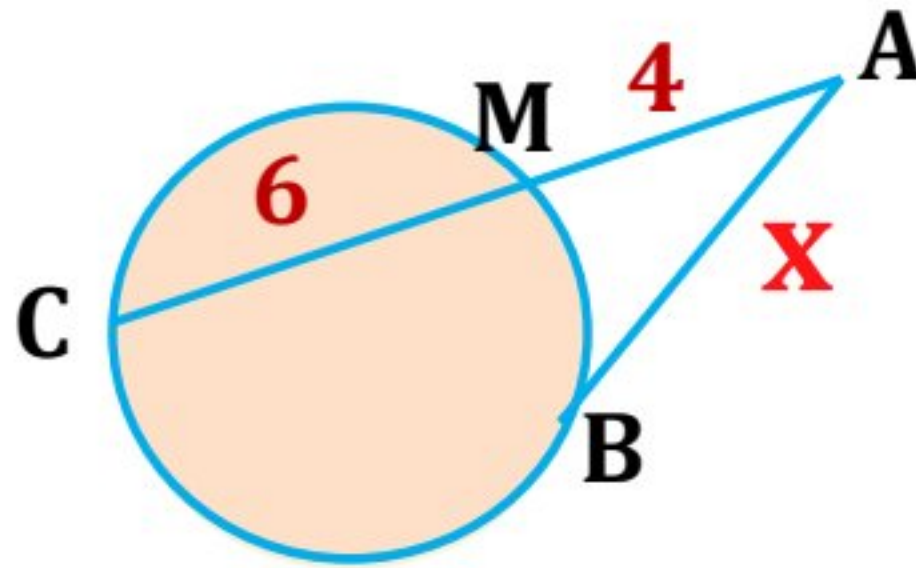
$$P = AB + BC + AC$$

$$P = 10 + 8 + 12 = 30 \text{ cm} \text{ المحيط}$$

فَكَّرْ

اكتشف الخطأ: فيما يلي حلان لإيجاد قيمة x في الشكل المقابل، أيهما الحل الخطأ؟
برر اجابتك.

17



مبرهنة المماس والقاطع

$$i) 4 \times 6 = x^2$$

$$24 = x^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{6}$$

$$ii) x^2 = 40 \Rightarrow x = 2\sqrt{10}$$

الحل:

$$AM \times MC = (AB)^2$$

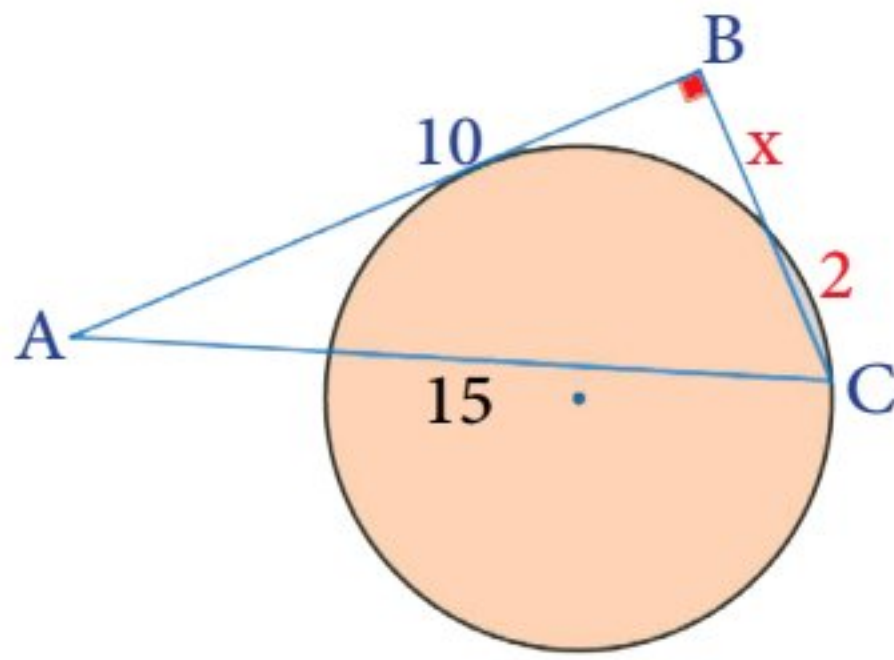
مبرهنة القاطعين في الدائرة

$$4 \times 6 = x^2 \Rightarrow x^2 = 24 \Rightarrow x = \sqrt{24} \Rightarrow x = 2\sqrt{6}$$

الاجابة الخاطئة هي الثانية (ii)

تحديد: في الشكل المقابل $AB = 10$ وهو مماس للدائرة، جد قيمة x .

18



$$(AC)^2 = (BC)^2 + (AB)^2$$

$$(15)^2 = (x+2)^2 + (10)^2$$

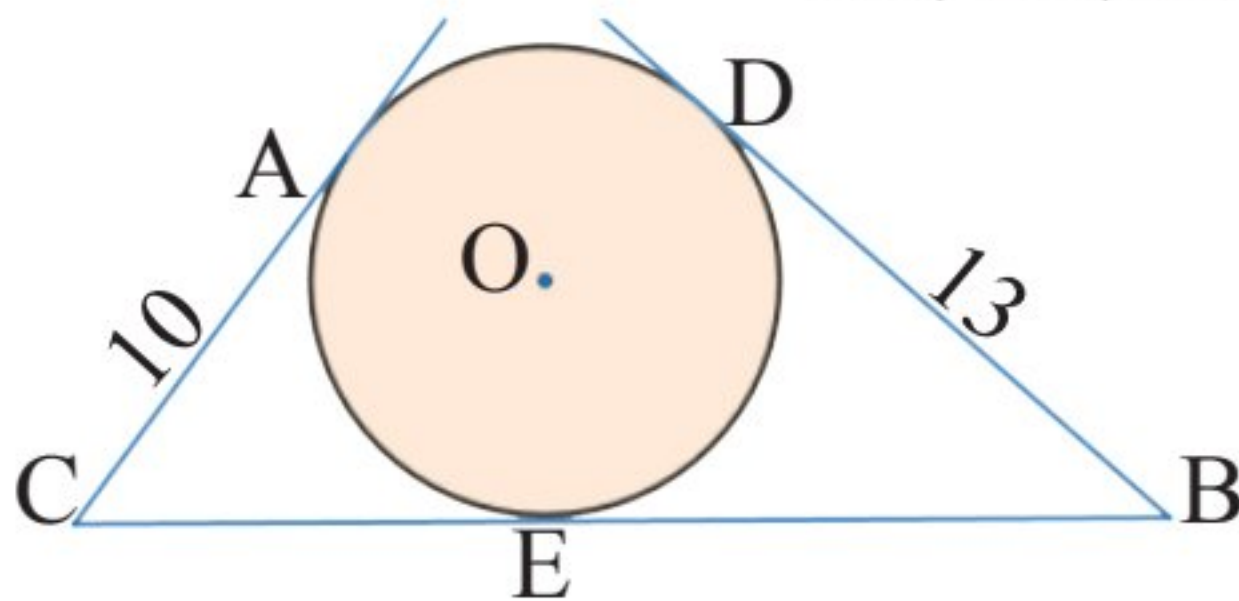
$$(x+2)^2 = 125 \Rightarrow x+2 = 5\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow x = 5\sqrt{5} - 2$$

الحل:

مسألة مفتوحة: في الشكل المجاور دائرة مركزها O $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ مماسات للدائرة، جد طول القطعة BC.

19



$$BE = 13$$

$$EC = 10$$

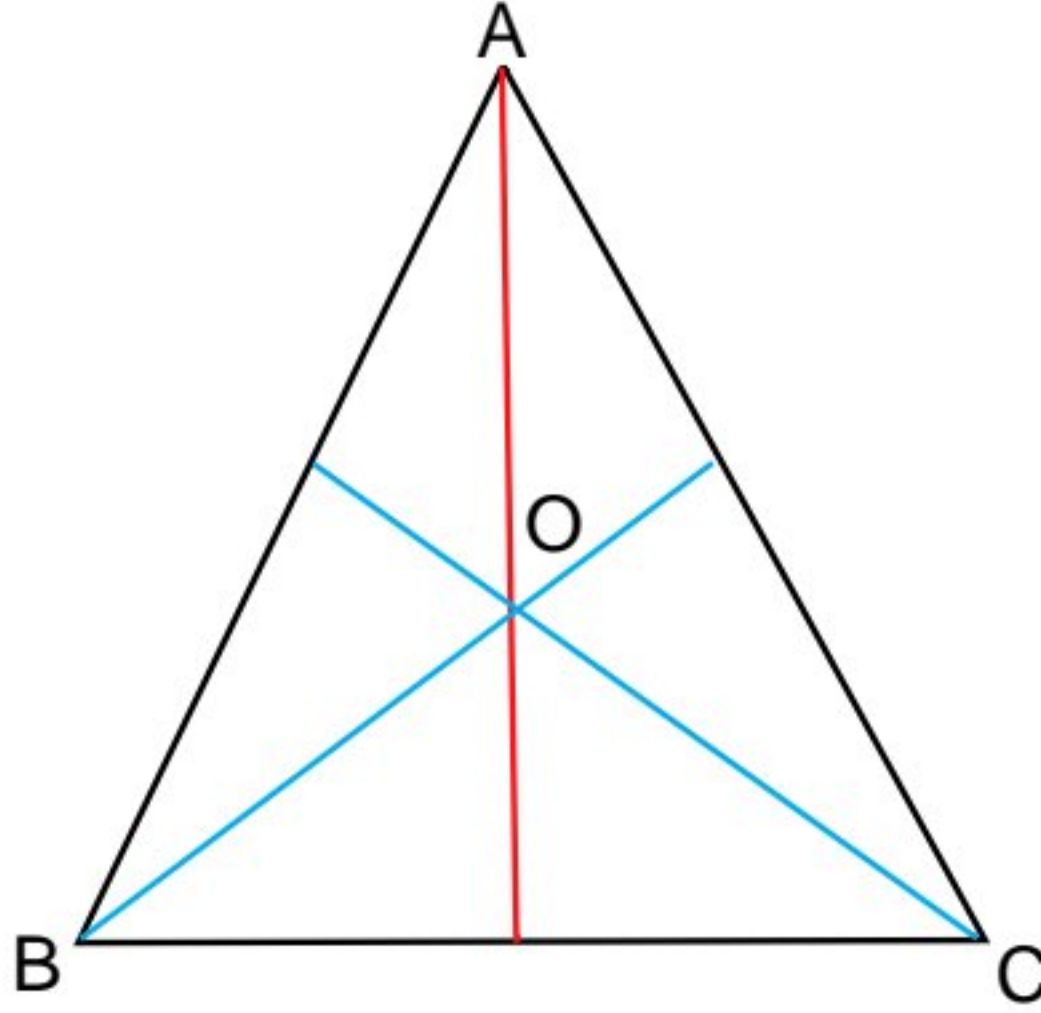
مبرهنة المماسات

$$BC = 13 + 10 = 23$$

الحل:

أكتب

مسألة تستعمل فيها المحاور ومنصفات الزوايا لمثلث في رسم دائرة محيطة به.



في $\triangle ABC$ المجاور يتقاطع محور CB و AC في O
ارسم الدائرة التي مركزها O والمحيطة بـ $\triangle ABC$
في الشكل $OB = OC$ لأن O تقع على محور CB
وبالتالي O تقع على محور AB أي أن محور AB يحوي O
 $\therefore OA = OC = OB$

نستطيع أن نرسم دائرة مركزها O تمر برؤوس ABC



شاهد هذا الدرس
على يوتيوب

الدرس (5-6) الزوايا والدائرة

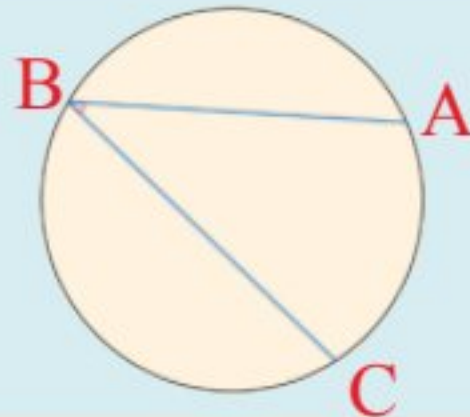
[5-6-1] الزاوية المحيطة

درست سابقاً تعريف القوس بدلالة الزاوية المركزية وكيفية قياس القوس وفي هذا الدرس سنتعرف الى:

الزاوية المحيطة: وهي الزاوية التي رأسها نقطة من نقاط الدائرة وضلعاها وتران في الدائرة.

وكذلك سنتعرف الى كيفية قياسها باستعمال القوس المواجه لها بواسطة المبرهنات التالية وهي من دون برهان.

مبرهنة الزوايا المحيطة

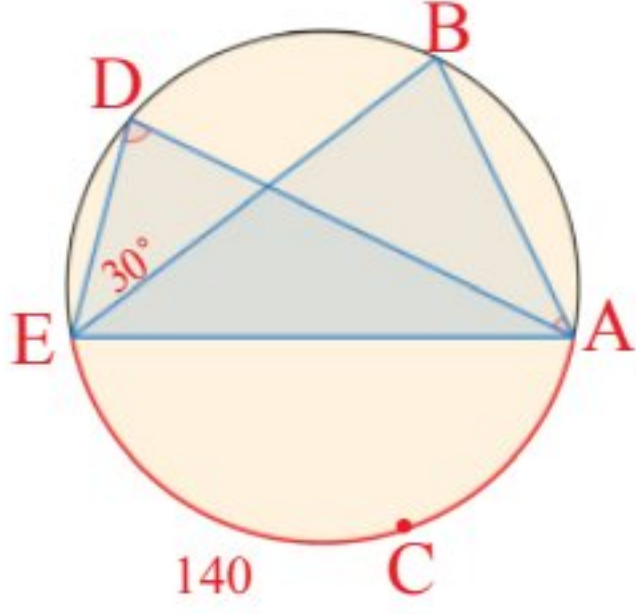


قياس الزاوية المحيطة يساوي نصف قياس القوس المواجه لها.

$$m\angle B = \frac{1}{2} m \widehat{AC}$$

مثال (1)

جد قياس الزوايا المحيطية التالية في الشكل المجاور.



i) $\angle D$

$$m\angle D = \frac{1}{2} m \widehat{ECA}$$

$$= \frac{140}{2} = 70$$

$$m\angle D = 70^\circ$$

ii) $\angle BAD$

$$m\angle BAD = \frac{1}{2} m \widehat{BD}$$

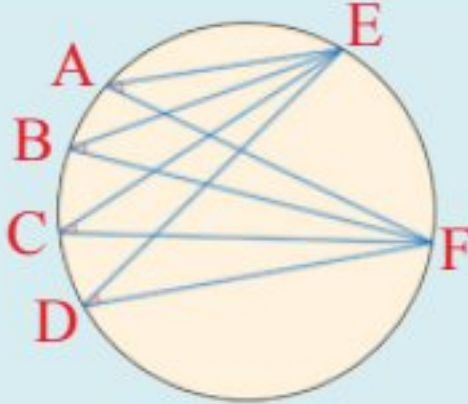
$$m\angle BED = \frac{1}{2} m \widehat{BD}$$

$$\therefore m\angle BED = m\angle BAD = 30^\circ$$

مبرهنة الزوايا المحيطية

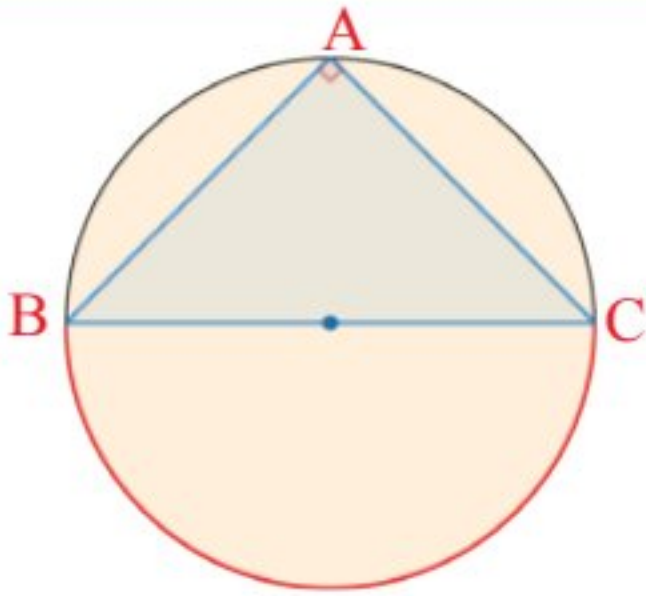
بالتعويض

مبرهنة الزوايا المحيطية المواجهة للقوس نفسه



كل الزوايا المحيطية التي تواجه قوساً مشتركاً على الدائرة تتطابق.

$$m\angle A \cong m\angle B \cong m\angle C \cong m\angle D = m \widehat{EF}$$



هناك حالة خاصة للزاوية المحيطية عندما تكون زاوية قائمة:

- كل زاوية محيطية تواجه نصف دائرة تكون قائمة.
- كل زاوية محيطية تواجه قطراً تكون قائمة.
- كل زاوية محيطية قائمة تواجه قطراً.

$$m\angle A = 90^\circ \Rightarrow m \widehat{BC} = 90$$

مثال (2)

دائرة قطرها KH تقطع HL في N وتقطع KL في M، كما في الشكل

المجاور، برهن ان $\overline{HM}$ و $\overline{KN}$ ارتفاعات في المثلث HKL.

$$\therefore m\angle HNK$$

$$\therefore m\angle HNK = 90^\circ$$

$$\therefore m\angle HMK$$

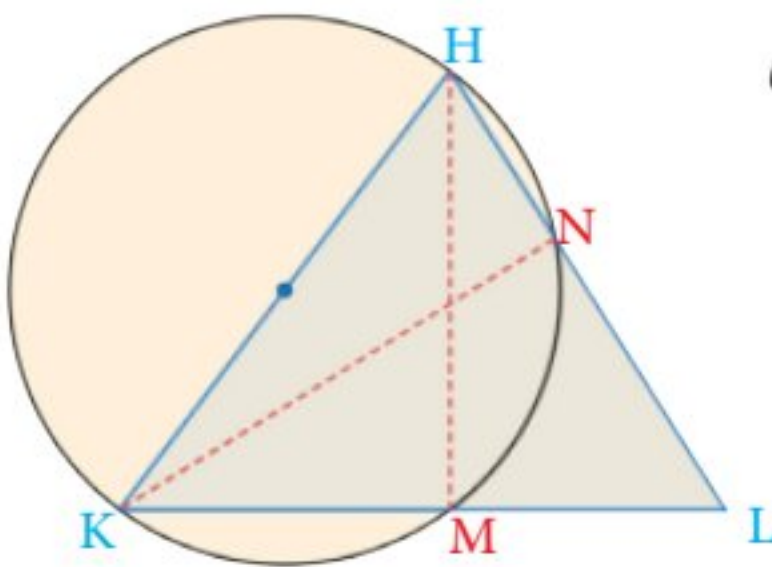
$$\therefore m\angle HMK = 90^\circ$$

زاوية محيطية تواجه القطر KH قائمة

$\overline{KN}$ ارتفاع في المثلث HKL

زاوية محيطية تواجه القطر KH قائمة

$\overline{HM}$ ارتفاع في المثلث HKL



شاهد هذا الدرس
على يوتيوب



10

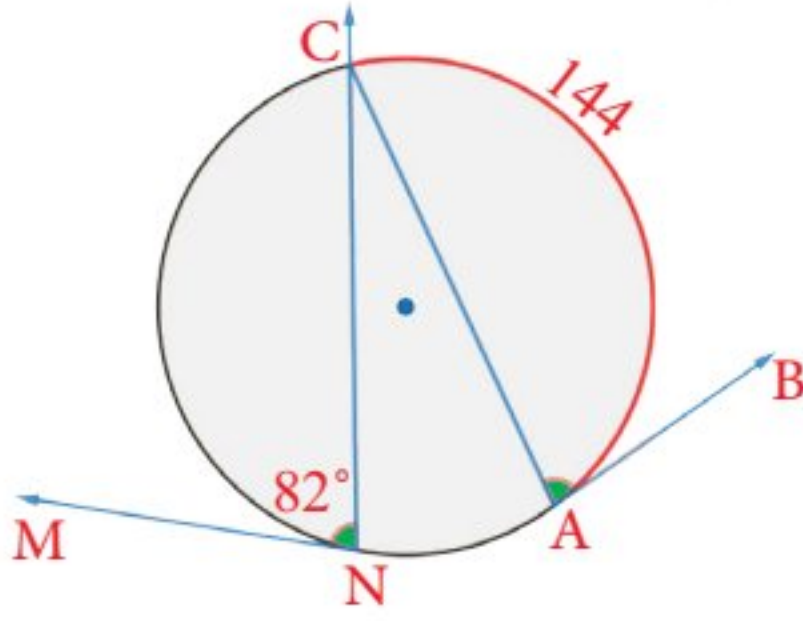
[5-6-2] الزاوية المماسية

الزاوية المماسية: هي الزاوية التي يشكلها مماس الدائرة مع مستقيم آخر يمر في نقطة التماس (وتر للدائرة).

مبرهنة الزوايا المماسية



مثال (3) باستعمال مبرهنة الزوايا المماسية والشكل المجاور جد قياس كل مما يأتي:

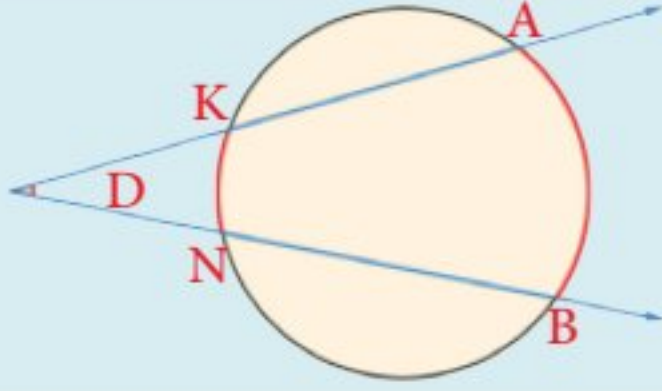


$$\begin{aligned} \text{i) } \angle BAC & \quad \text{ii) } \widehat{NC} \\ m\angle BAC &= \frac{1}{2} m \widehat{CA} \quad m\angle CNM = \frac{1}{2} m \widehat{CN} \\ &= \frac{144}{2} = 72 \quad 82^\circ = \frac{1}{2} m \widehat{CN} \\ \therefore m\angle BAC &= 72^\circ \quad \therefore m \widehat{CN} = 164 \end{aligned}$$

مبرهنة الزوايا المماسية بالتعويض

[5-6-3] الزوايا الداخلية والخارجية في الدائرة

مبرهنة الزاوية الخارجية في دائرة



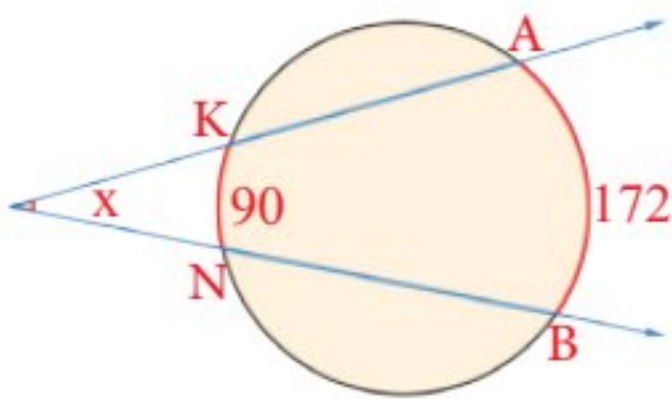
إذا تقاطع مستقيمان خارج دائرة فقياس الزاوية بينهما يساوي نصف الفرق بين قياس القوسين المقطوعين.

$$m\angle D = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} - m\widehat{KN})$$

مثال (4)

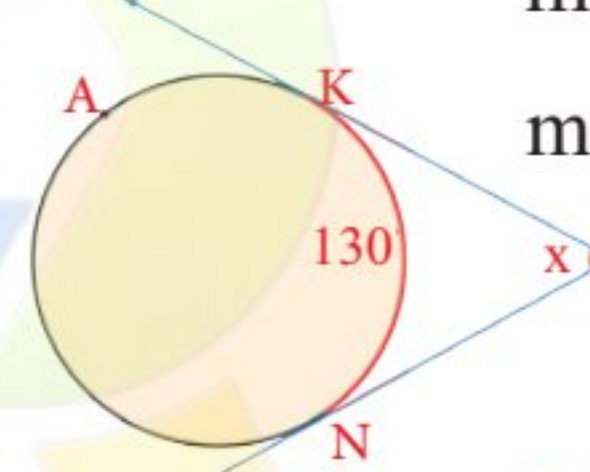
جد قياس الزاوية الخارجية x في كل مما يأتي:

i) باستعمال مبرهنة الزاوية الخارجية في الدائرة وبالتعويض عن قيمة الأقواس في الرسم نجد قياس زاوية x.



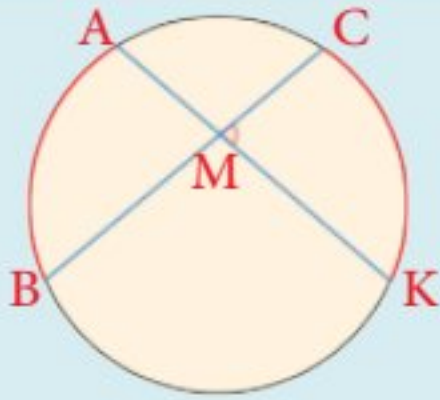
$$\begin{aligned} m\angle x &= \frac{1}{2}(m\widehat{AB} - m\widehat{KN}) \\ &= \frac{1}{2}(172 - 90) \\ \therefore m\angle x &= \frac{82^\circ}{2} = 41^\circ \end{aligned}$$

ii) باستعمال مبرهنة الزاوية الخارجية في الدائرة وبالتعويض عن قيمة KAN بـ 360 نجد قياس زاوية x.



$$\begin{aligned} m\widehat{KAN} &= 360 - 130 = 230 \\ m\angle x &= \frac{1}{2}(m\widehat{KAN} - m\widehat{KN}) \\ &= \frac{1}{2}(230 - 130) \\ \therefore m\angle x &= \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ \end{aligned}$$

مبرهنة الزاوية الداخلية في دائرة

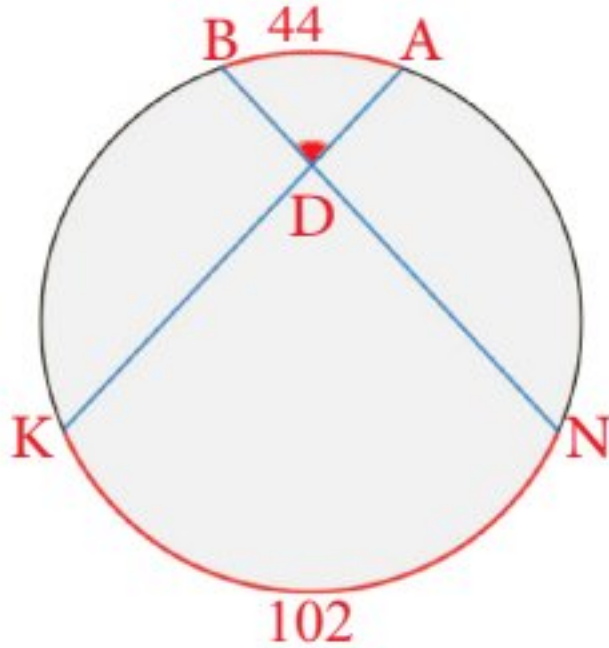


إذا تقاطع مستقيمان داخل دائرة فقياس الزاوية بينهما يساوي نصف مجموع قياس القوسين المقطوعين.

$$m\angle CMK = \frac{1}{2}(m\widehat{CK} + m\widehat{AB})$$

مثال (5)

جد قياس $\angle ADB$ مستعملاً مبرهنة الزاوية الداخلية في الدائرة.

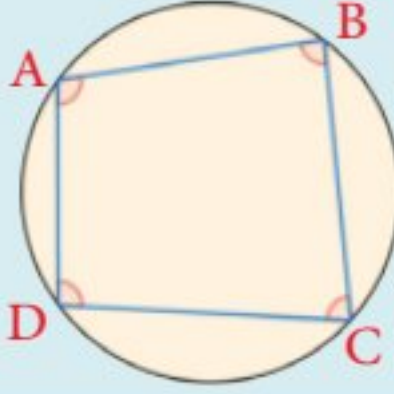


$$\begin{aligned} m\angle ADB &= \frac{1}{2}(m\widehat{KN} + m\widehat{AB}) \\ &= \frac{1}{2}(102 + 44) \\ \therefore m\angle ADB &= \frac{146^\circ}{2} = 73^\circ \end{aligned}$$

مبرهنة الزاوية الداخلية في دائرة بالتعويض

يمكن ايجاد دائرة تمر في الرؤوس الاربعة لرباعي ويسمى هذا الرباعي بالرباعي الدائري.

مبرهنة الرباعي الدائري



في كل رباعي دائري مجموع قياس كل زاويتين متقابلتين يساوي 180°

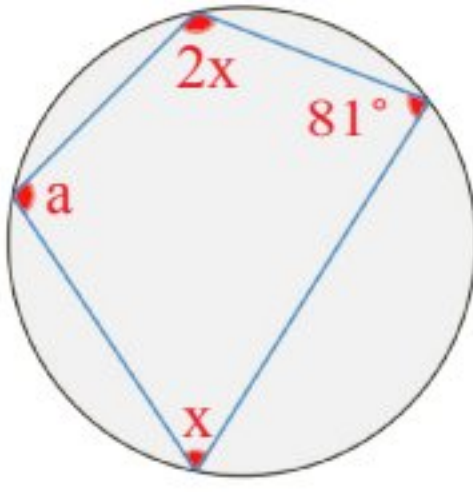
$$m\angle A + m\angle C = 180^\circ$$

$$m\angle B + m\angle D = 180^\circ$$

مثال (6) جد قيمة a, x في الشكل المجاور:

مبرهنة الرباعي الدائري

مبرهنة الرباعي الدائري



$$\therefore a + 81^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore a = 180^\circ - 81^\circ = 99^\circ$$

$$\therefore x + 2x = 180^\circ \Rightarrow 3x = 180^\circ$$

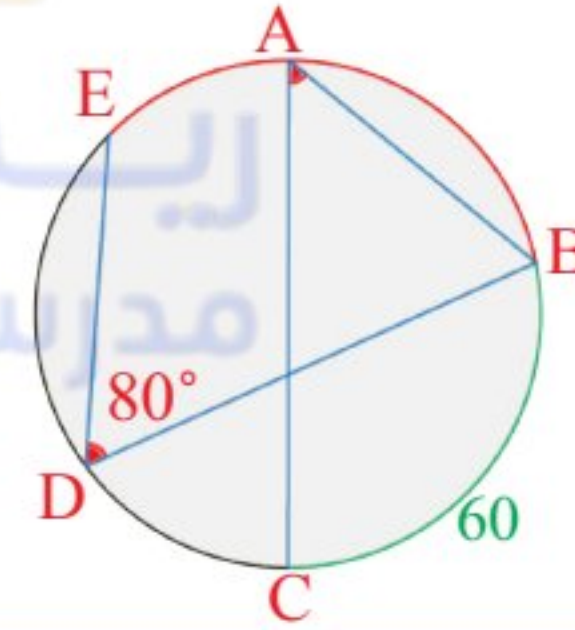
$$\therefore x = 60^\circ$$

تأكد من فهمك

جد قياس كل مما يأتي:

1 $m\widehat{BE} = 2m\angle BDE = 2 \times 80^\circ = 160^\circ$

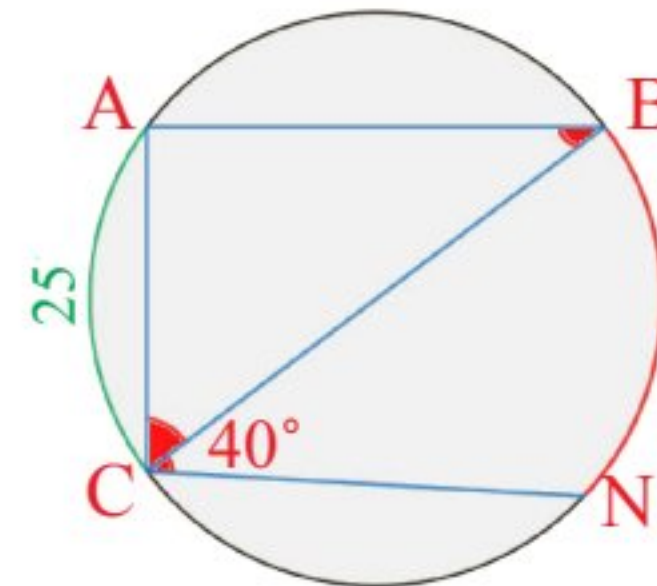
3 $m\angle CAB = \frac{1}{2} m\widehat{BC}$ مبرهنة الزاوية المحيطية
 $\therefore m\angle CAB = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$



2 $m\angle ABC = \frac{1}{2} m\widehat{AC}$ مبرهنة الزاوية المحيطية
 $\therefore m\angle ABC = \frac{1}{2} \times 25^\circ = 12.5^\circ$

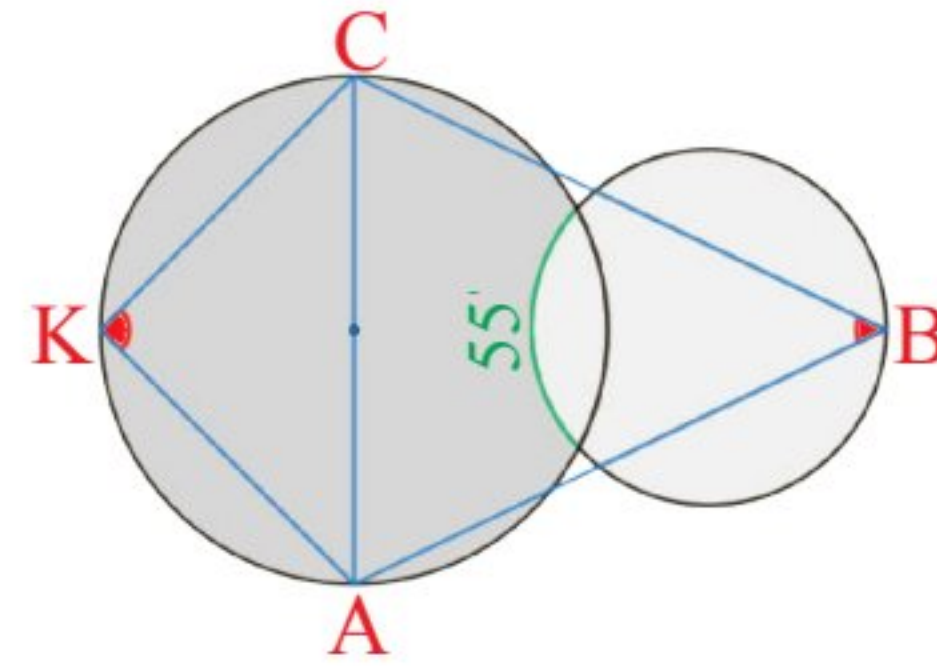
4 $m\angle ACB = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$

5 $m\widehat{BN} = 2m\angle BCN = 2 \times 40^\circ = 80^\circ$



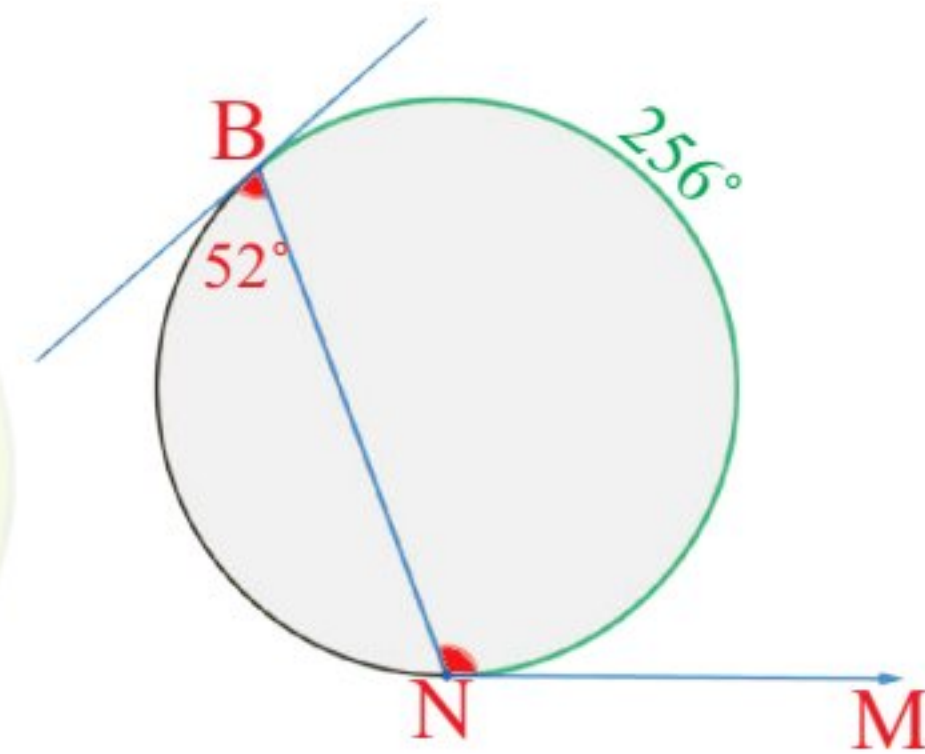
6 $m\angle CKA = 90^\circ$

8 $m\angle CBA = \frac{1}{2} (55) = 27.5^\circ$



7 $m\angle MNB = \frac{1}{2} m \widehat{BN} = \frac{1}{2} \times (256) = 128^\circ$

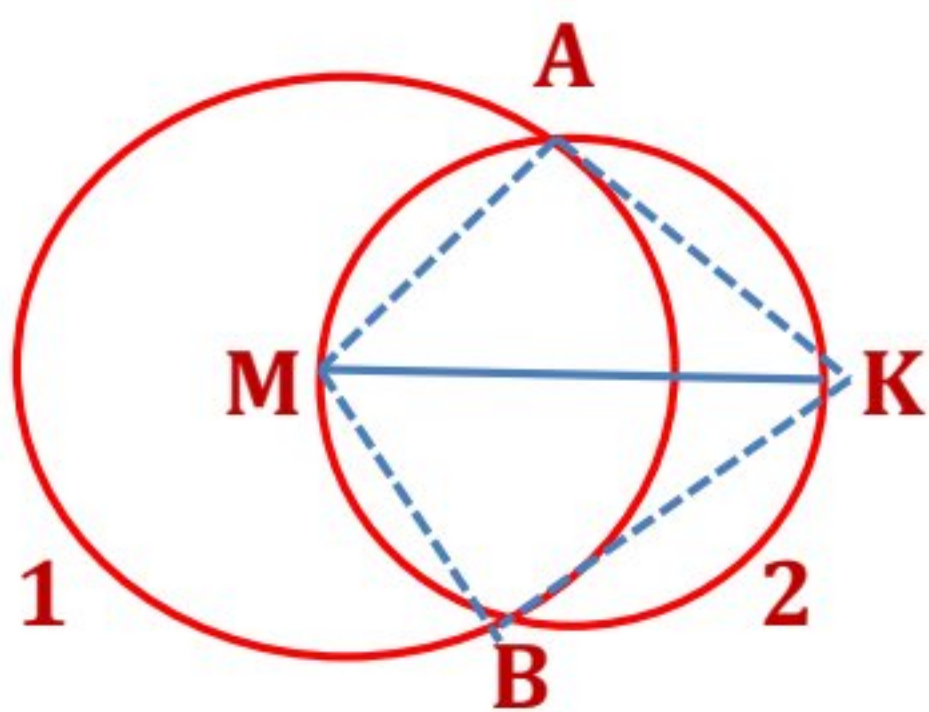
9 $m \widehat{BN} = 2m\angle B = 2 \times 52^\circ = 104$



إذا علمت ان M مركز الدائرة 1 و $\overline{MK}$ هو قطر الدائرة 2، برهن ان $\overline{KB}$ و $\overline{KA}$ مماسان للدائرة 1.

10

الحل:



$\therefore \angle KAM$ زاوية محيطية تواجه القطر $\overline{MK}$

$\therefore \angle KAM = 90^\circ$ قائمة

$\therefore \angle KBM$ زاوية محيطية تواجه القطر $\overline{MK}$

$\therefore \angle KBM = 90^\circ$ قائمة $\Rightarrow \overline{KA} = \overline{KB}$

$\Rightarrow \overline{KA}, \overline{KB}$ هما مماسان للدائرة 1

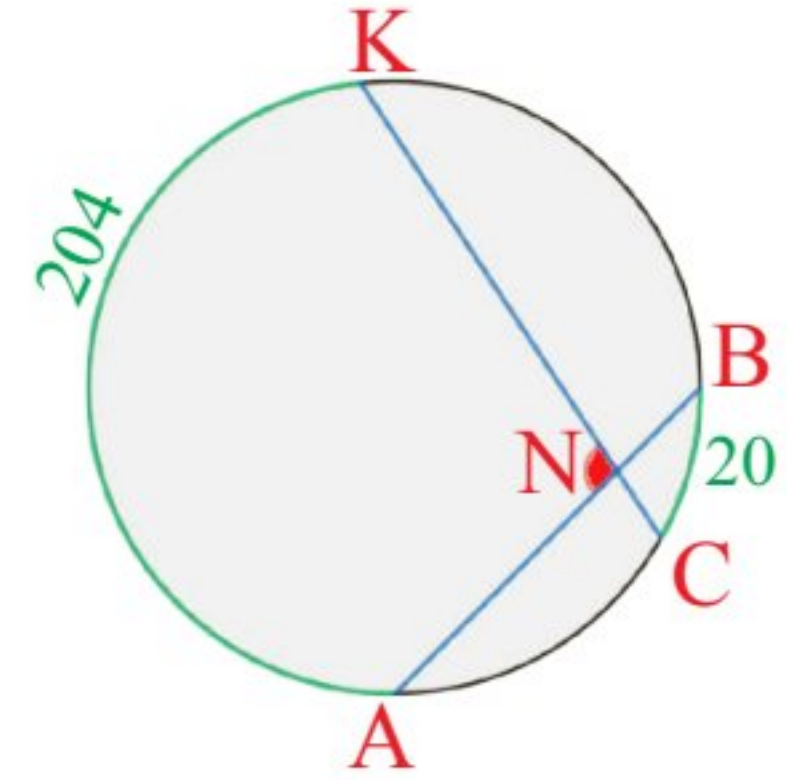
جد قياس كل مما يأتي:

11 $m\angle KNA$

الحل:

$$m\angle KNA = \frac{1}{2} (m \widehat{AK} + m \widehat{BC}) \quad \text{مبرهنة الزاوية الداخلية في دائرة}$$

$$\therefore m\angle KNA = \frac{1}{2} (204^\circ + 20^\circ) = \frac{1}{2} \times 224^\circ = 112^\circ$$



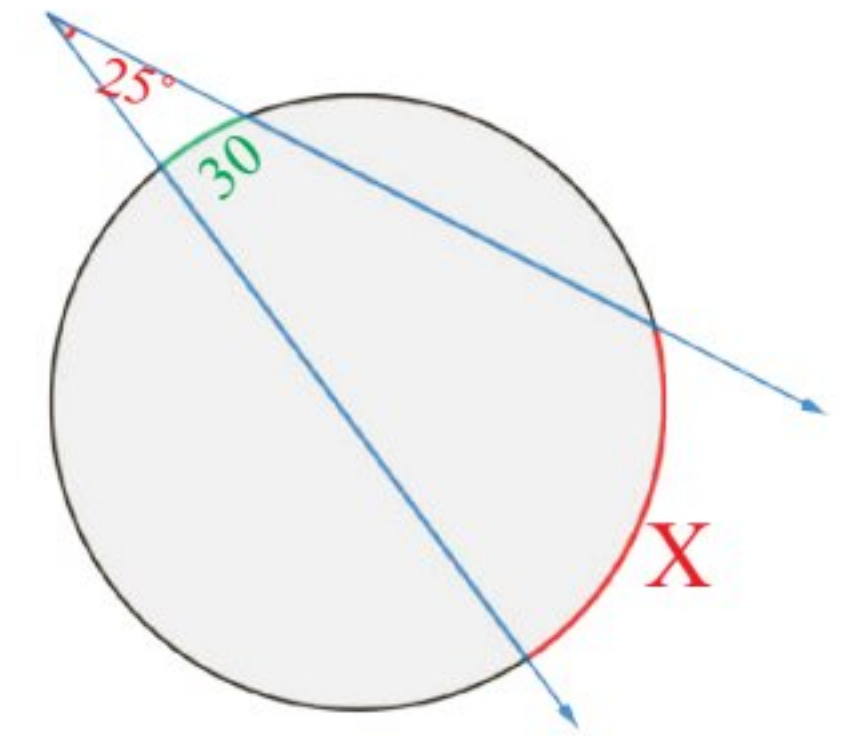
12 $m \widehat{X}$

الحل:

$$m\angle C = \frac{1}{2} (m \widehat{AB} - m \widehat{KN}) \quad \text{مبرهنة الزاوية الخارجية في دائرة}$$

$$25^\circ = \frac{1}{2} (m \widehat{X} - 30^\circ) \} \times 2 \Rightarrow 50^\circ = m \widehat{X} - 30^\circ$$

$$m \widehat{X} = 50^\circ + 30^\circ = 80^\circ$$



تدرب وحل التمرينات

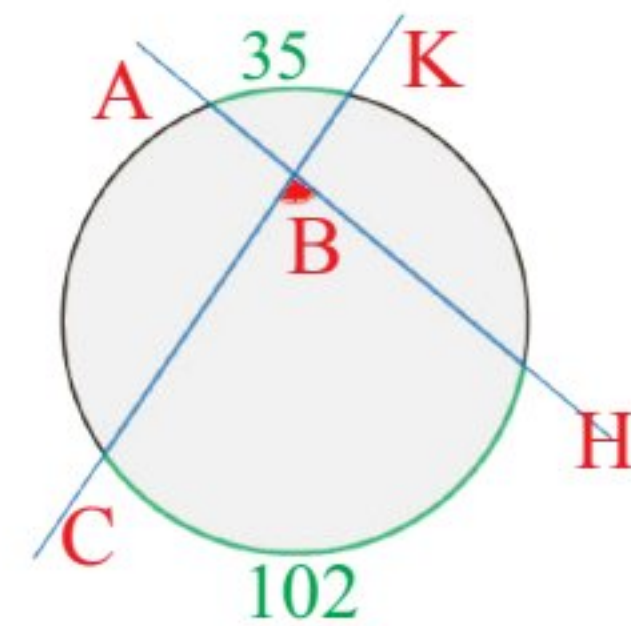
جد قياس كل مما يأتي:

13 $m\angle HBC$

الحل:

$$m\angle HBC = \frac{1}{2} (m \widehat{HC} + m \widehat{AK}) \quad \text{مبرهنة الزاوية الداخلية في دائرة}$$

$$\therefore m\angle HBC = \frac{1}{2} (102^\circ + 35^\circ) = \frac{1}{2} \times 137^\circ = 68.5^\circ$$



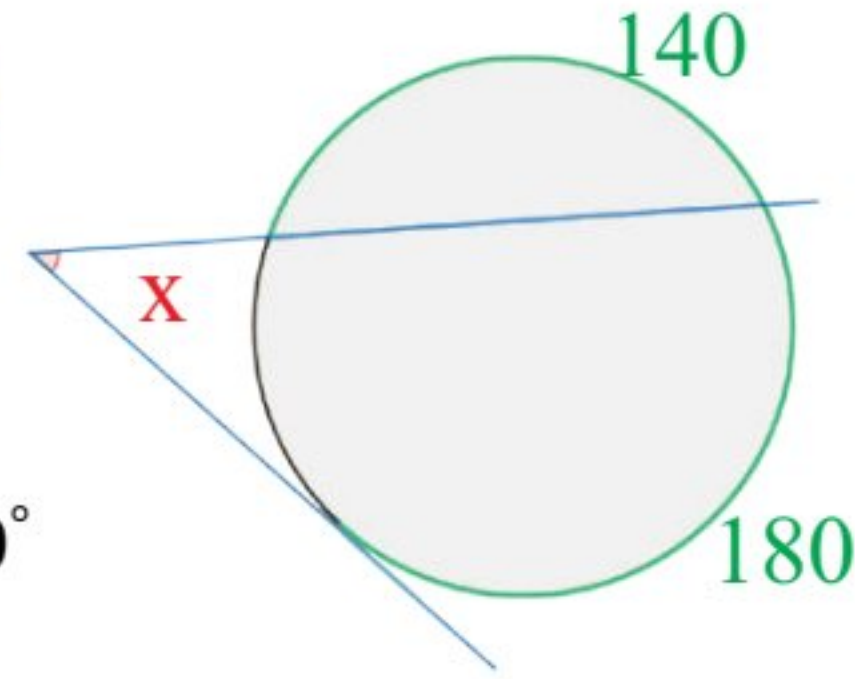
14 $m\angle X$

الحل:

مبرهنة الزاوية الخارجية في دائرة $m\angle C = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} - m\widehat{KB})$

$$m\widehat{KB} = 360^\circ - (180^\circ + 140^\circ) = 360^\circ - 320^\circ = 40^\circ$$

$$m\angle X = \frac{1}{2}(180^\circ - 40^\circ) = \frac{1}{2} \times 140^\circ = 70^\circ$$



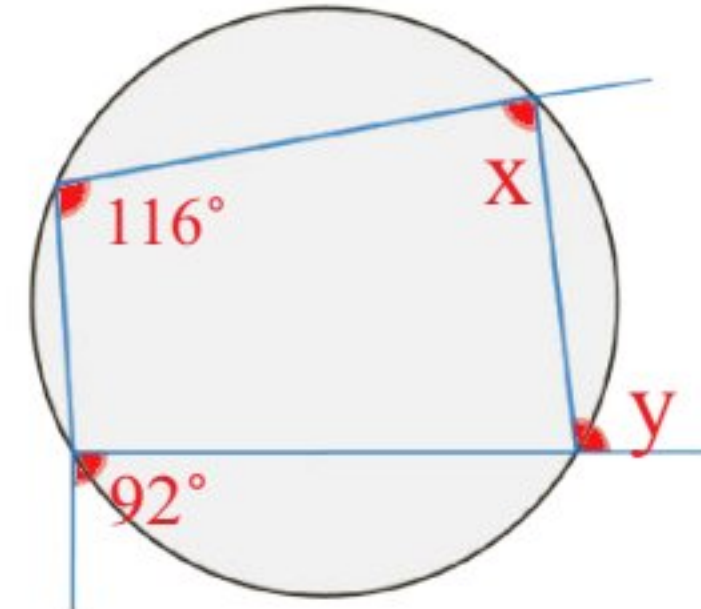
15 $m\angle x, m\angle y$

الحل:

$$x + x = 180^\circ \quad \text{مبرهنة الرباعي الدائري}$$

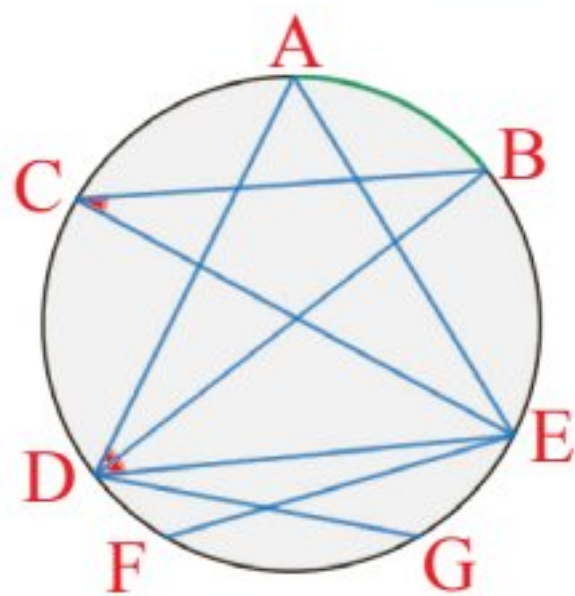
$$2x = 180^\circ \Rightarrow x = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$$m\angle y = 92^\circ \quad \text{بالتبادل}$$



تدرب وحل مسائل حياتية

16 زجاج: رسم احد الفنانين الرسم المجاور على زجاج، جد قياس $\angle ADE$ اذا علمت ان $\angle BCE = 30^\circ$ وقياس $\widehat{AB} = 42$.



$$\angle BCE = \frac{1}{2} \widehat{BE} \quad \text{مبرهنة الزاوية المحيطية}$$

$$30^\circ = \frac{1}{2} \widehat{BE} \Rightarrow \widehat{BE} = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$$

$$\angle ADE = \frac{1}{2} \widehat{AE} \quad \text{مبرهنة الزاوية المحيطية}$$

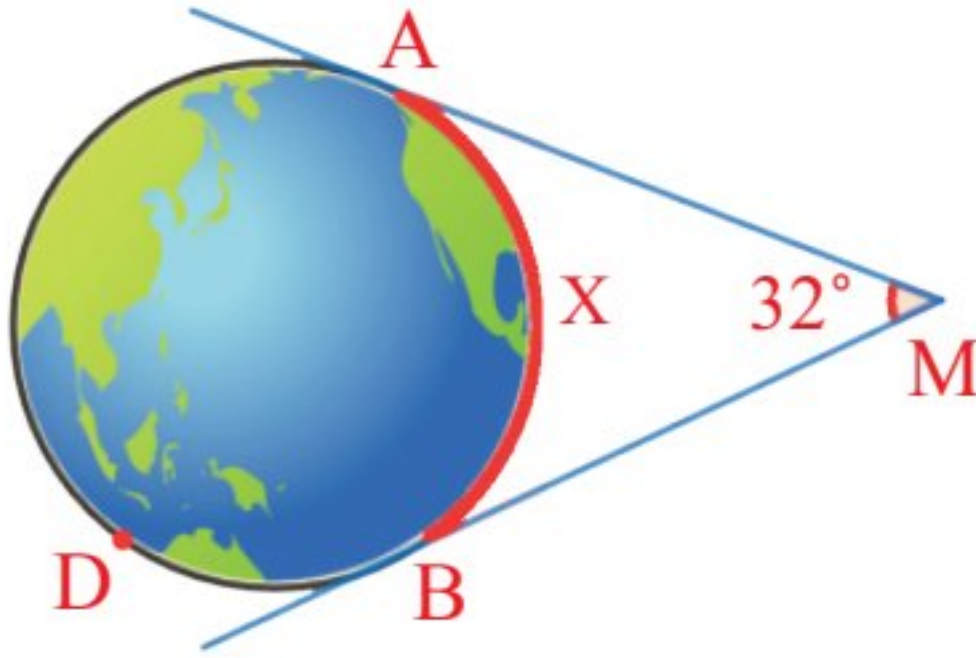
$$\angle ADE = \frac{1}{2}(\widehat{AB} + \widehat{BC})$$

$$\angle ADE = \frac{1}{2}(42^\circ + 60^\circ) = \frac{1}{2} \times 102^\circ = 51^\circ$$

17

فضاء: قمر صناعي يدور حول الارض عندما يصل النقطة M يكون على ارتفاع 14000km فوق الارض، ما قياس القوس الذي يمكن رؤيته من كاميرا القمر الصناعي على الارض؟

الحل:



$$m\angle M = \frac{1}{2}(m\widehat{ADB} - m\widehat{AB})$$

$$m\widehat{ADB} = 360^\circ - x \Rightarrow m\widehat{AB} = x$$

$$32^\circ = \frac{1}{2}(360^\circ - x) \Rightarrow 64^\circ = 360^\circ - 2x$$

$$\Rightarrow 2x = 296^\circ \Rightarrow x = 148$$

فَكَّرْ

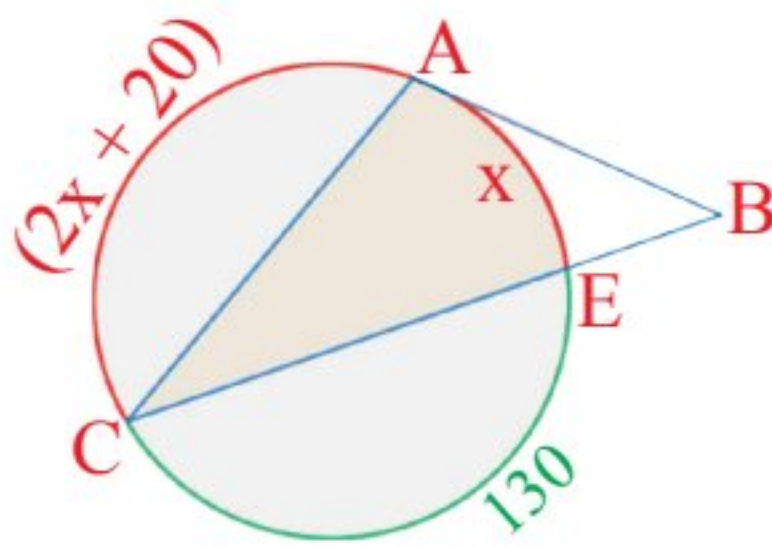
18

أكتشف الخطأ: كتب سعيد

$$m\angle CAB$$

$$\frac{160^\circ}{2} = 80^\circ$$

الحل: أولاً : نجد قيمة x



$$2x + 20 + x + 130^\circ = 360^\circ \Rightarrow 3x + 150^\circ = 360^\circ \Rightarrow 3x = 360^\circ - 150^\circ$$

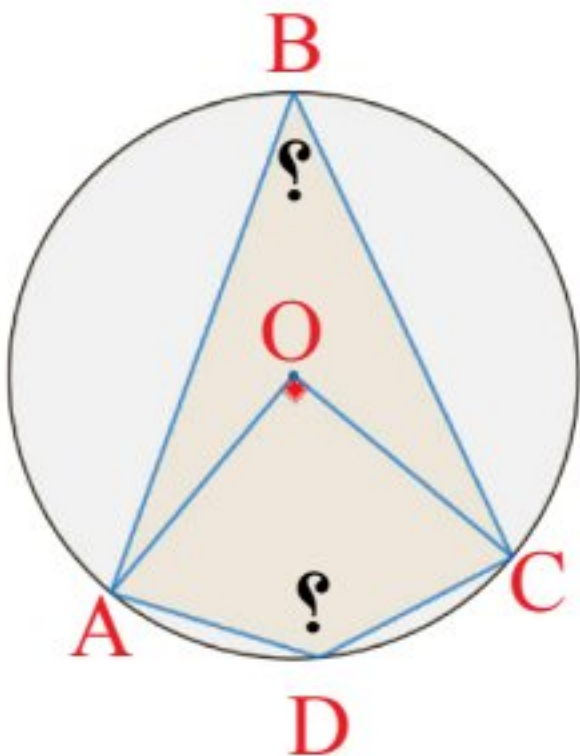
$$3x = 210^\circ \Rightarrow x = \frac{210^\circ}{3} = 70^\circ = m\widehat{EC}$$

$$m\angle CAB = \frac{1}{2}m\widehat{AEC} \Rightarrow m\angle CAB = \frac{1}{2}(m\widehat{AE} + m\widehat{EC})$$

$$\Rightarrow m\angle CAB = \frac{1}{2}(70^\circ + 130^\circ) \Rightarrow m\angle CAB = \frac{1}{2}(200) = 100$$

19

حس عددي: جد قيمة الزوايا المجهولة :



$$m\angle B = \frac{1}{2}m\angle AOC \Rightarrow m\angle COB = \frac{1}{2}(90) = 45^\circ$$

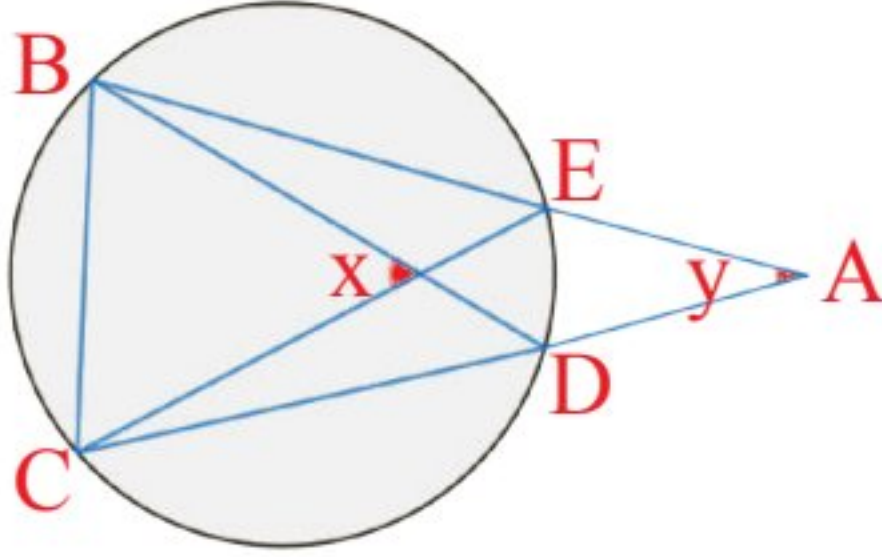
$$180^\circ - 45^\circ = m\angle D = 135^\circ$$

الحل:

أكتب

مبرهنات الزوايا الداخلية والخارجية لتقارن بين الزاويتين x, y .

الحل:



تستعمل مبرهنة الزاوية الداخلية اذا تقاطع مستقيمان داخل دائرة
فقياس الزاوية بينهما يساوي نصف مجموع قياس القوسين
المقتطعين .

$$m\angle Y = \frac{1}{2} (m\widehat{CB} - m\widehat{ED})$$

تستعمل مبرهنة الزاوية الخارجية اذا تقاطع مستقيمان خارج دائرة فقياس الزاوية بينهما يساوي نصف الفرق بين القوسين
المقتطعين .

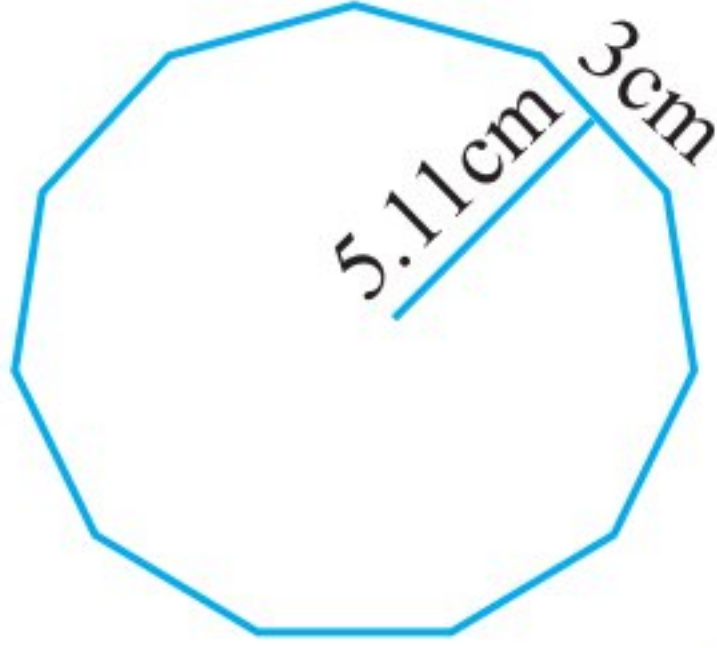
$$m\angle X = \frac{1}{2} (m\widehat{CB} + m\widehat{ED})$$

$$m\angle X + m\angle Y = \frac{1}{2} (m\widehat{CB} + m\widehat{ED} + m\widehat{CB} - m\widehat{ED})$$

$$m\angle X + m\angle Y = m\widehat{CB}$$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

اختبار الفصل



1 جد مساحة ومحيط مضلع منتظم اذا اعطيت المعلومات في الشكل المجاور.

الحل: $H = 6\text{cm}, L = 3\text{cm}, n = 11$

المحيط $P = n \times L = 11 \times 3 = 33\text{cm}$

المساحة $A = \frac{1}{2} \times L \times H \times n = \frac{1}{2} \times 3 \times 5.11 \times 11 \approx 84.3\text{ cm}^2$

2 جد المساحة السطحية والحجم للمخروط اذا علمت ان مساحة قاعدته $9\pi\text{cm}^2$ وارتفاعه الجانبي 5cm .

القاعدة دائرة $B = r^2\pi$

الحل: $B = 9\pi\text{cm}^2, l = 5\text{cm}$

$9\pi = r^2\pi \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3\text{cm}$

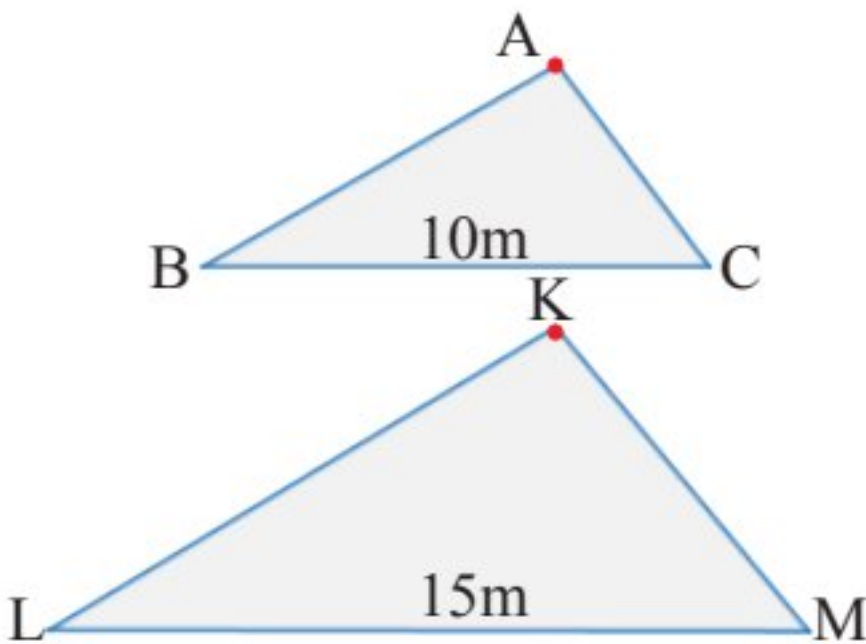
$l^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow (5)^2 = h^2 + (3)^2 \Rightarrow 25 = h^2 + 9$

$h^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow h = \sqrt{16} = 4\text{cm}$

الحجم $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h = \frac{1}{3}\pi \times 9 \times 4 = 12\pi\text{ cm}^3$

المساحة السطحية $SA = 2\pi r \times l = 2\pi \times 3 \times 5 = 30\pi\text{ cm}^2$

3 المثلثان ABC, KLM متشابهان، مساحة المثلث ABC تساوي 24m^2 ما مساحة المثلث KLM؟



الحل: نفرض مساحة المثلث ABC A_1 ، مساحة المثلث KLM A_2

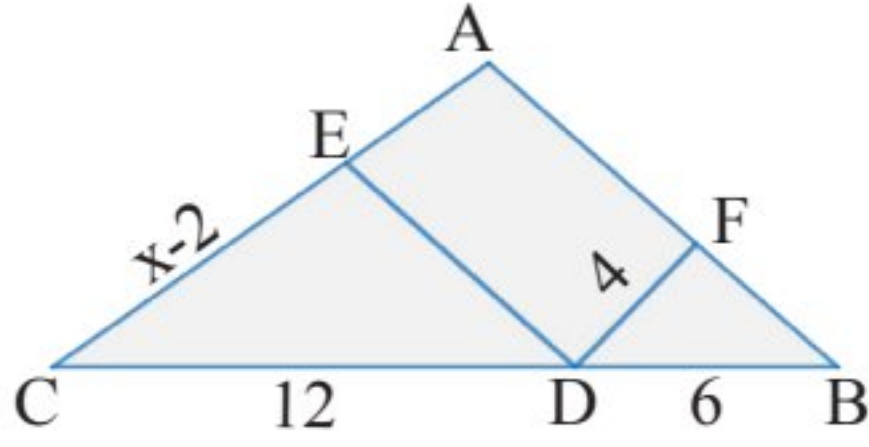
$\frac{(BC)^2}{(ML)^2} = \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow \frac{(10)^2}{(15)^2} = \frac{24}{A_2}$

$\frac{100}{225} = \frac{24}{A_2} \Rightarrow \frac{4}{9} = \frac{24}{A_2}$ **الطرفين في الوسطين**

$4 \times A_2 = 216 \Rightarrow A_2 = \frac{216}{4} = 54\text{cm}^2$

4 بيّن ان المثلثين ABC, FBD في الشكل المجاور متشابهان، حيث ان: $\overline{AC} \parallel \overline{FD}$ ، وجد قيمة x.

الحل:

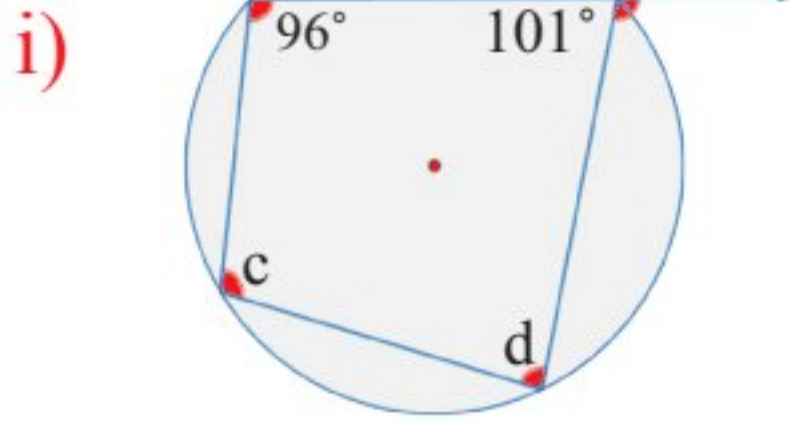


$$\frac{EC}{FD} = \frac{CD}{DB} \Rightarrow \frac{(x-2)+4}{12+6} = \frac{4}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{x+2}{18} = \frac{2}{3} \quad \text{الطرفين في الوسطين}$$

$$3x + 6 = 36 \Rightarrow 3x = 30 - 6 \Rightarrow 3x = 30 \Rightarrow x = \frac{30}{3} \Rightarrow x = 10$$

5 جد قياس الزوايا المجهولة في الاشكال الآتية:



الحل:

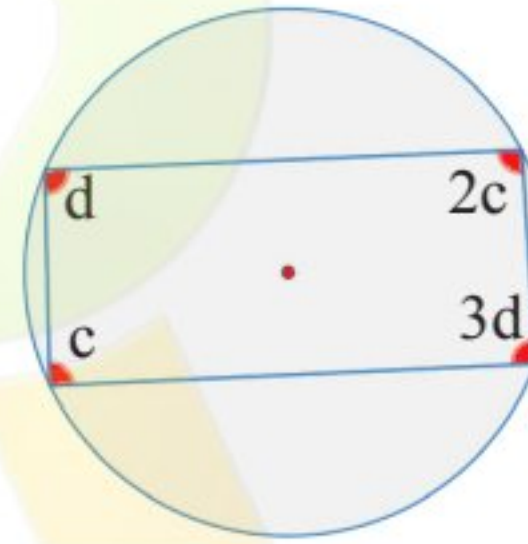
$$d + 96^\circ = 180^\circ \quad \text{مبرهنة الرباعي الدائري}$$

$$\Rightarrow d = 180^\circ - 96^\circ = 84^\circ$$

مبرهنة الرباعي الدائري

$$c + 101^\circ = 180^\circ \Rightarrow c = 180^\circ - 101^\circ = 79^\circ$$

ii)



الحل:

$$d + 3d = 180^\circ \quad \text{مبرهنة الرباعي الدائري}$$

$$4d = 180^\circ \Rightarrow d = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ \Rightarrow 3d = 135^\circ$$

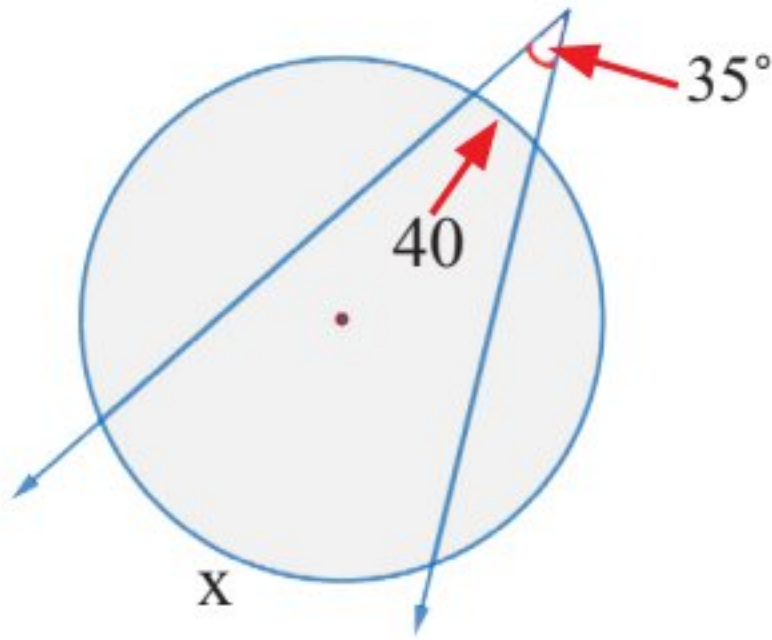
$$c + 2c = 180^\circ \quad \text{مبرهنة الرباعي الدائري}$$

$$3c = 180^\circ \Rightarrow c = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ \Rightarrow 2c = 120^\circ$$

6

جد قيمة x في كل مما يأتي:

i)

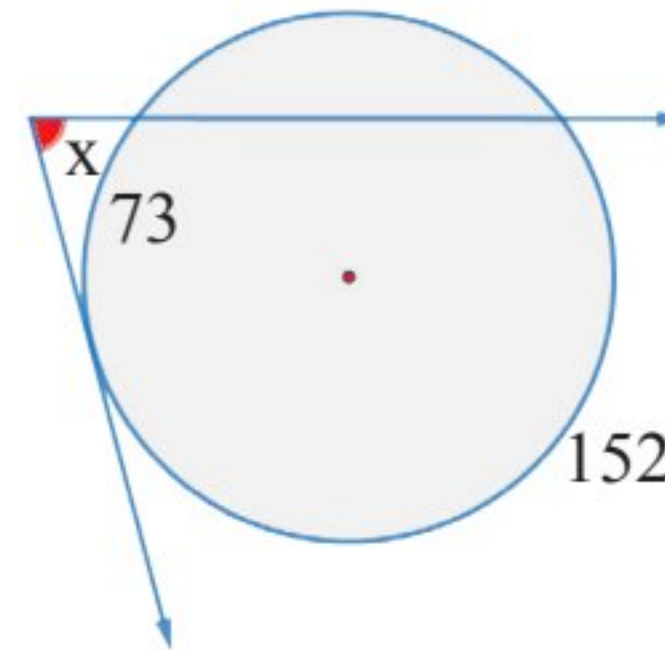


الحل:

$$35^\circ = \frac{1}{2}(x - 40^\circ) \Rightarrow 70^\circ = x - 40^\circ$$

$$x = 70^\circ + 40^\circ = 110^\circ$$

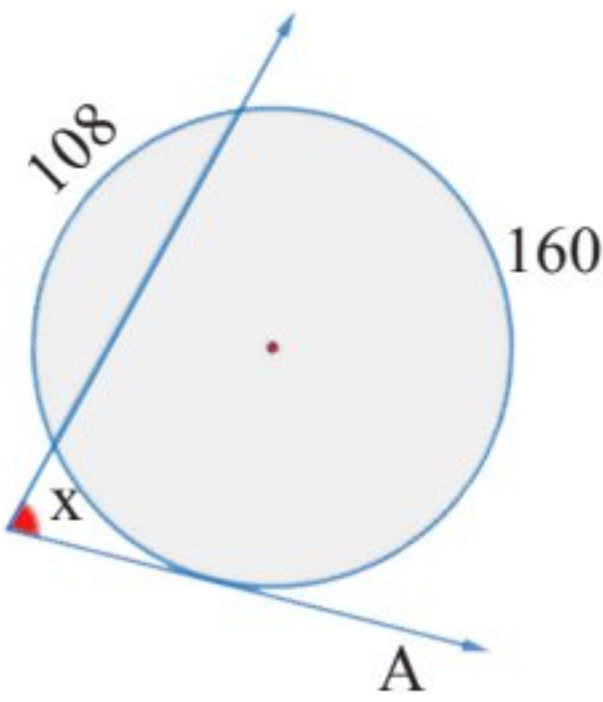
ii)



الحل:

$$x = \frac{1}{2}(152^\circ - 73^\circ) = \frac{1}{2} \times 79^\circ = 39.5^\circ$$

iii)

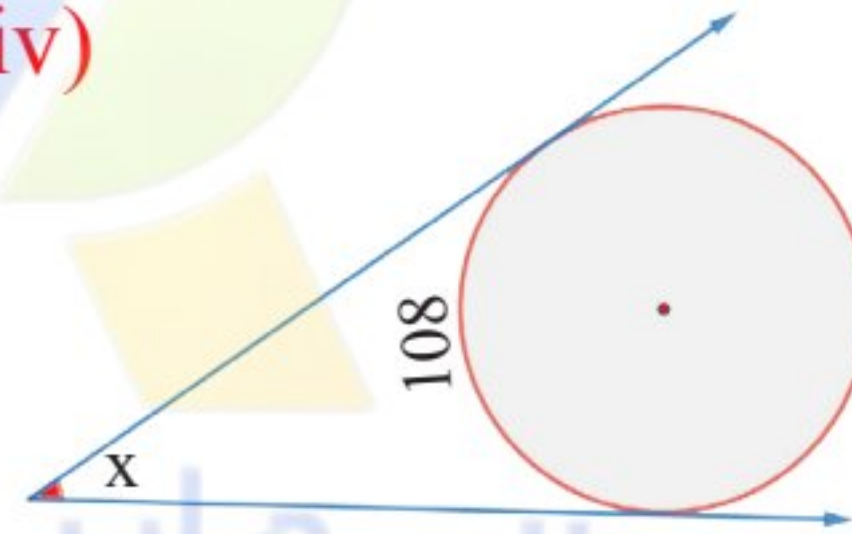


الحل:

$$y = 360^\circ - (160^\circ + 108^\circ) = 360^\circ - 268^\circ = 92^\circ$$

$$x = \frac{1}{2}(160^\circ - 92^\circ) = \frac{1}{2} \times 68^\circ = 34^\circ$$

iv)



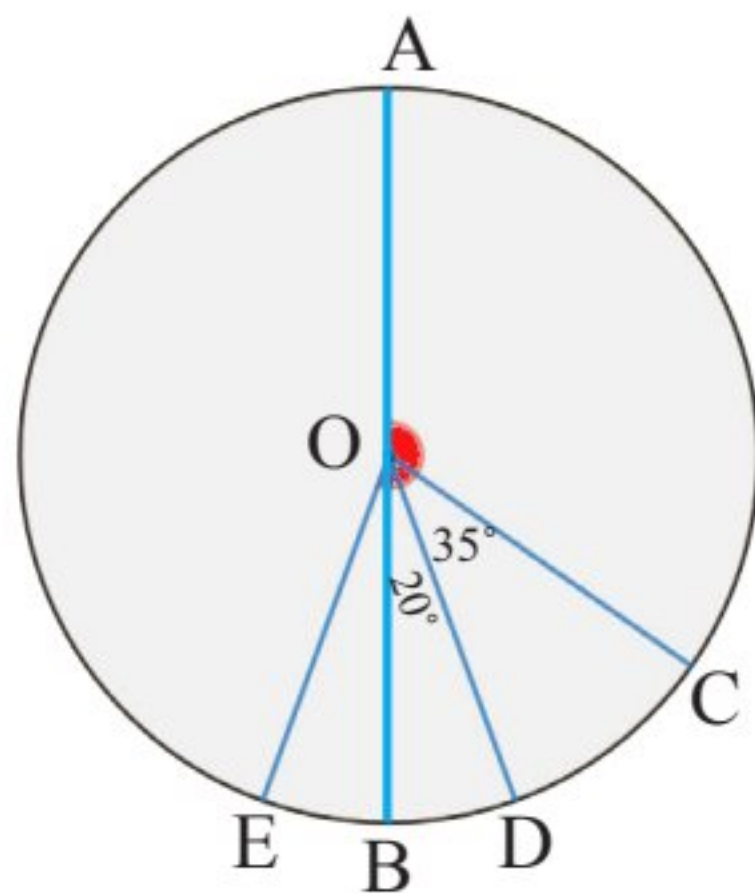
الحل:

$$y = 360^\circ - 108^\circ = 252^\circ$$

$$x = \frac{1}{2}(252^\circ - 108^\circ) = \frac{1}{2} \times 144^\circ = 72^\circ$$

7

جد قياس الزوايا والاقواس المجهولة في الشكل المجاور.



$$\text{i } m\angle AOC = 360^\circ - (m\angle AOB + m\angle BAD + m\angle DOC)$$

$$m\angle AOC = 360^\circ - (180^\circ + 20^\circ + 35^\circ) \\ = 360^\circ - 235^\circ = 125^\circ$$

$$\text{ii } m\widehat{DC} = m\angle DOC = \frac{1}{2} m\widehat{DC} \Rightarrow 35^\circ = \frac{1}{2} m\widehat{DC}$$

$$\Rightarrow m\widehat{DC} = 70^\circ \text{ الطرفین فی الوسطین}$$

$$\text{iii } m\widehat{DB} = m\angle DOB = \frac{1}{2} m\widehat{DB} \Rightarrow 20^\circ = \frac{1}{2} m\widehat{DB}$$

$$\Rightarrow m\widehat{DB} = 40^\circ \text{ الطرفین فی الوسطین}$$

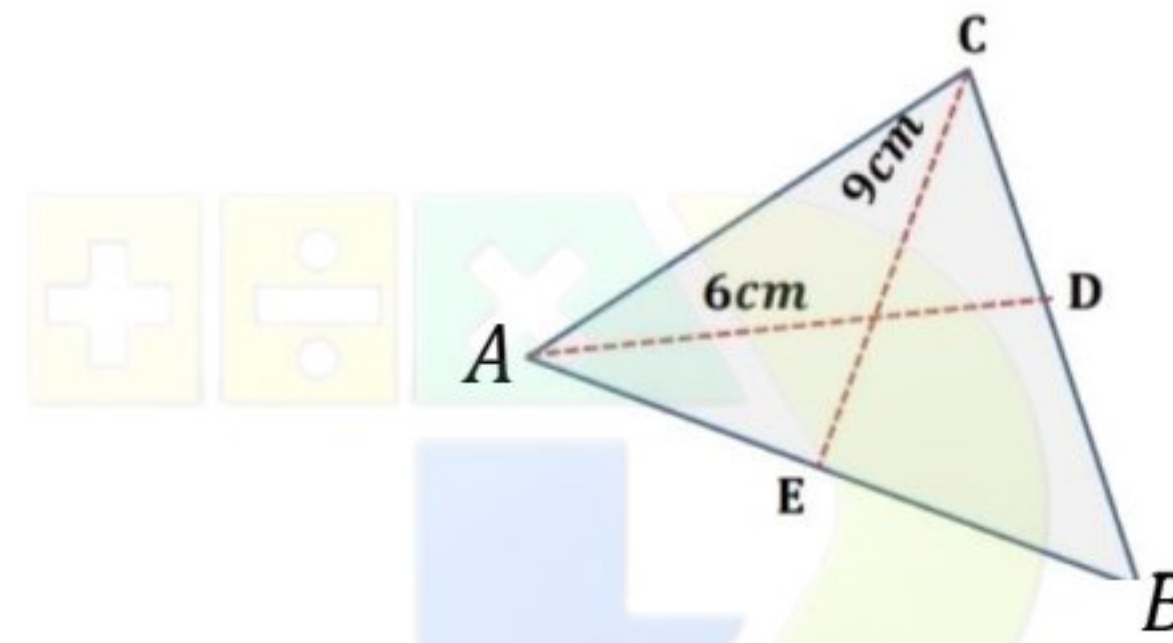
$$\text{iv } m\angle DOA = m\angle DOC + m\angle AOC \\ = 35^\circ + 125^\circ = 160^\circ$$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

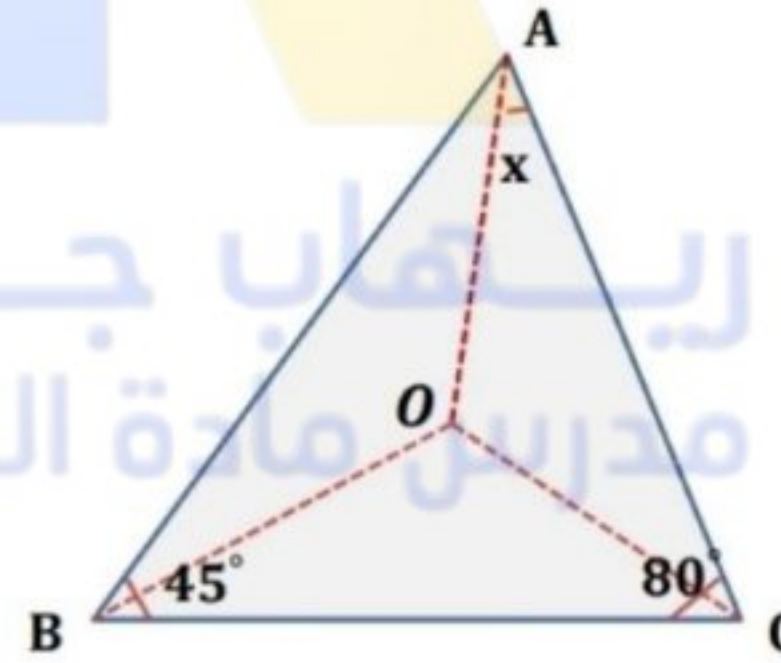
إختبروا مستواكم في وزاريات الفصل الخامس

السؤال رقم 1 هرم قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها (12cm) وارتفاعه (8cm) وارتفاعه الجانبي (10cm)
جد حجمه ومساحته الجانبية

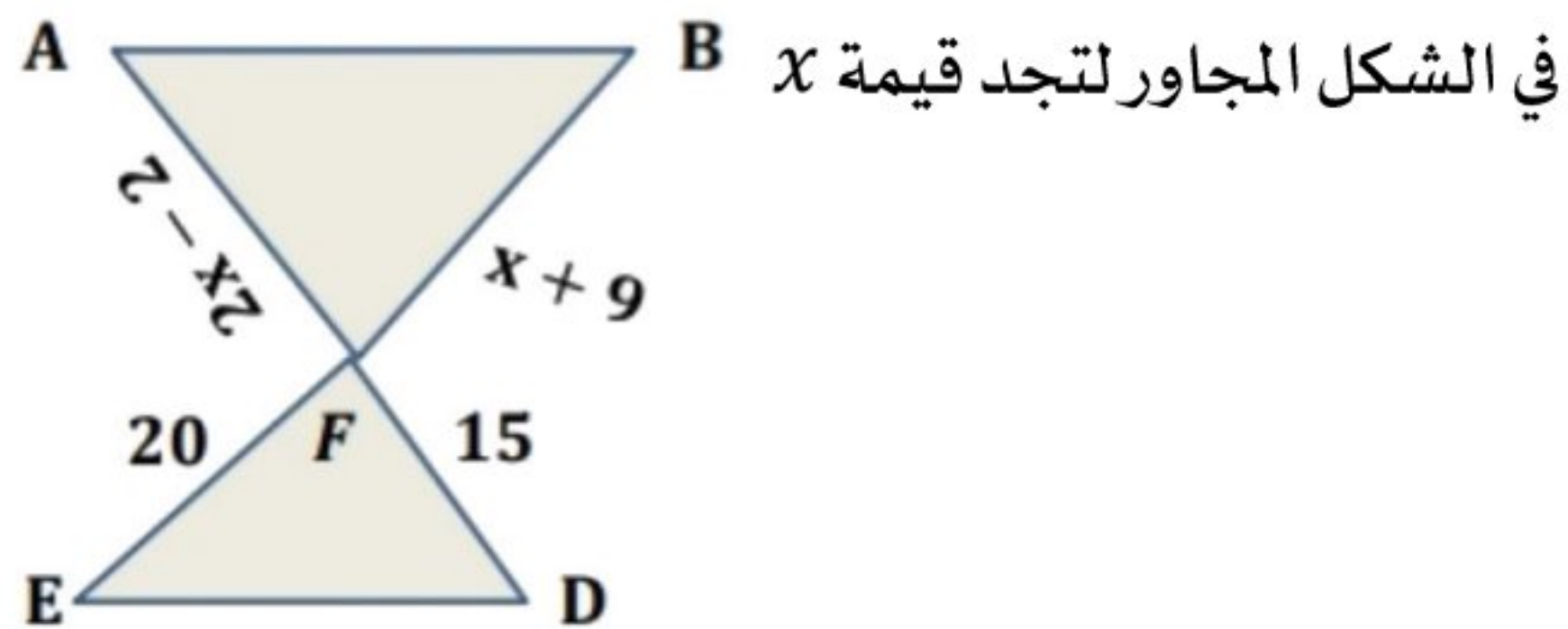
السؤال رقم 2 المثلث ABC فيه $\overline{AD}$, $\overline{CE}$ قطعتان متوسطتان تلتقيان في نقطة O $CE = 9cm$, $AD = 6cm$,
جد طول $\overline{AO}$, $\overline{OE}$



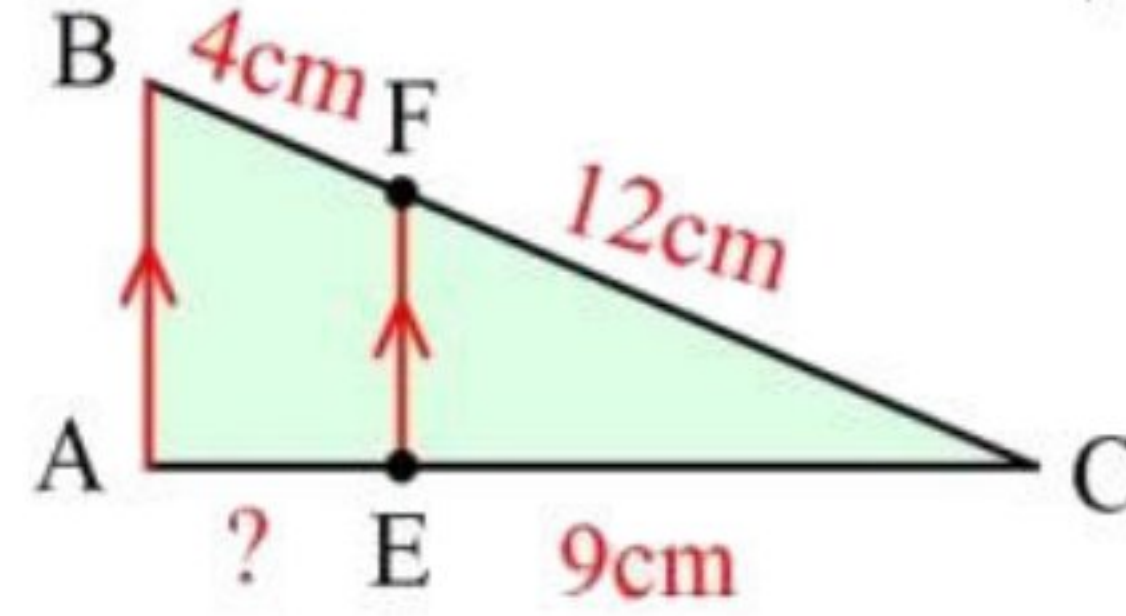
السؤال رقم 3 في المثلث المجاور إذا كان $\overline{AO}$, $\overline{BO}$, $\overline{CO}$ منصفات الزوايا A, B, C
جد قيمة $x < m$



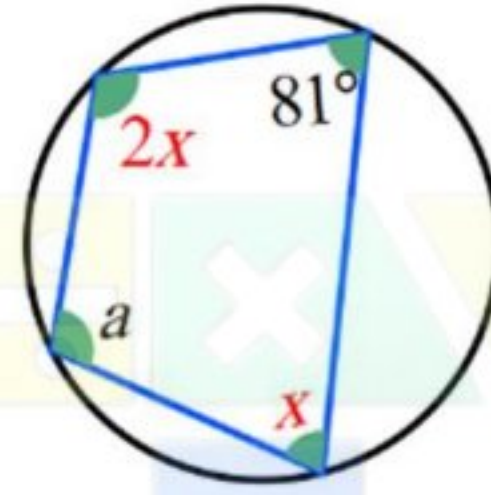
السؤال رقم 4 هندسة إذا علمت أن $\triangle ABF \sim \triangle DEF$ وأن $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$ استعمل المعلومات



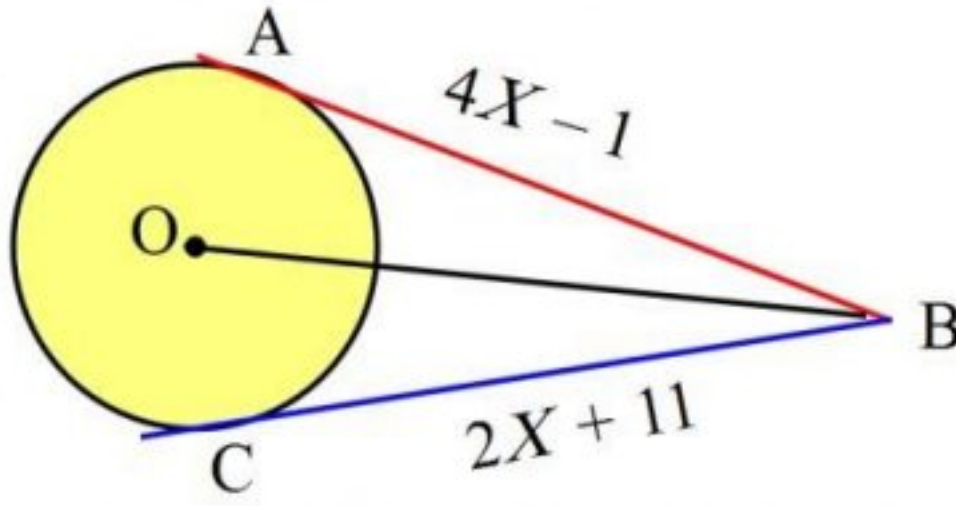
السؤال رقم 4
جد طول قطعة المستقيم AE علماً أن $AB \parallel EF$ في الشكل المجاور



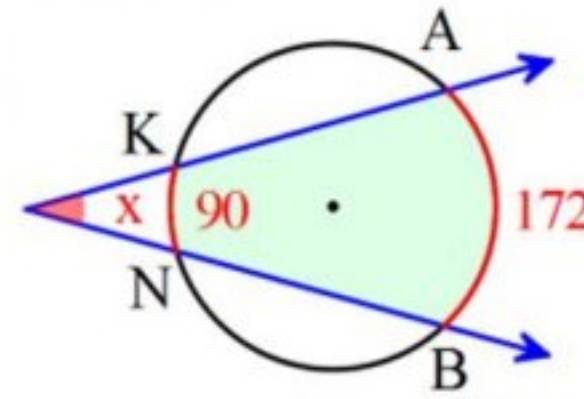
السؤال رقم 5
جد قيمة x , a في الشكل المجاور؟



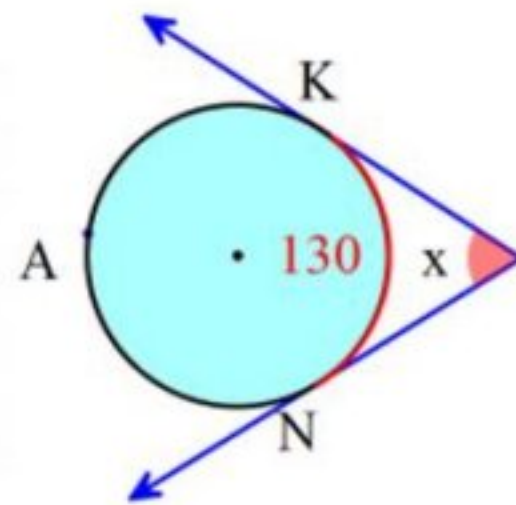
السؤال رقم 6
استعمل مبرهنه المماسين وجد طول AB في الدائرتين المجاورتين حسب مبرهنه المماسين القطعتان المماسين المرسومتان الدائرة من نقطه خارجيه عنها متطابقتان ؟



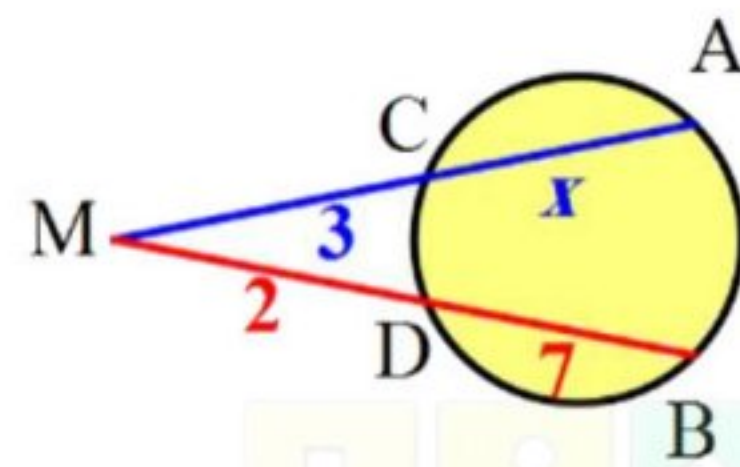
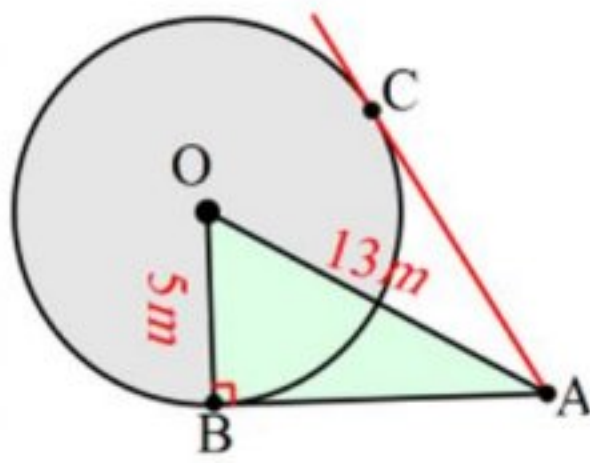
السؤال رقم 7
جد قيمة x في الشكل التالي



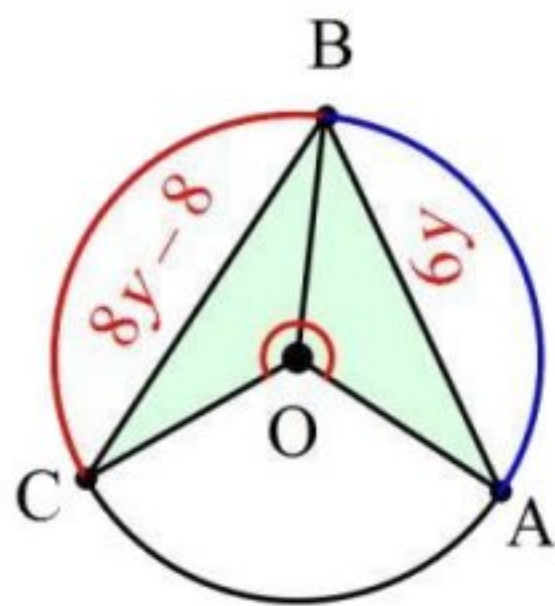
السؤال رقم 8
جد قياس الزاوية الخارجيه x في الشكل التالي



السؤال رقم 9 استعمال مبرهنة المماسين لتجد طول القطع المستقيمة $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ في الشكل المجاور



السؤال رقم 10 جد قيمه x وطول كل من $\overline{AM} \cdot \overline{BM}$



السؤال رقم 11 اذا كانت الزاويتان $\angle COB$, $\angle AOB$ متطابقتان جد طول $\overline{CB}$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

الفصل السادس : الإحصاء و الاحتمالات

الدرس (1-6) تصميم دراسة مسحية وتحليل نتائجها

[6-1-1] تصميم دراسة مسحية

العينة: هي مجموعة جزئية من المجتمع . ومن خلال تحليل نتائج العينة يمكن التوصل الى استنتاجات حول المجتمع كاملاً . تكون الاستنتاجات اكثر تمثيلاً للمجتمع في اي من الحالتين:

- حجم العينة اكبر.
 - استعمال عينات اكثر.
- ولنوع العينة تاثير في الاستنتاجات التي يتوصل اليها وهي على نوعين:
- العينة المتحيزة: اذا كان لكل فرد منها الاحتمال نفسه في الاختيار.
- العينة غير المتحيزة: اذا كان لافرادها احتمالات مختلفة في الاختيار.

مثال (1) وزع مدير مدرسة 100 ورقة استبانة على طلاب مدرسته للتعرف الى جودة المواد الغذائية في حانوت المدرسة.

(i) حدّد العينة والمجتمع الذي اختير منه.

(ii) صف اسلوب جمع البيانات الذي استعمله المدير.

(iii) حدّد ما اذا كانت العينة متحيزة ام غير متحيزة.

(i) العينة: الطلاب الذين تسلموا الاستبيانات وعددهم 100 طالب

المجتمع : جميع طلاب المدرسة

(ii) اسلوب جمع البيانات هو دراسة مسحية، اذ تؤخذ البيانات من اجابات افراد العينة نحو الاستبانة

(iii) العينة غير متحيزة: لان هذه العينة تتكون من طلاب اختيروا عشوائياً

مثال (2) يريد صاحب متجر ان يقدم هدية لكل زبون يتسوق من متجره. فوقف عند باب المتجر وسأل 20 متسوقاً عن نوع الهدية التي يود ان تُقدم له.

- (i) حدّد العينة و المجتمع الذي اختاره صاحب المتجر .
- (ii) صف اسلوب جمع البيانات الذي استعمله صاحب المتجر.
- (iii) حدّد ما اذا كانت العينة متحيزة ام غير متحيزة.
- (i) العينة: المتسوقون الذين سألوا وعددهم 20 متسوقاً.
- المجتمع: المتسوقون الذين دخلوا المتجر.
- (ii) اسلوب جمع البيانات هو دراسة مسحية، اذ تؤخذ الاجابات من افراد العينة المختارة .
- (iii) العينة غير متحيزة، لان الاشخاص الذين دخلوا المتجر اختيروا عشوائياً.

مثال (3) سُئل 10 اشخاص دخلوا مطعم كباب عن الاكلات التي يفضلونها.

- (i) حدّد العينة والمجتمع الذي اختاره صاحب المطعم.
- (ii) صف اسلوب جمع البيانات الذي استعمله صاحب المطعم.
- (iii) حدّد اذا كانت العينة متحيزة ام غير متحيزة.
- (i) العينة : الاشخاص العشرة الذين دخلوا المطعم.
- المجتمع: جميع الاشخاص الذين دخلوا المطعم.
- (ii) اسلوب جمع البيانات هو دراسة مسحية اذ تؤخذ الاجابات من افراد العينة المختارة.
- (iii) العينة متحيزة، لان الاكلة المفضلة للاشخاص الموجودين في مطعم الكباب هي الكباب.



شاهد هذا الدرس
على يوتيوب

[2-1-6] تحليل النتائج

بعد جمع البيانات من خلال الدراسة المسحية تلخص البيانات كي تكون ذات معنى وذلك عن طريق استعمال مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابي، الوسيط، المنوال) والتي درست سابقاً ، بطرائق مختلفة واختيار المقياس الأنسب لتمثيل البيانات.

النوع	متى يفضل استعماله
الوسط الحسابي	عندما لا توجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات.
الوسيط	عندما توجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات، ولكن لا توجد فجوات كبيرة في وسط البيانات.
المنوال	عندما يوجد اعداد متكررة في مجموعة البيانات.

مثال (4) اي مقاييس النزعة المركزية (ان وجدت) هو الأنسب لوصف البيانات في كل مما يأتي:

- (i) البيانات المجاورة تبين اوزان 10 صناديق بالكيلو غرام : 3, 2,3,6,5,5,21,4,3,5
الوسط الحسابي: غير مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة كبيرة متطرفة هي: 21 تؤثر في قيمة الوسط الحسابي.
المنوال: غير مناسب لتمثيل البيانات لوجود اكثر من منوال هما : 3,5
الوسيط: هو المقياس الأنسب لتمثيل هذه البيانات لعدم وجود فجوة كبيرة في وسط البيانات 2,3,3,3,4,5,5,5,6,21
- (ii) حصل محمد على الدرجات التالية في خمسة اختيارات في مادة الرياضيات : 90,93,85,86,91

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{90+93+85+86+91}{5} = \frac{445}{5} = 89$$

الوسط الحسابي: 89 هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لعدم وجود قيمة متطرفة.
الوسيط: 90 هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لانه يتوسط البيانات ولا يوجد فجوة كبيرة في وسط البيانات
لذا كلاهما مقياس مناسب لتمثيل البيانات. المنوال: لا يوجد لعدم تكرار في البيانات.

تأكد من فهمك

حدد العينة و المجتمع ثم صف اسلوب جمع البيانات وميز العينة المتحيزة عن العينة غير متحيزة في كل مما يلي، فسر اجابتك:

1

دخل 30 شخص مكتبة عامة وسئل كل سادس شخص يدخل المكتبة عن هوايته المفضلة.

الحل

- (i) العينة : الاشخاص الذين سألوا وعددهم 5 اشخاص .
- المجتمع : شخص واحد من كل ستة اشخاص دخلوا المكتبة .
- (ii) اسلوب جمع البيانات هي دراسة مسحية اذ تؤخذ الاجابات من افراد العينة المختارة .
- (iii) العينة متحيزة : لأن الهواية المفضلة للأشخاص الذين يدخلون المكتبة هي القراءة .

2

وزعت 100 استبانة على مجموعة من عمال احد المصانع تتضمن سؤالاً حول ظروف العمل في المعمل.

الحل

- (i) العينة : الاشخاص الذي تسلموا الاستبيانات وعددهم 100 عامل .
- المجتمع : جميع عمال المصنع .
- (ii) اسلوب جمع البيانات هي دراسة مسحية اذ تؤخذ الاجابات من افراد العينة نحو الاستبانة .
- (iii) العينة غير متحيزة : لأن هذه العينة تتكون من عمال اختيروا عشوائيا .

3

وزعت الحيوانات في احدى حدائق الحيوانات، ثم اختير حيوان من كل مجموعة بصورة عشوائية لاجراء فحوصات عليّة.

الحل

- (i) العينة : حيوان واحد من كل مجموعة من الحيوانات عشوائيا .
- المجتمع : مجموعة من الحيوانات .
- (ii) اسلوب جمع البيانات هي دراسة مسحية اذ تؤخذ الفحوصات من افراد العينة المختارة .
- (iii) العينة غير متحيزة : لأن نتائج الفحوصات مختلفة من حيوان لآخر .

اي مقياس النزعة المركزية (ان وجدت) هو الأنسب لوصف البيانات التالية ؟ فسّر اجابتك .

4 8 , 10 , 14 , 8 , 13 , 6

الحل
الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$

$$\bar{x} = \frac{8 + 10 + 14 + 8 + 13 + 6}{6} = \frac{59}{6} = 9.83 \quad \text{الوسط الحسابي}$$

الوسط الحسابي : 9.83 هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لعدم وجود قيمة متطرفة .

المنوال : هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة واحدة متكررة مرتين هي : 8

الوسيط : نرتب القيم تصاعديا : 6 , 8 , 8 , 10 , 13 , 14

$$ME = \frac{8 + 10}{2} = \frac{18}{2} = 9 \quad \text{الوسيط}$$

الوسيط : 9 هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لأنه يتوسط البيانات ولا توجد فجوة كبيرة في وسط البيانات .

5 8 , 10 , 8 , 9 , 11 , 4 , 6 , 54

الحل

الوسط الحسابي : غير مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة كبيرة متطرفة هي : 54 تؤثر في قيمة الوسط الحسابي .

المنوال : هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة واحدة متكررة مرتين هي : 8

الوسيط : نرتب القيم تصاعديا : 4 , 6 , 8 , 8 , 9 , 10 , 11 , 54

$$ME = \frac{8 + 9}{2} = \frac{17}{2} = 8.5 \quad \text{الوسيط}$$

الوسيط : 8.5 هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لأنه يتوسط البيانات ولا توجد فجوة كبيرة في وسط البيانات .

6 8 , 9 , 8 , 6 , 10 , 9 , 11 , 13 , 14 , 8 , 6 , 7 , 19

الحل
الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$

$$\bar{x} = \frac{8 + 9 + 8 + 6 + 10 + 9 + 11 + 13 + 14 + 8 + 6 + 7 + 19}{13} = \frac{128}{13} = 9.84$$

الوسط الحسابي : 9.84 هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لعدم وجود قيمة متطرفة .

المنوال : هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة واحدة متكررة ثلاث مرات هي : 8

الوسيط : نرتب القيم تصاعديا : 6 , 6 , 7 , 8 , 8 , 8 , 9 , 9 , 10 , 11 , 13 , 14 , 19

الوسيط : 9 هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لأنه يتوسط البيانات ولا توجد فجوة كبيرة في وسط البيانات .

تدرب وحل التمرينات

حدّد العينة والمجتمع ثم صف أسلوب جمع البيانات وميّز العينة المتحيزة من العينة غير متحيزة في كل مما يلي، فسّر اجابتك.

7 يريد صاحب معمل التحقق من ان العمال يعملون بشكل جيد، فراقب احد العمال مدة ساعتين.

الحل

(i) العينة :احد عمال المعمل

المجتمع : جميع العمال داخل المعمل .

(ii) أسلوب جمع البيانات هي دراسة مسحية لمراقبة اداء احد العمال .

(iii) العينة غير متحيزة : لأن هذه العينة تتكون من احد العمال اختيروا عشوائيا

.....

8 يقف عدد من الطالبات عند مدخل المدرسة ويسألن كل عاشر طالبة تدخل المدرسة عن هوايتها المفضلة.

الحل

(i) العينة :طالبة واحدة من كل عشرة طالبات

المجتمع : الطالبات المدرسة .

(ii) أسلوب جمع البيانات هي دراسة مسحية اذ تؤخذ الاجابات من افراد العينة المختارة .

(iii) العينة غير متحيزة : لأن هذه العينة تتكون من طالبات اختيروا عشوائيا .

.....

اي مقياس النزعة المركزية (ان وجدت) هو الأنسب لتمثيل البيانات التالية ؟ فسّر اجابتك.

9 34,47,41,49,39,26,40

الحل

الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$

$$\bar{x} = \frac{34 + 47 + 41 + 49 + 39 + 26 + 40}{7} = \frac{276}{7} = 39.4 \quad \text{الوسط الحسابي}$$

الوسط الحسابي : 39.4 هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لعدم وجود قيمة متطرفة

المنوال :لا يوجد لعدم وجود تكرار في البيانات .

الوسيط : نرتب القيم تصاعديا : 26 , 34 , 39 , 40 , 41 , 47 , 49

الوسيط : 40 هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لأنه يتوسط البيانات ولا توجد فجوة كبيرة في وسط البيانات .

10 6,2,4,4,3,2,6,2,4,4,20

الحل

الوسط الحسابي : غير مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة كبيرة متطرفة هي : 20 تؤثر في قيمة الوسط الحسابي .
المنوال : هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة واحدة متكررة اربع مرات هي : 4
الوسيط : نرتب القيم تصاعديا : 2 , 2 , 2 , 3 , 4 , 4 , 4 , 4 , 6 , 6 , 20
الوسيط : 4 هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لأنه يتوسط البيانات ولا توجد فجوة كبيرة في وسط البيانات .

11 5,3,5,8,5,3,6,7,4,5

الحل

الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$

$$\bar{x} = \frac{5 + 3 + 5 + 8 + 5 + 3 + 6 + 7 + 4 + 5}{10} = \frac{51}{10} = 5.1 \quad \text{الوسط الحسابي}$$

الوسط الحسابي : 5.1 هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لعدم وجود قيمة متطرفة .
المنوال : هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة واحدة متكررة اربع مرات هي : 5
الوسيط : نرتب القيم تصاعديا : 3 , 3 , 4 , 5 , 5 , 5 , 5 , 6 , 7 , 8

$$ME = \frac{5 + 5}{2} = \frac{10}{2} = 5 \quad \text{الوسيط}$$

الوسيط : 5 هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لأنه يتوسط البيانات ولا توجد فجوة كبيرة في وسط البيانات .

تدرب وحل مسائل حياتية



مستشفى: يعد مستشفى مدينة الطب مجمعاً طبياً متكاملاً، يقدم خدمات للمواطنين في بغداد و المحافظات، في ندوة تعريفية يتم اختيار طبيب من كل قسم عشوائياً ليقدم نبذة عن خدمات قسمه في المستشفى.

12 صف العينة و المجتمع.

العينة: طبيب من كل قسم
المجتمع: أقسام مجمع مستشفى مدينة الطب .

الحل

13 هل العينة متحيزة ام لا ؟ فسّر ذلك.

العينة غير متحيزة : لأن الأطباء الذين اختيروا من كل قسم عشوائياً .

الحل

14 **تسوق:** يبيّن الجدول ادناه عدد الزبائن الذين يرتادون محل لبيع الاجهزة الكهربائية في كل ساعة في احد الايام .
أي مقاييس النزعة المركزية هو الأنسب لوصف البيانات.



عدد الزبائن			
79	71	86	86
88	32	79	86
71	69	82	70
85	81	86	86

الحل

الوسط الحسابي : غير مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة كبيرة متطرفة هي : 32 تؤثر في قيمة الوسط الحسابي .

المنوال : هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة واحدة متكررة خمس مرات : 86

الوسيط : نرتب القيم تصاعدياً : 32,69,70,71,71,79,79,81,82,85,88,86,86,86,86,86

$$\text{الوسيط} \quad ME = \frac{81 + 82}{2} = \frac{83}{2} = 81.5$$

الوسيط : 81.5 هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لأنه يتوسط البيانات ولا توجد فجوة كبيرة في وسط البيانات .

15 **تغذية:** يبين الجدول ادناه السعرات الحرارية لبعض الخضروات في طبق لكل نوع، اي مقاييس النزعة المركزية هو الأنسب لوصف البيانات.



السعرات	الخضروات	السعرات	الخضروات
13	خيار	16	بصل
66	ذره	20	فلفل
9	سبانخ	17	ملفوف
17	كوسا	28	جزر

الحل

الوسط الحسابي : غير مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة كبيرة متطرفة هي : 66 تؤثر في قيمة الوسط الحسابي .
المنوال : هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة واحدة متكررة مرتين: 17
الوسيط : نرتب القيم تصاعديا : 9,13,16,17,17,20,28,66

$$ME = \frac{17 + 17}{2} = \frac{34}{2} = 17 \quad \text{الوسيط}$$

الوسيط : 17 هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لأنه يتوسط البيانات ولا توجد فجوة كبيرة في وسط البيانات .

فكر

16 **تحذّر:** اوجد مجموعة من الاعداد يكون وسيطها اصغر من وسطها الحسابي.

الاعداد هي : 6 , 10 , 14 , 3 , 7

الحل

الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$

$$\bar{x} = \frac{6 + 10 + 14 + 3 + 7}{5} = \frac{40}{5} = 8 \quad \text{الوسط الحسابي}$$

الوسيط : نرتب القيم تصاعديا : 3,6,7,10,14

الوسيط = 7

17 **أصحّ الخطأ:** تقول سناريا ان الوسط الحسابي هو انسب مقاييس النزعة المركزية لتمثيل البيانات 20,8,4,5,3 حدد خطأ سناريا وصححه .

الحل

الوسط الحسابي : غير مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة كبيرة متطرفة هي : 20 تؤثر في قيمة الوسط الحسابي .
المنوال : لا يوجد لعدم وجود تكرار .
الوسيط : نرتب القيم تصاعديا : 3,4,5,8,20

الوسيط : 5 هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لأنه يتوسط البيانات ولا توجد فجوة كبيرة في وسط البيانات

.....

18 **حس عددي:** في دراسة مسحية حول الدوام في مدرسة ثانوية، وزعت استبانة على 50 طالباً، فكانت نسبة 74% من الطلاب يفضلون الدوام الصباحي. هل هذه الدراسة موثوق بها؟ بيّن ذلك.

الحل

كلا ليس موثوق بها لأن الدوام يخص جميع الطلبة والأنسب تكون الاستبانة لجميع طلبة المدرسة .

.....

سؤالاً عن معنى تريد اجابته من خلال دراسة مسحية.

أكتب

في الدراسة المسحية : يتبين كون العينة التي تؤخذ معقولة أم لا .

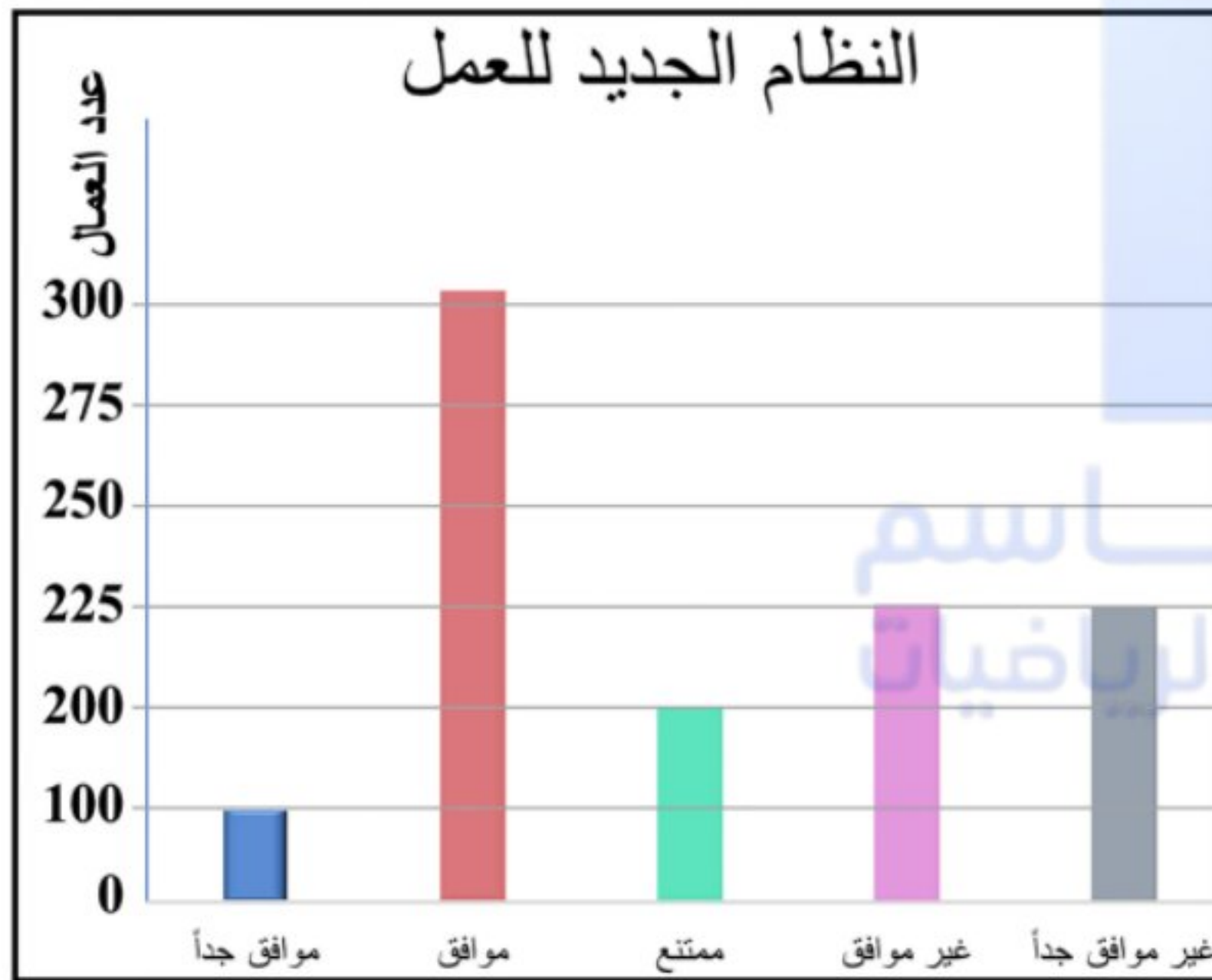
الحل

الدرس (2-6) البيانات والاحصاءات المضللة

[6-2-1] تمييز البيانات المضللة

البيانات المضللة: هي البيانات التي تبرز صفة معينة لسلعة على نحو مبالغ فيه وعرض الحقائق بشكل يولد لدى الناظر انطباعاً يروق لصاحب الاعلان وتضلل المستهلك.

مثال (1)



يفكر صاحب مصنع تطبيق نظام جديد

في العمل، فوزع استبانة على العمال يسألهم عن رأيهم في النظام الجديد.

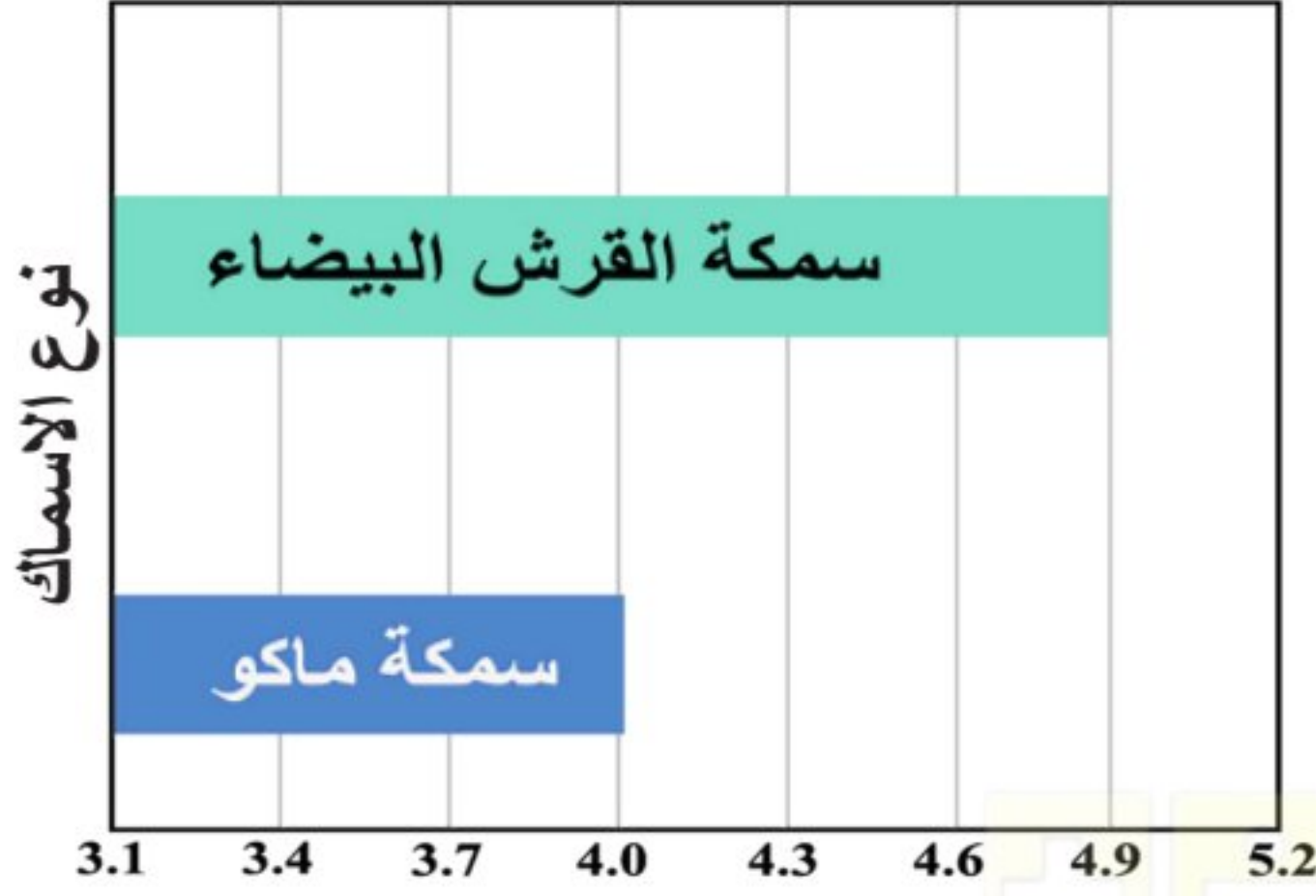
هل التمثيل بالاعمدة المجاور يعطي الصورة الصحيحة حول نتائج الاستبانة؟

يبدو للوهلة الاولى ان معظم العمال موافقون على تطبيق النظام الجديد، مع العلم ان اطوال المدة الزمنية للتدريج غير ثابتة.

لاحظ ان: 450 عامل غير موافقين او غير موافقين جداً على هذا النظام الجديد، في حين ان عدد الموافقين يزيد قليلاً على 300 عامل فقط، وعليه فإن التمثيل البياني المعروض مضلل، والاستنتاج غير صادق. ملاحظة: (الرسم البياني قد يكون مضللاً، بإطالة او تقصير الفترات بين قيم البيانات، وذلك لاعطاء انطباع معين).

مثال (2)

الرسم البياني المجاور يوضح العلاقة بين طولي القرش البيضاء الكبيرة وطول سمكة القرش مأكو. بين هل الرسم البياني مضلل؟ وضح ذلك.



من الشكل المجاور، نلاحظ ان طول العمود العلوي ضعف طول العمود السفلي.

ولكن القيمة المناظرة لطول العمود العلوي هي 4.9 والقيمة المناظرة لطول العمود السفلي هي 4 وبالتأكيد قيمة 4.9 ليست ضعف 4، وعليه الرسم البياني المجاور مضلل.

ملاحظة: (عندما يبدأ الرسم البياني من الصفر، يصبح الرسم غير مضلل).

[6-2-2] تمييز الإحصاءات المضلّة

الإحصاءات المضلّة: بالإضافة الى الرسوم المضلّة تستعمل الإحصاءات المضلّة بهدف الترويج لشركة او بضاعة معينة، بانعام النظر جيداً في معطيات الاعلان يمكن تمييز الإحصاءات المضلّة.

مثال (3)

وضع صاحب محل للملابس الرجالية الاعلان الآتي:
(بدلات رجالية جديدة متوسط السعر 45 الف دينار)



في المحل 5 نماذج من البدلات اسعارها بالالاف:

54, 50, 20, 48, 53

$$\frac{54 + 50 + 20 + 48 + 53}{5} = 45$$

لاحظ ان متوسط اسعار البدلات الخمس 45 الف دينار، الا ان بدلة واحدة فقط سعرها 20 الف دينار. حيث يقل سعرها عن هذا المتوسط. وهذا يجعل الزبون يدفع اكثر من هذا السعر ثمناً للبدلة.



مثال (4)

في استطلاع على 800 طالب اعدادية، افاد 70 منهم انهم يرغبون دخول كلية الهندسة فيما قال 50 منهم، بانهم يرغبون في دخول كلية الطب، جاء في نتائج الاستطلاع ان الطلاب يفضلون الهندسة على الطب.

ان مجموع الطلاب الذين شملهم الاستطلاع فعلاً هو $120 = (50 + 70)$ طالباً من اصل 800 طالب، اي ان العينة العشوائية كانت صغيرة جداً

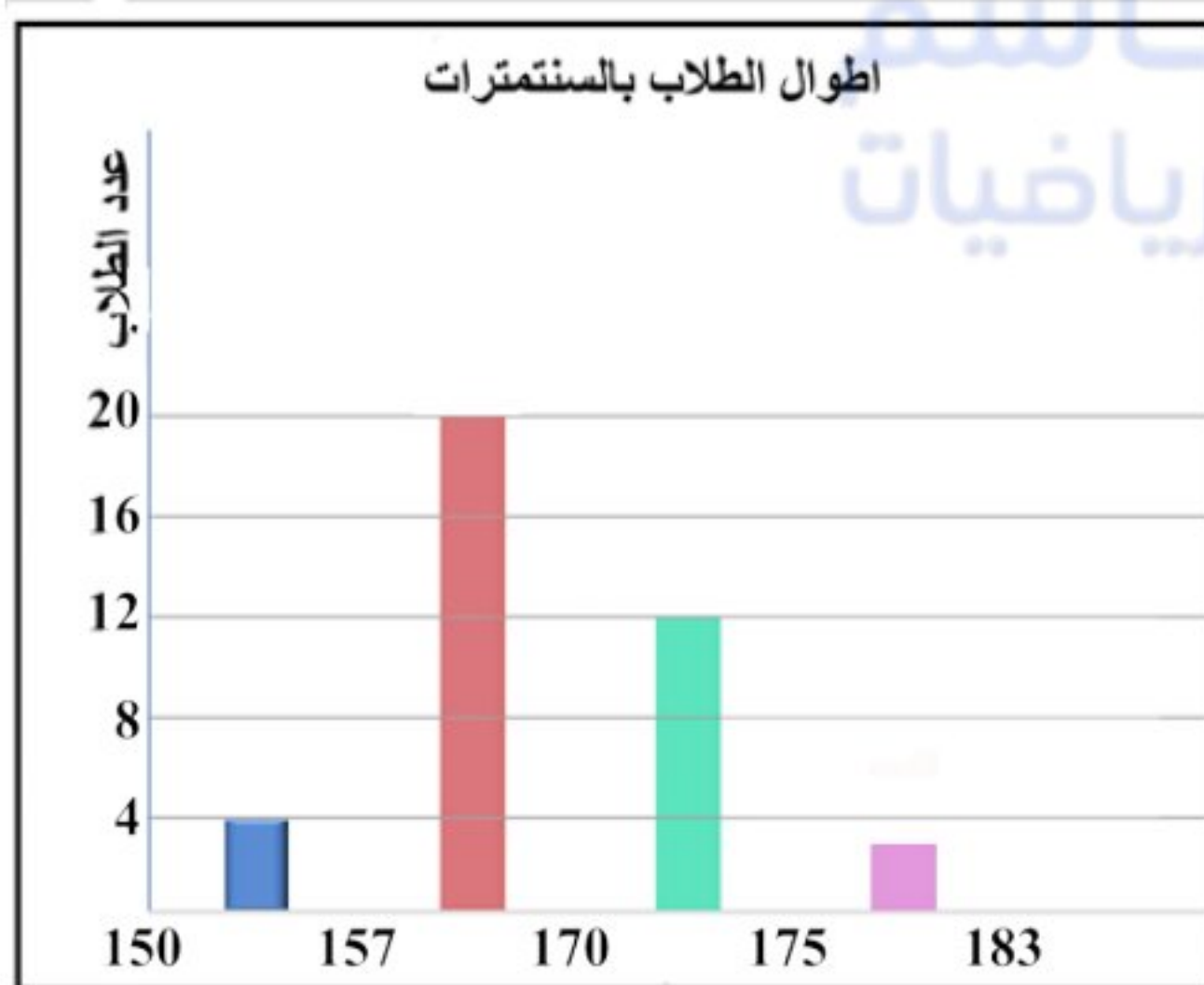
النسبة المئوية للطلاب الذين شملهم الاستطلاع تساوي $100 \times \frac{120}{800}$ وتساوي 15%.

تأكد من فهمك

وضح كيف يمكن ان يُؤد كل من الرسمين البيانيين التاليين انطباعاً مضللاً :

الحل

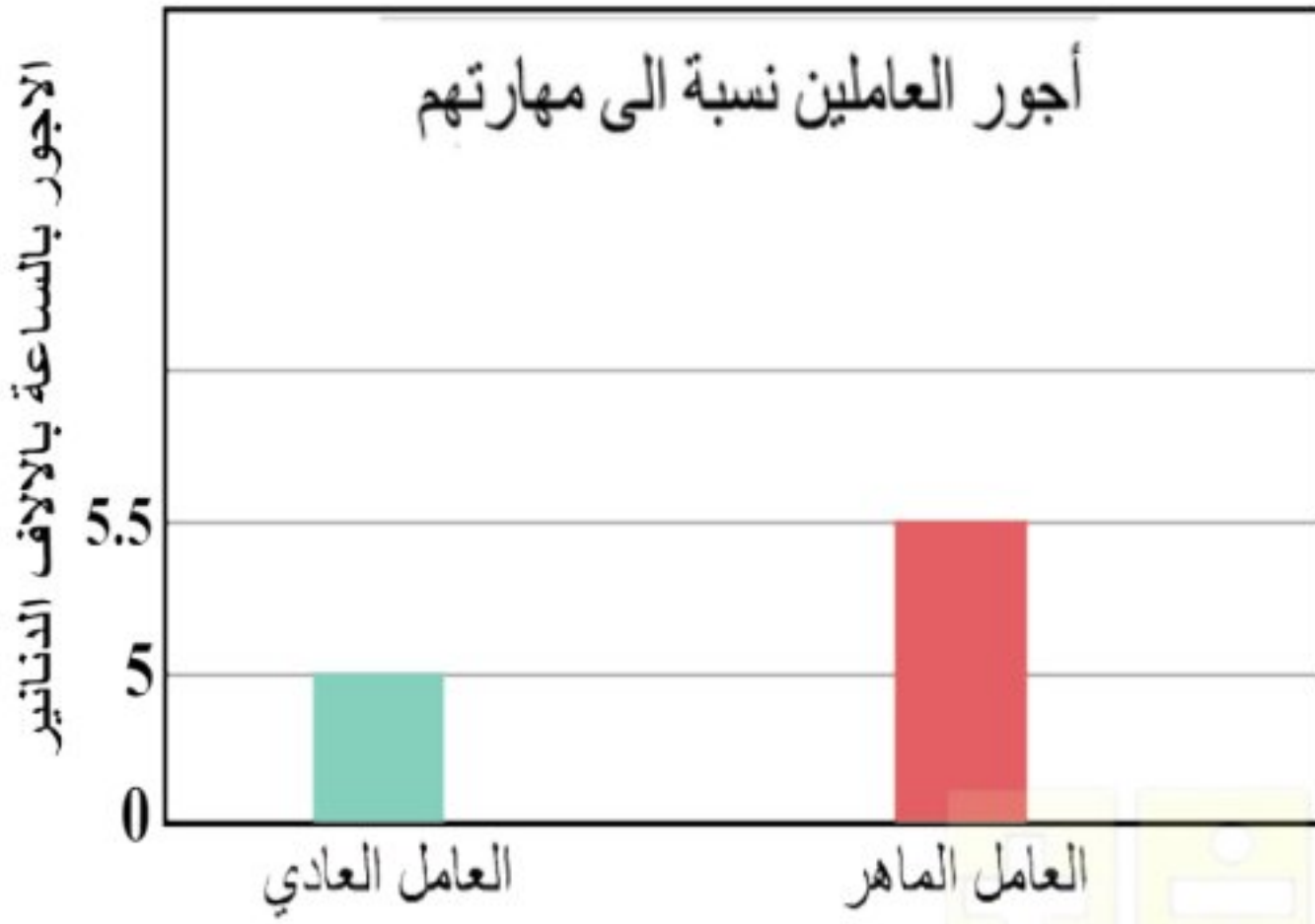
الرسم البياني يعطي انطباعاً مضللاً :



لأن النسب بين الأطوال غير متساوية وذلك لكون ان النسبة الأولى هي : 157 - 150 (بينهما 7cm) والنسبة الثانية : 170 - 157 (بينهما 13cm) كذلك هو الحال في النسبة الثالثة : 175 - 170 (بينهما 5cm) .

2

الحل



من الشكل المجاور نلاحظ ان أجور العامل الماهر ضعف أجور العامل العادي . ولكن أجرة العامل الماهر بالساعة هي 5.5 الف دينار وأجرة العامل العادي بالساعة هي 5 الف دينار . بالتأكيد 5.5 ليست ضعف 5 . عليه الرسم البياني المجاور مضلل .

فسّر لماذا الإحصاءات التالية مضلّة:

3 عرض مقال على 20 شخصاً لتقويمه، أبدى 13 منهم اعجابهم بالمقال، بناءً على ذلك صرح صاحب المقال: بأن المقال صالح للنشر لان نسبة الذين فضلوه كانت 13 الى 7.

الحل

الاحصاء مضللاً لأن :

- 1) يجب أن يكون عرض المقال بشكل عشوائي وليس انتخائي .
- 2) يجب أن يحدد رأي الأشخاص الـ (7) حول المقال .

4 باع مخزن ملابس رياضية لمدة زمنية معينة 320 بدلة رياضية، في حين باع مخزن لبيع الالعاب والملابس الرياضية ولمدة نفسها 90 بدلة رياضية.

الحل

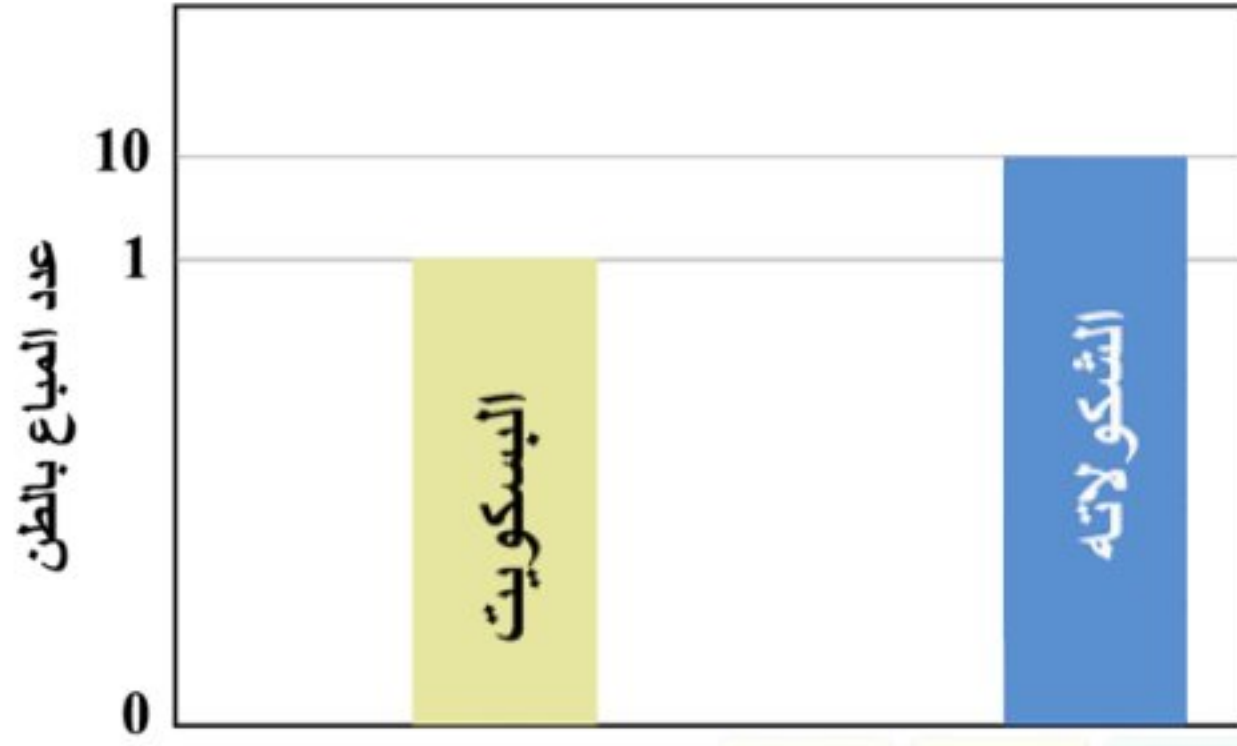
الاحصاء مضللاً لأن : الزمن ليس قياس لبيع البدلات الرياضية وانما :

- 1) يجب أن تكون البضاعة تمثل نفس النوعية ومن نفس المنشأ .
- 2) الأسعار التي تباع بها البضاعة يجب أن تكون متساوية .
- 3) موقع المخزنين يؤثر ونوع الزبائن والقدرة الشرائية
- 4) الفترة الزمنية لفتح المخزن واغلاقه يوميا .
- 5) أسلوب البائع في طرح البضاعة وكيفية تعامله مع الزبائن .

تدرب وحل التمرينات

وضح كيف يمكن ان يولد كل من الرسمين البيانيين التاليين انطباعاً مضللاً.

5



الحل

الرسم يولد انطباعاً مضللاً :

وذلك لأن الأعمدة توضح أن هنالك فرق بين البضاعتين (1 - 2) طن ولكن الواقع في تحديد نسب المبيعات نلاحظ ان الفرق بينهما 9 طن .

6



الحل

هنالك تضليل لأن النسبة بين الرسم والعدد غير متساوية للمواد حيث عدد الكرات المرسومة (4) كرات وعدد الكرات في خانة الأعداد (20) كرة حيث أن النسبة هي : (2 من 10)

بينما في الخانة العليا (الصناديق) هنالك خمس صناديق وفي خانة العدد هناك 50 صندوق أي أن النسبة هي : (1 من 10) .

7 في استطلاع شمل 6 اشخاص حول مطالعة جريدة يومية، افاد 4 منهم انهم يفضلون الجريدة (X) في نهاية

الاستطلاع وردت الجملة الآتية:

يفضل 2 من كل 3 اشخاص مطالعة الجريدة (X) لماذا يُعد هذا الاعلان مضللاً؟

الحل

يعد هذا الإعلان مضللاً لأن الاستطلاع شمل 6 أشخاص فقط فيجب أن يكون الاستطلاع عشوائياً ويشمل أعداد كبيرة من الأشخاص ولكلا الجنسين ولأعمار متفاوتة ولطبقات مثقفة .

8

سئل 100 طالب عن الطريقة التي يفضلونها في القدوم الى المدرسة، فكانت إجابات 60 طالباً منهم على النحو

الآتي: 32 منهم يفضلون القدوم بواسطة سيارة الاجرة و 18 يفضلون المشي و 10 طلاب يفضلون القدوم

بسياراتهم الخاصة. أستنتج ان نصف الطلاب يفضلون سيارة الأجرة. فسّر لماذا الإحصاءات مضلّة؟

الحل

الاحصاءات مضللة لأن الذين يفضلون سيارة الأجرة في القدوم الى المدرسة يمثل تقريبا $\left(\frac{1}{3}\right)$ ثلث إجابات 60 طالبا والاحصاء يجب أن يكون على عدد الطلاب 100 وليس على 60 طالب .

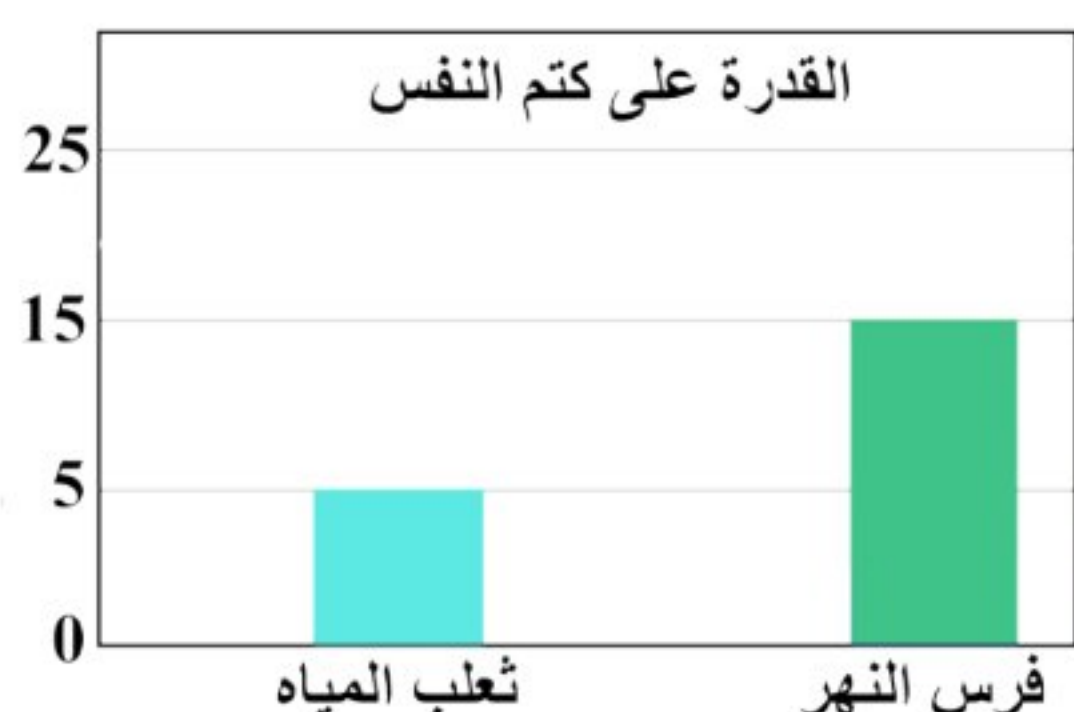
تدرب وحل مسائل حياتية

9

الاحياء : الرسم البياني المجاور يمثل القدرة على كتم النفس لفرس

النهر و ثعلب المياه. لماذا البيانات في الرسم مضلّة؟ وضح ذلك.

الحل



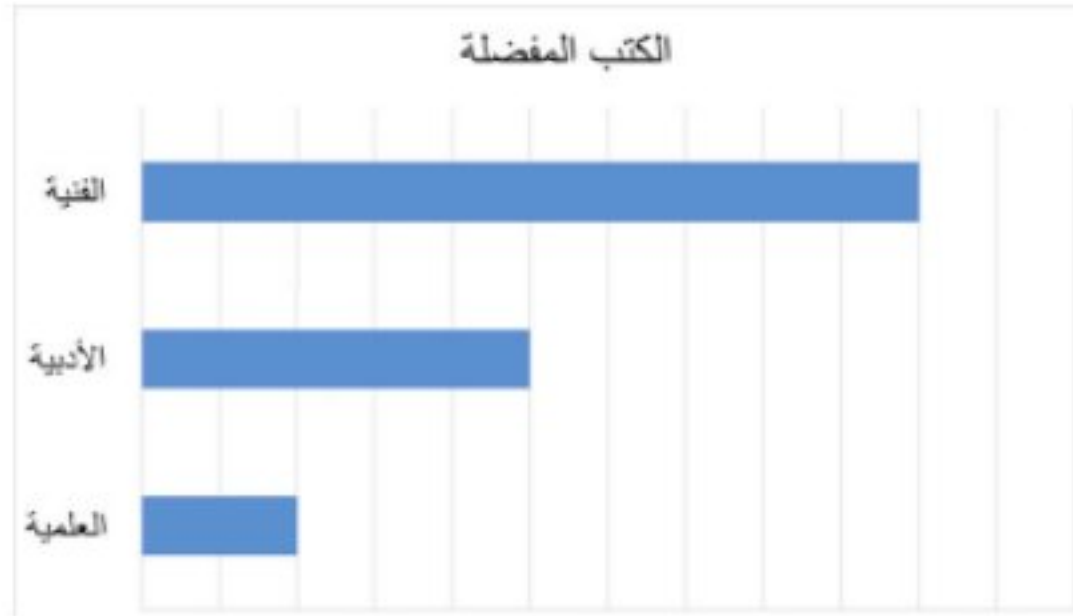
البيانات في الرسم البياني مضللة :

(1) لأن القدرة على كتم النفس في الأعمدة البيانية تبين بأن فرس النهر له قدرة ضعف قدرة ثعلب المياه ولكن في القيم العمودية للرسم البياني فأن قدرة فرس النهر ثلاث أمثال قدرة ثعلب المياه في كتم النفس .

(2) لم يحدد في البيانات العمودية للرسم البياني التي تمثل الوقت هل هو دقائق أم ساعات أم أيام وهذا يعتبر مضللا ايضا .

10 مطالعة : الرسم المجاور يمثل اشخاص يفضلون مطالعة الكتب

10



الادبية، العلمية، الفنية.

فسر لماذا البيانات في الرسم مضللة؟

الحل

في البيانات للأعمدة الأفقية يتبين بأن قراءة الكتب الفنية اكبر من مجموع الذين يفضلون قراءة الكتب الأدبية والعلمية والواقع ان عدد قراء الذين يفضلون الكتب العلمية بالاضافة الى عدد قراء الكتب الأدبية اكبر من عدد الذين يفضلون الكتب الفنية لذلك فإن البيانات في الرسم مضللة

11 مواصلات : بلغت ارباح شركة الطيران A في شهري تموز وآب

11



5500 مليون دينار، في حين كانت ارباح شركة الطيران B في شهري نيسان ومايس 7500 مليون دينار.

فسر لماذا الإحصاءات مضللة؟

الحل

الاحصاءات مضللة لأن مقارنة الأرباح غير متطابقة فالشركة A أرباحها لشهري تموز وآب 5500 مليون دينار وأما الشركة B فإن ارباحها لشهري نيسان ومايس 7500 مليون دينار.

12 تغذية : تحتوي قسبة البروكلي على 477mg من البوتاسيوم والجزرة

12



الكبيرة 230mg من البوتاسيوم في حين يحتوي رأس القرنبيط على

803mg من البوتاسيوم. فسر لماذا الإحصاءات هذه مضللة؟

الحل

الاحصاءات مضللة لأن المقارنة بين المواد الغذائية مختلفة .

فكر

13 اكتشف الخطأ: يقول محمد ان الرسم يكون غير مضلل اذا بدأ رسم الاعمدة من الصفر بصرف النظر عن ثبوت طول الفترات. اكتشف خطأ محمد.

الحل

يكون الرسم البياني مضللاً اذا كان رسم الأعمدة لا يبدأ من الصفر وعدم ثبوت طول الفترة .

14 حس عددي: حصل احد الباعة على العملات التالية بالالاف الدينانير:
شباط 965، اذار 170، نيسان 120، تموز 125، مايس 100.

اخبر اصدقائه ان متوسط عمولته الشهرية 265 الف دينار. فسّر لماذا هذا الاحصاء مضلل؟

الحل

لأن متوسط العمولة الشهرية 265 الف دينار هو ربع عمولة شهر شباط تقريبا وكذلك فإن متوسط العمولة يساوي ضعف العمولة للأشهر نيسان وتموز ومايس تقريبا .

15 ما الذي يجب ان تتأكد منه لتقرر ما اذا كان الرسم البياني مضللاً ام لا؟

الحل

(1) يبدأ الرسم البياني للأعمدة من الصفر .

(2) ثبوت الفترات المحددة في الرسم البياني .

شاهد هذا الدرس
على يوتيوب



5

الدرس (1-6) الاحتمال التجريبي والاحتمال النظري

[1-2-6] الاحتمال التجريبي والاحتمال النظري

سبق ان درست حساب الاحتمال التجريبي والنظري حيث تحديد الاحتمال في الفقرة (تعلم) عن طريق اجراء التجربة والناتج بهذه الطريقة تسمى الاحتمالات التجريبية . اما الاحتمالات المبنية على حقائق وخصائص معروفة فتسمى الاحتمالات النظرية

مثال (1)

فضاء العينة لتجربة رمي قطعتي نقود هي :

$$\Omega = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$$

$$P(H, T) = \frac{\text{عدد ظهور } (H, T)}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}} \Rightarrow \therefore P(H, T) = \frac{3}{4}$$

النسبة في السؤال الاول:

اذن عدد عناصر فضاء العينة يساوي 4

من الجدول عدد مرات ظهور الحدث H, T يساوي 3

الاحتمال النظري

النسبة في السؤال الثاني:

من الجدول عدد مرات ظهور الحدث H, T يساوي 3

عدد مرات التجربة يساوي 13

الاحتمال تجريبي

$$P(H, T) = \frac{\text{عدد ظهور } (H, T)}{\text{عدد مرات التجربة}} \Rightarrow \therefore P(H, T) = \frac{3}{13}$$

الاحتمالات النظرية تزودنا بنتائج التجربة من دون الحاجة الى إجرائها (تعتمد على فضاء العينة للتجربة).

الاحتمالات التجريبية تزودنا بنتائج التجربة بتكرارها عدة مرات (تعتمد على تكرار التجربة).

مثال (2)

وجد باحث في مصنع بطاريات السيارات ان احتمال كون البطارية غير صالحة هو $\frac{3}{20}$ أنظري هذا

الاحتمال ام تجريبي؟ واذا اراد المصنع الحصول على 240 بطارية غير صالحة. فكم بطارية كان على المصنع انتاجه؟

هذا الاحتمال تجريبي، لانه يعتمد على ما حدث فعلاً. استعمل التناسب لحل الجزء الثاني من المثال

$$\frac{3}{20} = \frac{240}{X}$$

$$3X = 4800$$

$$X = \frac{4800}{3}$$

$$X = 1600$$

اكتب التناسب

الضرب التبادلي

اقسم المعادلة على 3

كل 3 بطاريات من اصل 20 غير صالحة

اذن 240 بطارية غير صالحة من اصل X بطارية ينتجها المصنع.

∴ يجب ان ينتج المصنع 1600 بطارية



مثال (3) عند رمي حجر النرد مرة واحدة جد احتمال :

- (i) الحدث: الحصول على المجموع 5 على وجهي الحجرين.
(ii) الحدث : الرقم على وجه الحجر الاول ضعف الرقم على وجه الحجر الثاني.

هذا الاحتمال نظري : لان الحجرين رميا مرة واحدة.

عدد ارقام الحجر الاول = 6 ، عدد ارقام الحجر الثاني = 6

اذن بحسب قانون العد الاساسي : عدد عناصر فضاء العينة تساوي 6×6 وتساوي 36

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (1,1) \dots\dots (1,6) \\ (2,1) \dots\dots (2,6) \\ \vdots \\ (6,1) \dots\dots (6,6) \end{array} \right\} \quad n = 36$$

i) $E_1 = \{ (1,4), (4,1), (2,3), (3,2) \}, m = 4, n = 36$

$$P(E_1) = \frac{m}{n}$$

$$P(E_1) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

ii) $E_2 = \{ (2,1), (4,2), (6,3) \}, m = 3, n = 36$

$$\therefore P(E_2) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

الحدث: مجموع 5 على وجهي الحجرين
قانون الاحتمال

بالتعويض وبالتبسيط

الحدث: رقم الحجر الاول ضعف رقم الحجر الثاني
بالتعويض وبالتبسيط

شاهد هذا الدرس
على يوتيوب



6

[6-2-2] الاحداث المتنافية

الحدثان المتنافيان: هما حدثان لا يمكن ان يتحققا معاً في تجربة واحدة.
مثلاً: عند رمي حجر النرد مرة واحدة، فان الحصول على
عدد فردي و عدد زوجي معاً مستحيل اذن هما حدثان متنافيان.
حساب احتمال الحدثين المتنافيين:

اذا كان E_1, E_2 حدثين متنافيين فان احتمال وقوع E_1 او وقوع E_2
يساوي مجموع احتمالي الحدثين

$$P(E_1 \text{ or } E_2) = P(E_1) + P(E_2) \quad \text{اي :}$$

مثال (4)

عند رمي حجر النرد مرة واحدة، جد احتمال الحصول على العدد 3 او على عدد زوجي.

بما انه لايمكن ان يظهر على وجه الحجر العدد 3 في الوقت نفسه مع عدد زوجي فان هذين الحدثين متنافيان

فضاء العينة

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$P(E_1) = \frac{m}{n}, m = 1, n = 6 \Rightarrow P(E_1) = \frac{1}{6}$$

احتمال الحصول على العدد 3 هو

$$P(E_2) = \frac{m}{n}, m = 3, n = 6 \Rightarrow P(E_2) = \frac{3}{6}$$

احتمال الحصول على العدد زوجي

$$P(E_1 \text{ or } E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

احتمال الحوادث المتنافية

$$P(E_1 \text{ or } E_2) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

بالتعويض وبالتبسيط

اذن احتمال ظهور العدد 3 او عدد زوجي في رمي حجر النرد يساوي $\frac{2}{3}$

.....

مثال (5)

عند رمي حجر النرد مرة واحدة، جد احتمال الحصول على عددين متساويين او مجموع عدد عناصر فضاء العينة عند رمي حجر النرد يساوي 36 عددين يساوي 3.

$$E_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

$$P(E_1) = \frac{\text{عدد عناصر } E_1}{\text{فضاء العينة}} = \frac{6}{36}$$

$$E_2 = \{(1,2), (2,1)\}$$

$$P(E_2) = \frac{\text{عدد عناصر } E_2}{\text{فضاء العينة}} = \frac{2}{36}$$

$$P(E_1 \text{ or } E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

$$= \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

E_1, E_2 حدثان متنافيان لا توجد عناصر مشتركة بينهما.

احتمال الاحداث المتنافية

بالتعويض وبالتبسيط

تأكد من فهمك

في تجربة رمي حجرى النرد مرة واحدة، جد احتمال حدوث الاحداث الآتية :

1 العددين على وجهي الحجرين متساويان.

الحل

عدد عناصر فضاء العينة عند رمي حجرى النرد $36 = 6 \times 6$

$$E = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

احتمال الحصول وجهي متساويين $m = 6, n = 36$

2 العدد على وجه الحجر الأول نصف العدد على وجه الحجر الثاني.

الحل

عدد عناصر فضاء العينة عند رمي حجرى النرد $36 = 6 \times 6$

الحدث : رقم الحجر الأول نصف رقم الحجر الثاني

$$E = \{(1,2), (2,4), (3,6)\} \quad m = 3, n = 36$$

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

3 مجموع العددين على وجهي الحجرين يساوي 10.

الحل

عدد عناصر فضاء العينة عند رمي حجرى النرد $36 = 6 \times 6$

$$E = \{(4,6), (6,4), (5,5)\} \quad m = 3, n = 36$$

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

4 مجموع العددين على وجهي الحجرين اقل من 5.

الحل

عدد عناصر فضاء العينة عند رمي حجرين = $6 \times 6 = 36$

$$E = \{(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,2)\} \quad m = 6, n = 36$$

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

5 أتجريبية الاحتمالات السابقة ام نظرية؟

الحل

الاحتمالات السابقة نظرية لكون الحجران رميا مرة واحدة ((لأنها تعتمد على فضاء العينة)) .

6 كيس فيه 4 كرات حمراء، كرة خضراء، كم كرة زرقاء يجب ان تضاف الى الكيس كي يكون احتمال سحب كرة حمراء $\frac{2}{3}$ ؟ أنظري الاحتمال ام تجريبي ؟

الحل

نضع كرة زرقاء واحدة فقط في الكيس ليصبح عدد الكرات في الكيس (6) كرات .
الاحتمال تجريبي لأن عملية السحب ستتكرر عدة مرات .

$$P(E) = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

7 وقف شخص في احدى تقاطعات مدينة بغداد فأحصى 25 سيارة شاهدها، منها 13 سيارة صفراء اللون، 7 سيارات بيضاء اللون، 5 سيارات رصاصية اللون. قَدِّر احتمال ان تكون السيارة الثالثة التي تجتاز التقاطع صفراء اللون . وما نوع الاحتمال أنظري ام تجريبي ؟ اكتب النسبة بشكل كسر عشري ونسبة مئوية .

الحل

فضاء العينة = $25 \Leftarrow n = 25$ ، الحدث 13 سيارة صفراء $m = 13$

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{13}{25} \quad \text{احتمال قدوم سيارة صفراء}$$

الاحتمال تجريبي

$$\frac{13}{25} = \frac{13 \times 4}{25 \times 4} = \frac{52}{100} = 0.52 = 52\%$$

8 عند رمي حجرى نرد، جد احتمال حصول على عددين مجموعهما 5 او مجموعهما 11. هل الحدثان متنافيان بيّن ذلك.

الحل

عدد عناصر فضاء العينة عند رمي حجرى النرد $36 = 6 \times 6$

احتمال على الحصول مجموع عددين يساوي 5

$$E_1 = \{(2,3), (3,2), (1,4), (4,1)\} \quad m = 4, n = 36$$

$$P(E_1) = \frac{m}{n} = \frac{4}{36}$$

احتمال على الحصول مجموع عددين يساوي 11 $E_2 = \{(5,6), (6,5)\} \quad m = 2, n = 36$

$$P(E_2) = \frac{2}{36}$$

E_1, E_2 حدثان متنافيان لا توجد عناصر مشتركة بينهما.

$$P(E_1 \text{ or } E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

$$P(E_1 \text{ or } E_2) = \frac{4}{36} + \frac{2}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

تدرب وحل التمرينات

في تجربة رمي حجرى النرد مرة واحدة، جد احتمال حدوث الاحداث الاتية :

9 مجموع العددين على وجهي الحجرين اكبر من 8.

الحل

عدد عناصر فضاء العينة عند رمي حجرى النرد $36 = 6 \times 6$

$$E = \{(3,6), (6,3), (4,5), (5,4), (4,6), (6,4), (5,5), (5,6), (6,5), (6,6)\}$$

$$m = 10, n = 36$$

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

مجموع العددين على وجهي الحجرين يساوي 12.

10

الحل

عدد عناصر فضاء العينة عند رمي حجري النرد $36 = 6 \times 6$

$$E = \{(6,6)\} \quad m = 1, n = 36$$

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{1}{36}$$

اجريت دراسة على 100 شخص، فاجاب 15 منهم انهم يستعملون اليد اليسرى فاذا اجريت الدراسة على 400 شخص، فكم تتوقع عدد الاشخاص الذين يستعملون اليد اليسرى ؟

11

الحل

نفرض عدد الاشخاص الذين يستعملون اليد اليسرى X

$$\frac{15}{100} = \frac{X}{400} \quad \text{الطرفين في الوسطين}$$

$$100X = 6000 \Rightarrow X = \frac{6000}{100} = 60$$

جد احتمال سحب بطاقة تحمل عدداً فردياً او تحمل عدداً من مضاعفات العدد 2 من بطاقات مرقمة من 1 الى 9

12

فضاء العينة : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, n = 9$

الحل

$$E_1 = \{1,3,5,7,9\} \quad m = 5, n = 9$$

احتمال سحب بطاقة تحمل عدداً فردياً

$$P(E_1) = \frac{m}{n} = \frac{5}{9}$$

$$E_2 = \{2,4,6,8\} \quad m = 4, n = 9$$

احتمال سحب بطاقة تحمل مضاعفات العدد 2

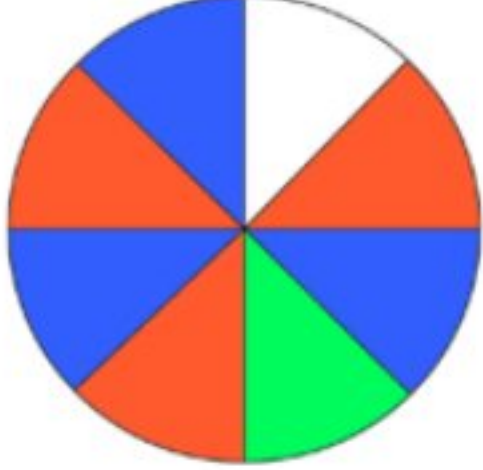
$$P(E_2) = \frac{m}{n} = \frac{4}{9}$$

$$P(E_1 \text{ or } E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

$$P(E_1 \text{ or } E_2) = \frac{5}{9} + \frac{4}{9} = \frac{9}{9} = 1$$

• تدرب وحل مسائل حياتية •

13 **تسلية:** بأي لون يجب تلوين الفراغ بحيث يكون احتمال ان يأتي المؤشر عند هذا اللون $\frac{1}{4}$ ؟



الحل

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$$

تلوين الفراغ باللون الأخضر

14 **طوابع:** يهوى مهند جمع الطوابع البريدية، فمن بين 60 طابعاً جمع 25 طابعاً للدول العربية، 15 طابعاً لدول افريقية و 20 طابعاً لدول اوربية. قَدِّر احتمال ان يكون الطابع الذي سيجمعه أوربياً.

الحل

فضاء العينة $n = 60$, عدد طوابع الدول الأوربية $m = 20$

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$$

15 **رياضية:** في التدريب على كرة السلة، اصاب لاعب السلة 15 كرة من 25 يصيب لاعب السلة في الرمية التالية؟ اكتب الجواب على صورة كسر و عدد عشري و نسبة مئوية .

الحل

فضاء العينة (عدد الرميات) $n = 25$, عدد الرميات التي فيها اصابة $m = 15$

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = 0.6 = 60\%$$

16 **دراسة:** احصى رجل في عائلته 3 افراد عيونهم زرق من كل 22 فرداً، اذا رزق الرجل بمولود جديد، ما احتمال ان تكون عيناه ليست زرقاء ؟

الحل

فضاء العينة $n = 22$, الأفراد الذين ليسوا عيونهم زرقاء

$$m = 19, (22 - 3 = 19)$$

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{19}{22}$$

فكر



17 تحدّ: قرص ذو مؤشر، مقسم على ثلاثة اجزاء في الشكل المجاور: نصف القرص اخضر ثلثه احمر و سدسه ازرق. ما احتمال ان يدل مؤشر القرص على الأخضر او الأحمر بعد اطلاقه؟

الحل
 $P(E_1) = \frac{1}{2}$ نصف القرص أخضر , $P(E_2) = \frac{1}{3}$ ثلثه أحمر

$$P(E_1 \text{ or } E_2) = P(E_1) + P(E_2) \Rightarrow P(E_1 \text{ or } E_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$



18 أكتشف الخطأ: يريد كل من سارة و مهند تحديد احتمال اختيار كرة زرقاء او حمراء عشوائياً من كيس يحتوي على 5 كرات زرق، 4 كرات حمراء، 6 كرات صفراء ايهما كانت اجابته صحيحة ؟ فسّر اجابتك.

مهند	سارة
$P(R \text{ or } B) = P(R) \times P(B) = \frac{4}{15} \times \frac{5}{15} = \frac{4}{45}$	$P(R \text{ or } B) = P(R) + P(B) = \frac{4}{15} + \frac{5}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

الحل
 أجابه سارة هي الإجابة الصحيحة لأن الاختيار إما كرة زرقاء أو كرة حمراء فأن الاحتمال النهائي يكون جمع وليس ضرب .

أكتب
 توضيحاً لما يمثله كل عدد في الكسر $\frac{2}{9}$ الذي يمثل احتمال وقوع حدث نظري او تجريبي.

التجريبي

العدد 2 يدل على عدد مرات حدوث الحدث
 العدد 9 يدل على عدد مرات أجزاء التجربة

النظري

العدد 2 يدل على عدد مرات حدوث الحدث
 العدد 9 يدل على عدد عناصر فضاء العينة

الاحداث المركبة

شاهد هذا الدرس على
يوتيوب في الباركود رقم 6

[6-3-1] الاحداث المستقلة

سبق وان تعلمت مفهوم الاحداث المستقلة (نتيجة احدهما لا تؤثر في نتيجة الآخر) في هذا الدرس سوف نتعلم حساب احتمال الحوادث المستقلة، اذا كان: E_1, E_2 حدثين مستقلين فان احتمال وقوعهما معاً يساوي حاصل ضرب احتمال E_1 في احتمال الحدث E_2 ، اي:

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$$

تعلم



تشير تقارير شركة الخطوط الجوية العراقية الى وصول طائراتها في موعدها المحدد بنسبة $\frac{19}{20}$ ، كما تشير النسبة 2% الى فقدان الامتعة من الحالات. فما احتمال وصول طائرة من موعدها وبدون فقدان امتهة؟

.....

مثال (1) في فقرة تعلم:

$$P(E_1) = \frac{19}{20}$$

$$P(E_2) = \frac{1}{50}$$

ان احتمال وصول الطائرة في موعدها هو

ان احتمال فقدان الامتعة هو

ان وصول الطائرة في موعدها لا يؤثر في فقدان الامتعة، هذا يعني ان الحدثين مستقلان.

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$$

احتمال الاحداث المستقلة

بالتعويض

$$\begin{aligned} &= \frac{19}{20} \times \frac{1}{50} \\ &= \frac{19}{1000} = 0.019 = 1.9\% \end{aligned}$$

مثال (2)

كيس يحتوي على 3 كرات حمراء، 4 كرات خضراء، 5 كرات زرقاء، سحبت منه كرة عشوائياً ثم أعيدت وسحبت كرة ثانية. جد احتمال سحب كرة حمراء ثم كرة خضراء.

$$P(R) = \frac{\text{عدد الكرات الحمراء}}{\text{العدد الكلي للكرات}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

سحب الكرة الحمراء

$$P(G) = \frac{\text{عدد الكرات الخضراء}}{\text{العدد الكلي للكرات}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

سحب الكرة الخضراء

الحدثان مستقلان.

$$P(R \text{ and } G) = P(R) \times P(G)$$

احتمال الاحداث المستقلة (لان الكرة الاولى اعيدت الى الكيس)

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

بالتعويض

اذن احتمال سحب كرة حمراء ثم كرة خضراء مع اعادة الكرة الحمراء يساوي $\frac{1}{12}$

.....

مثال (3)

إذا اختيرت إحدى البطاقات المرقمة وتدوير مؤشر القرص الدوار كما مبين في الشكل المجاور.



ما احتمال ان يكون الناتج عدداً زوجياً واللون الأزرق؟

نفرض ان $P(E_1)$ احتمال العدد الزوجي.

$$P(E_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

نفرض ان $P(E_2)$ احتمال وقوف المؤشر على اللون الأزرق.

$$P(E_2) = \frac{1}{4}$$

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$$

احتمال الحوادث المستقلة

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

بالتعويض والتبسيط

اذن احتمال (عدد زوجي ولون أزرق) هو $\frac{1}{8} = 12.5\%$

.....

[6-3-2] الاحداث المترابطة

الاحداث المترابطة (نتيجة احدهما تؤثر في نتيجة الآخر)

إذا كان E_1 و E_2 حدثين مترابطين فان احتمال وقوعهما معاً هو حاصل ضرب احتمال الحدث الاول E_1

في ضرب (احتمال الحدث E_2 بعد حصول الحدث E_1) ، اي:

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2 \text{ after } E_1)$$

مثال (4)

في مثال (2)، لو لم نعيد الكرة الحمراء الى الكيس. ما احتمال سحب كرة حمراء ثم كرة خضراء؟

$$P(R) = \frac{\text{عدد الكرات الحمراء}}{\text{العدد الكلي للكرات}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

سحب الكرة الحمراء

عدم اعادة الكرة الحمراء للكيس يعني ان عدد الكرات الحمر اصبح 2 كرة، والعدد الكلي لكرات في هذه الحالة هو 11 كرة بدل 12.

$$P(G \text{ after } R) = \frac{\text{عدد الكرات الخضراء}}{\text{العدد الكلي الجديد للكرات}} = \frac{4}{11}$$

سحب الكرة الخضراء

الحدثان مترابطان

$$P(R \text{ and } G) = P(R) \times P(G \text{ after } R)$$

احتمال الحوادث المترابطة

$$= \frac{1}{4} \times \frac{4}{11} = \frac{1}{11}$$

بالتعويض وبالتبسيط

اذن احتمال سحب كرة حمراء ثم خضراء دون اعادة الكرة الحمراء يساوي $\frac{1}{11}$

.....

مثال (5)

صندوق فيه 5 كرات حمراء، 3 زرق، 8 صفراء، سحب كرة من الصندوق من دون اعادتها ثم سحب

ثانية، جد $P(\text{صفراء ثم حمراء})$

$$\text{افرض } P(Y) \text{ سحب صفراء، } P(Y) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

عدم اعادة الكرة الصفراء، اصبح في الصندوق 5 كرات حمراء، 3 زرقاء، 7 صفراء، اي مجموعهما 15 كرة. سحب كرة حمراء من الصندوق.

$$P(R \text{ after } Y) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

الحدثان مترابطان

$$P(Y \text{ and } R) = P(Y) \times P(R \text{ after } Y)$$

احتمال الحوادث المترابطة

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

بالتعويض وبالتبسيط

اذن احتمال سحب كرة صفراء ثم كرة حمراء من دون اعادة الكرة الصفراء هو $\frac{1}{6}$

الخلاصة:

1. نجد $P(E_2), P(E_1)$

2. اذا كان E_1, E_2 مستقلين فان: $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$

3. اذا E_1, E_2 مترابطين فان: $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2 \text{ after } E_1)$

تأكد من فهمك

1 صندوق فيه 3 كرات حمراء، 3 كرات خضر، ما احتمال سحب كرتين خضر من دون اعادة الكرة الاولى؟

1

الحل

العدد الكلي للكرات $(3 + 3 = 6)$

سحب الكرات الخضراء

$$P(G) = \frac{\text{عدد الكرات الخضراء}}{\text{عدد الكلي للكرات}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

عدم اعادة الكرة الخضراء اصبح عدد الكرات في الصندوق 3 حمراء , 2 خضراء أي مجموعهما 5

$$P(G \text{ after } G) = \frac{\text{عدد الكرات الخضراء المتبقية}}{\text{عدد الكلي الجديد للكرات}} = \frac{2}{5}$$

$$P(G \text{ and } G) = P(G) \times P(G \text{ after } G)$$

الحدثان مترابطان

$$P(G \text{ and } G) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$



2 اطلق مؤشر في القرصين المقابلين مرة واحدة، ما احتمال ان يأتي مؤشر الاول على اللون الأحمر ومؤشر الثاني على العدد 5 ؟

الحل

عدد الكلي للأرقام = 8

$$P(E_1) = \frac{\text{احتمال ان يأتي المؤشر على اللون الأحمر}}{\text{عدد الكلي للأرقام}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \text{القرص الأول}$$

$$P(E_2) = \frac{\text{احتمال ان يأتي المؤشر على العدد 5}}{\text{عدد الكلي للأرقام}} = \frac{1}{8} \quad \text{القرص الثاني}$$

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2) \quad \text{الحدثان مستقلين}$$

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{16} = 0.063 = 6.3\%$$

3 رمي قطعتي نقود مرة واحدة، ما احتمال ظهور صورة على القطعة الاولى، وكتابة على القطعة الثانية.

الحل

العدد الكلي لظهور الصورة = 2

$$P(E_1) = \frac{\text{احتمال ظهور صورة على القطعة الأولى}}{\text{العدد الكلي}} = \frac{1}{2} \quad \text{احتمال ظهور صورة على القطعة الأولى}$$

$$P(E_2) = \frac{\text{احتمال ظهور كتابة على القطعة الثانية}}{\text{العدد الكلي}} = \frac{1}{2} \quad \text{احتمال ظهور كتابة على القطعة الثانية}$$

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2) \quad \text{الحدثان مستقلين}$$

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

تدرب وحل التمرينات

4 صندوق فيه 5 بطاقات حمراء، 4 بطاقات سوداء، 6 بطاقات خضراء. سحبت بطاقة من دون اعادتها للصندوق وسحبت بطاقة ثانية، ما احتمال ان تكون البطاقة الاولى حمراء والثانية سوداء؟

4

الحل

العدد الكلي للبطاقات (6 + 4 + 5 = 15)

$$P(R) = \frac{\text{عدد البطاقات الحمراء}}{\text{العدد الكلي للبطاقات}} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

احتمال ان تكون البطاقة الأولى حمراء

عدم اعادة البطاقة الحمراء الى الصندوق اصبح عدد البطاقات 4 حمراء، 4 سوداء، 6 خضراء أي مجموعهما 14

$$P(B \text{ after } R) = \frac{\text{عدد البطاقات السوداء}}{\text{عدد الكلي الجديد للبطاقات}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

احتمال ان تكون البطاقة الثانية سوداء

$$P(B \text{ and } R) = P(R) \times P(B \text{ after } R)$$

الحدثان مترابطان

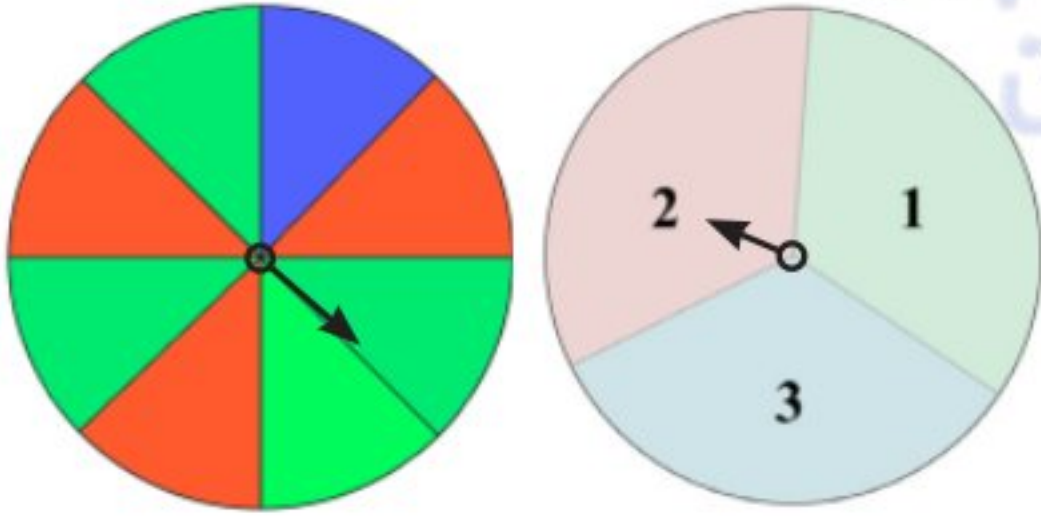
$$P(B \text{ and } R) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{7} = \frac{2}{21}$$

.....

5 اطلق مؤشر في القرصين المجاورين مرة واحدة، ما احتمال ان يأتي مؤشر الاول على اللون الأخضر ومؤشر الثاني على العدد 3؟

5

الحل



العدد الكلي للأرقام في مؤشر القرص الأول = 8

$$P(E_1) = \frac{\text{احتمال ان يأتي مؤشر الأول على اللون الأخضر}}{\text{العدد الكلي للأرقام}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

احتمال ان يأتي مؤشر الأول على اللون الأخضر

العدد الكلي للأرقام في مؤشر القرص الثاني = 3

$$P(E_2) = \frac{\text{احتمال ان يأتي مؤشر الثاني على العدد 3}}{\text{العدد الكلي للأرقام}} = \frac{1}{3}$$

احتمال يأتي مؤشر الثاني على العدد 3

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$$

الحدثان مستقلين

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

6 رمي حجرى النرد مرة واحدة، ما احتمال ظهور عدد يقبل القسمة على 3 على الحجر الاول، وعدد يقبل القسمة على 5 على الحجر الثانى؟

فضاء العينة : $m = 2, n = 36$

$$E = \{ (3, 5), (6, 5) \}$$

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

• تدرب وحل مسائل حياتية •

7 **حلول:** تحتوي علبة على 10 قطع حلوى بطعم الفراولة، 15 قطعة بطعم الشكولاته، 5 قطع بطعم الليمون. ما احتمال اختيار قطعتين عشوائياً الواحدة تلو الاخرى من دون ارجاع على ان تكون الاولى بطعم الشكولاته والثانية بطعم الليمون؟

الحل
مجموع قطع الحلوى هي : $(10 + 15 + 5 = 30)$

نفرض احتمال اختيار القطعة الاولى بطعم الشكولاته هي : $P(E_1)$

$$P(E_1) = \frac{\text{عدد قطع الحلوى بطعم الشكولاته}}{\text{مجموع قطع الحلوى}} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

عدم ارجاع قطعة الشكولاته , اصبحت العلبة تحتوي على 10 قطع حلوى بطعم الفراولة , 14 قطعة بطعم الشكولاته , 5 قطع بطعم الليمون . أي مجموع القطع الجديد هو 29

نفرض احتمال اختيار القطعة الثانية بطعم الليمون هي : $P(E_2)$

$$P(E_2 \text{ after } E_1) = \frac{\text{عدد قطع الحلوى بطعم الليمون}}{\text{مجموع الجديد قطع الحلوى}} = \frac{5}{29}$$

الحدثان مترابطان

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2 \text{ after } E_1) \Rightarrow P(E_1 \text{ and } E_2) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{29} = \frac{5}{58}$$

8 **كتب:** اختارت سها كتاباً من رف في غرفتها واعادته ثم اختارت كتاباً آخر، ما احتمال ان يكون اختيار الكتاب من كتب الرياضيات؟ علماً ان الرف يحتوي على 5 كتب رياضيات، 2 كتاب لغة انكليزية، 3 كتب علوم.

الحل مجموع الكتب هي : $(5 + 2 + 3 = 10)$

$$P(E_1) = \frac{\text{عدد كتب الرياضيات}}{\text{مجموع الكتب}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

احتمال اختيار كتاب الرياضيات الأول

$$P(E_2) = \frac{\text{عدد كتب الرياضيات}}{\text{مجموع الكتب}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

احتمال اختيار كتاب الرياضيات الثاني

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$$

الحدثان مستقلين

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

فكر

9 **أكتشف الخطأ:** تريد كل من جمانة واختها سالي تحديد احتمال اختيار كرة حمراء واخرى صفراء عشوائياً من كيس يحتوي 4 كرات حمراء، 5 كرات صفراء من دون ارجاع الكرة بعد السحب.

جمانة سالي

$$P(\text{حمراء و صفراء})$$

$$P(\text{حمراء و صفراء})$$

$$P(\text{صفراء}) \times P(\text{حمراء})$$

$$P(\text{صفراء}) \times P(\text{حمراء})$$

$$\frac{4}{9} \times \frac{5}{8}$$

ايهما كان حلها صحيحاً؟

$$\frac{4}{9} \times \frac{5}{9}$$

الحل

$$P(E_1) = \frac{\text{عدد الكرات الحمراء}}{\text{عدد الكلي للكرات}} = \frac{4}{9}$$

احتمال اختيار كرة حمراء

العدد الكلي للكرات هو : $(4 + 5 = 9)$

عدم اعادة الكرة الحمراء اصبح 3 كرات حمراء , 5 كرات صفراء . أي مجموع الجديد للكرات هو 8

تكملة الحل في الصفحة الاخرى

$$P(E_2 \text{ after } E_1) = \frac{\text{عدد الكرات الصفراء}}{\text{مجموع الجديد للكرات}} = \frac{5}{8} \quad \text{احتمال اختيار كرة صفراء}$$

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2 \text{ after } E_1) \quad \text{الحدثان مترابطان}$$

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{18}$$

اجابة سالي هي الصحيحة

10 تحدّ: عند رمي حجر النرد وقطعة نقود، ما احتمال ظهور رقم اكبر من 2 واصغر من 6 على حجر النرد والكتابة على قطعة النقود؟

الحل

فضاء العينة لحجر النرد هي : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $n = 6$

احتمال ظهور رقم اكبر من 2 واصغر من 6 هو : $m = 3$, $\{3,4,5\}$

$$P(E_1) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

فضاء العينة لقطعة النقود هي : $\Omega = \{H, T\}$, $n = 2$

$$P(E_2) = \frac{m}{n} = \frac{1}{2}$$

احتمال ظهور الكتابة هو : $m = 1$, $\{H\}$

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$$

الحدثان مستقلين

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

11 10 بطاقات بثلاثة اشكال مختلفة، اكتب مسألة تتعلق بسحب بطاقتين عشوائياً من دون ارجاعهما على ان يكون الاحتمال $\frac{1}{15}$

الحل

صندوق فيه 5 بطاقات صفراء , 3 بطاقات خضراء , 2 بطاقة حمراء سحبت بطاقة دون اعادتها للصندوق وسحبت بطاقة ثانية . ما احتمال ان تكون البطاقة الأولى حمراء والثانية خضراء .

العدد الكلي للبطاقات : $(5 + 3 + 2 = 10)$

$$P(R) = \frac{\text{عدد البطاقات الحمراء}}{\text{عدد الكلي للبطاقات}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

احتمال ان تكون البطاقة الأولى حمراء

عدم اعادة البطاقة اصبح 5 صفراء , 3 خضراء , 1 حمراء . أي العدد الكلي الجديد للبطاقات 9

$$P(G \text{ after } R) = \frac{\text{عدد البطاقات الخضراء}}{\text{العدد الكلي الجديد للبطاقات}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

احتمال ان تكون البطاقة الثانية خضراء

$$P(R \text{ and } G) = P(R) \times P(G \text{ after } R)$$

الحدثان مترابطان

$$P(R \text{ and } G) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

أكتب

مثالاً على حدثين مستقلين ومثالاً آخر على حدثين مترابطين.

الحل

مثال على حدثين مستقلين تمرين 8 وتمرين 10 أو اي مثال او تمرين اخر في الملزمة .

مثال على حدثين مترابطين . تمرين 4 وتمرين 7 أو اي مثال او تمرين اخر في الملزمة .

اختبار الفصل

1 وزع استبيان على 30 طالب من بين 100 طالب، اجب عما يأتي:

(i حدّد العينة والمجتمع الذي اختير منه. ج / المجتمع 100 طالب , العينة 30 طالباً

(ii صف اسلوب توزيع الاستبيان. ج / دراسة مسحية

(iii حدّد ما اذا كانت العينة متحيزة ام لا.

ج / العينة غير متحيزة , لأن هذه العينة تتكون من طلاب أختيروا عشوائياً

2 كيف تميز بين الرسوم البيانية المضللة والرسوم البيانية غير المضللة؟

البيانات المضللة :

1 (عندما تكون الفترات غير متساوية .

2 (اذا لم يبدأ التدرج من الصفر .

3 (اذا كان حجم العينة المختارة صغيراً جداً .

3 رمي حجر النرد 25 مرة وكانت النتائج كما موضح في الجدول الآتي:

النتيجة	1	2	3	4	5	6
عدد المرات	2	6	3	5	2	7

(i ما نوع الاحتمال؟ ج / الاحتمال تجريبي

(ii جد احتمال ظهور العدد 4. ج / $P(E) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

4 في تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة، جد:

- (i) نوع الاحتمال أنظري ام تجريبي. ج / الاحتمال نظري
(ii) احتمال الحصول على عدد يقبل القسمة على 4.

الحل

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, E = \{4\} \Rightarrow P(E) = \frac{1}{6}$$

5 وقف مهند في إحدى تقاطعات مدينة بغداد، واحصى انواع السيارات عند التقاطع، من بين 20 سيارة شاهدها، احصى 10 سيارات صالون، 7 سيارات نقل صغيرة لنقل الركاب، 3 سيارات حمل. قدر احتمال ان تكون السيارة التالية التي تجتاز التقاطع سيارة صالون.

الحل

$$P(E) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \quad \text{عدد السيارات} = 20$$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

• إختبروا مستواكم في وزاريات الفصل السادس •

• السؤال رقم 1 •

س / في تجربة رمي حجرى النرد مرة واحدة جد احتمال الحصول على مجموع العددين وجهي الحجرين يساوي (5)؟

• السؤال رقم 2 •

صندوق فيه (5) بطاقات حمراء و (4) بطاقات سود (6) خضر سحبت بطاقة دون اعادتها للصندوق وسحبت بطاقة ثانية ما احتمال ان تكون البطاقة الأولى حمراء والثانية سوداء؟

• السؤال رقم 3 •

س / كيس يحتوي على (5) كرات زرق (8) كرات خضر، (7) كرات صفر جد احتمال سحب كرة زرقاء واحدة من الكيس

• السؤال رقم 4 •

صندوق فيه (5) بطاقات حمراء، (4) بطاقات سود، (6) بطاقات خضر، سحبت بطاقة دون إعادتها للصندوق وسحبت بطاقة ثانية، ما احتمال أن تكون البطاقة الأولى حمراء والثانية سوداء؟

• السؤال رقم 5 •

عندي رمي حجر النرد مرة واحدة جد احتمال مجموع العددين على وجهي الحجرين اقل من (5)

• السؤال رقم 6 • س / صندوق فيه (3) كرات حمراء و (3) كرات خضر، ما احتمال سحب كرتين خضر من دون اعادة الكرة الاولى ؟

• السؤال رقم 7 •

اختارت (سهى) كتابا من رف في غرفتها واعادته ، ثم اختارت كتابا اخر، ما احتمال ان يكون الكتاب من كتب الرياضيات ؟ علما ان الرف يحتوي على (5) كتب رياضيات ، (2) كتب لغة انكليزية ، (3) كتب علوم .

• السؤال رقم 8 •

جد ان أمكن الوسيط الحسابي والوسيط والمنوال للقيم الآتية 4, 5, 8, 9, 13, 7

• السؤال رقم 9 •

إذا كان الوسيط الحسابي للقيم (4, 11, 8, x) هو (7) فما قيمة (x) ؟

• السؤال رقم 10 •

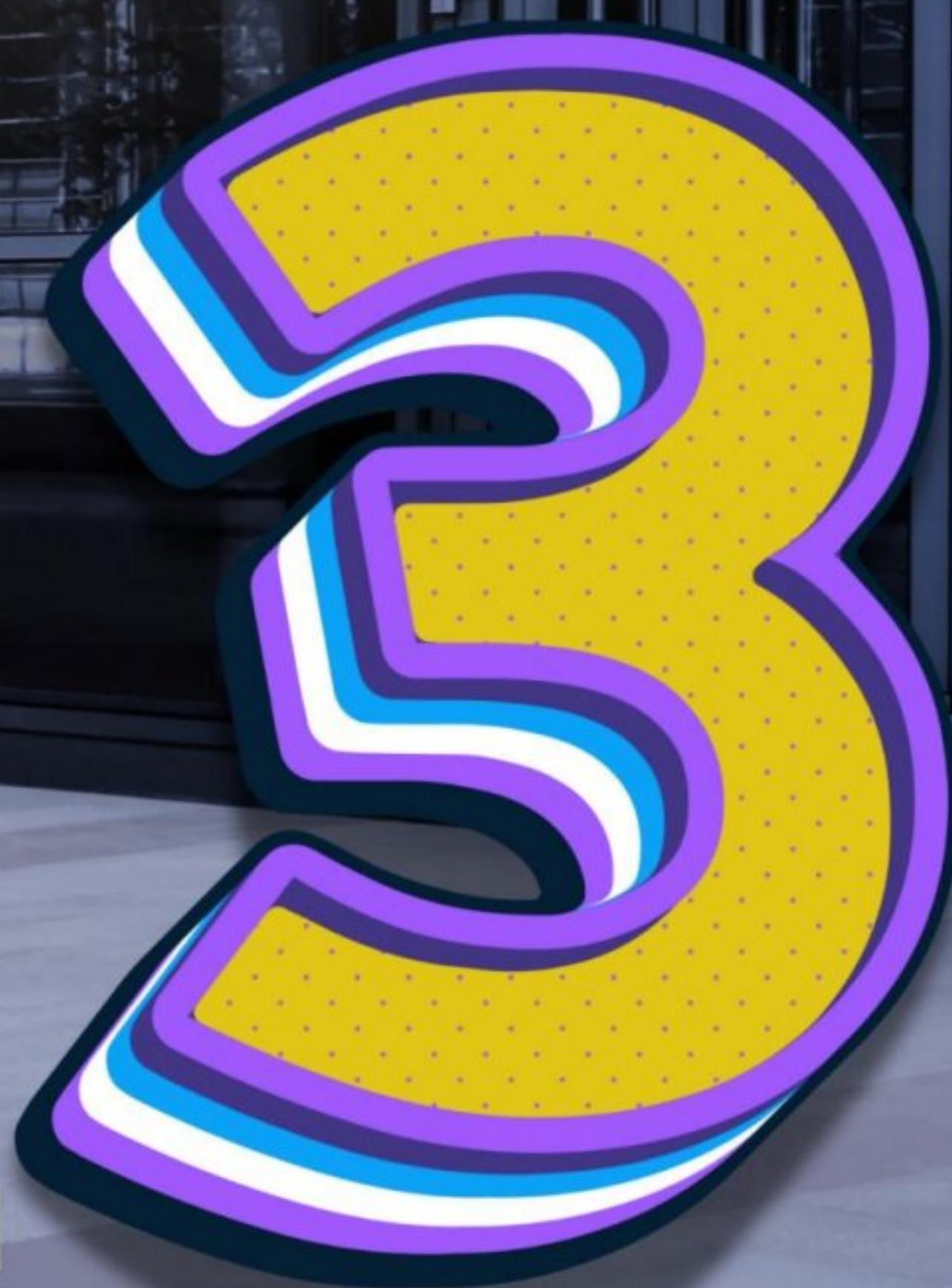
جد الوسيط الحسابي والوسيط والمنوال للقيم الآتية 2, 5, 6, 7, 8, 5

• السؤال رقم 11 •

س / جد ان امكن الوسيط الحسابي X, والوسيط ME, والمنوال MO للقيم: 4, 11, 13, 20, 17, 3, 6, 14

الجزء الثاني :
الفصل الرابع : الهندسة الإحداثية
الفصل الخامس : الهندسة و القياس
الفصل السادس : الإحصاء و الاحتمالات

الصف



المتوسط

20
26